

Modos electromagnéticos localizados

J. G. Medrano y F. Pérez-Rodríguez

Instituto de Física, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, Pue. 72570, México.

N. M. Makarov

Instituto de Ciencias, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, Pue. 72570, México.

Received 4 April 2023; accepted 21 May 2023

En este trabajo se presenta un estudio teórico detallado sobre los modos propios electromagnéticos localizados en una capa dieléctrica que está rodeada por medios dieléctricos semi-infinitos. La relación de dispersión y la distribución de campo electromagnético de los modos propios localizados se calcularon y se analizaron aplicando el formalismo de la matriz de transferencia. Para el estudio de este sistema se emplearon las polarizaciones lineales de la luz *s* y *p*. En ambos casos, existe un número infinito de modos propios localizados cuando la permitividad de la capa dieléctrica tiene signo positivo y es mayor que la permitividad del medio circundante. Por el contrario, cuando la permitividad de la capa dieléctrica es negativa, solo hay un modo propio electromagnético localizado. Esto último ocurre únicamente para el caso de polarización *p*. El espectro de este modo propio localizado depende no solo del signo negativo de la permitividad de la capa, sino también de la diferencia entre el valor absoluto de la permitividad de la capa y la permitividad del medio adyacente. Además, se discute la simetría de los modos propios electromagnéticos localizados.

Descriptor: Enseñanza de la física; electromagnetismo; ondas localizadas.

The localized electromagnetic eigenmodes in a dielectric slab, sandwiched between two semi-infinite dielectric media, are theoretically studied. The transfer matrix formalism is applied for deriving the dispersion relation and electromagnetic field distribution of the localized eigenmodes for both *s* and *p* polarization of light. There is an infinite number of localized eigenmodes when the permittivity of the slab has positive sign in either *s* or *p* polarization. The latter occurs if the permittivity of the slab is greater than the permittivity of the surrounding media. In contrast, when the slab has negative permittivity there is just one localized electromagnetic eigenmode only for the *p*-polarization. In his case, the spectrum of the localized eigenmode is determined not only by the negative sign of the slab permittivity, but also by the difference between the permittivity absolute value for the slab and the permittivity of the surrounding medium. In addition, the symmetry of the localized electromagnetic eigenmodes is discussed.

Keywords: Physics teaching; electromagnetism; localized waves.

DOI: <https://doi.org/10.31349/RevMexFis.21.020220>

1. Introducción

La propagación de ondas electromagnéticas en diferentes medios es un tema de gran importancia en la electrodinámica. Uno de los problemas fundamentales consiste en estudiar la propagación de ondas electromagnéticas a través de una capa que está rodeada por los lados izquierdo y derecho de diferentes medios. Un gran número de artículos y libros de texto analizan este problema modelo porque se pueden estudiar analíticamente diferentes propiedades electromagnéticas. Por ejemplo, la transmisión, la reflexión, la absorción, las ondas electromagnéticas propias, etcétera.

En el problema modelo existe un caso especial de ondas electromagnéticas propias que tienen un comportamiento inusual. Tal comportamiento consiste en que dichas ondas pueden propagarse dentro de la capa y son evanescentes en los medios que rodean a la capa. Por lo anterior, estos modos propios se llaman *modos propios electromagnéticos localizados*.

Para conocer más acerca de las ondas localizadas se pueden consultar algunos libros como [1, 2] que estudian de manera general y hacen una revisión histórica sobre este tema. En estos libros [1, 2] se mencionan diferentes técnicas expe-

rimientales que se han empleado para generar y medir ondas localizadas.

El libro [1] tiene un capítulo donde comenta los primeros trabajos en que se utilizó el término onda localizada. En este libro se abordan desde características generales de las ondas localizadas hasta sus aplicaciones en diferentes áreas de la física como acústica, mecánica y óptica por mencionar algunas.

En el libro [2] se lleva a cabo un análisis detallado sobre la teoría y los experimentos de ondas localizadas, y hace mención de las posibles aplicaciones en diferentes áreas como óptica, medicina o el desarrollo de comunicaciones seguras. También tiene un capítulo dedicado a ondas monocromáticas localizadas en cristales fotónicos.

Uno de los métodos más útiles para resolver problemas de propagación de ondas es el de la matriz de transferencia. En el libro [3] se estudia en detalle este formalismo y se aplica a diferentes problemas modelo. En particular, uno de sus capítulos contiene la deducción y estudio de los coeficientes de transmisión y reflexión de una capa dieléctrica rodeada por un dieléctrico. Ahí, se analiza el caso en que ambos tienen permitividad eléctrica y permeabilidad magnética constantes, y se aborda el tema de los modos propios localizados dentro

de la capa dieléctrica. Sin embargo, solo se calcula la relación de dispersión para el caso de polarización s y no profundiza en el análisis de los modos propios localizados. En contraste, en el presente artículo se estudian en detalle tanto la polarización s como la p .

De acuerdo con los trabajos [4–8] los modos electromagnéticos localizados también se pueden excitar y propagar en capas de superconductores laminados de alta temperatura crítica cuya respuesta electromagnética, en el rango de frecuencias de terahertz (THz), se describe con el tensor de permitividad para un medio anisótropo uniaxial. Al incrementar la frecuencia de la onda, el valor principal de este tensor, correspondiente a la dirección perpendicular a los planos superconductores, cambia de signo negativo a positivo en la frecuencia de plasma de Josephson. En la referencia [4] se demostró que en la geometría de polarización p y de planos superconductores internos *paralelos* a las superficies de la capa, existen dos ramas de ondas de superficie, una por debajo de la frecuencia de plasma de Josephson, mientras que la otra aparece por encima de ésta. Además, existe un conjunto discreto de modos de guía de onda con campos electromagnéticos oscilando a lo largo del espesor de la capa y decayendo exponencialmente hacia afuera de la capa superconductora. La estructura del espectro de los modos propios depende del cociente entre las constantes dieléctricas del medio externo y del medio aislante que separa los planos superconductores. Los modos electromagnéticos propios pueden excitarse mediante el uso de la técnica de reflexión total atenuada, dando lugar a la supresión total de la reflexión especular. Si la capa se encuentra entre dos medios con un índice de refracción alto, la excitación de los modos localizados es acompañada de un incremento notable en la transmisión (fenómeno conocido como frustración de la reflexión total interna), así como de una pequeña absorción que es debida a las pérdidas de energía [6]. En los trabajos [7, 8] se aplicó el método de la matriz de transferencia para estudiar la relación de dispersión y la excitación de modos electromagnéticos localizados en una capa con planos internos superconductores *perpendiculares* a sus superficies. Para este estudio, se utilizó también una técnica de excitación basada en el rompimiento de la reflexión total interna mediante el uso de dos prismas. Se demostró que las curvas de dispersión de los modos localizados son amonótonas y su excitación resonante da lugar a absorción total y a la supresión de la reflexión especular.

El estudio del acoplamiento resonante de modos electromagnéticos localizados con diferentes cuasipartículas en heteroestructuras de materiales sólidos es un tema de gran interés actualmente. Así, por ejemplo, en los trabajos [9–11] y en las referencias ahí citadas se ha estudiado el acoplamiento de ondas electromagnéticas localizadas con excitones (parejas de electrón y hueco ligados) dentro de microcavidades semiconductoras cuánticas. Dichas microcavidades están formadas por una capa dieléctrica o semiconductor que contiene un pozo cuántico semiconductor y es cubierta por dos espejos de Bragg. La microcavidad se puede diseñar tal que las frecuencias propias de los modos electromagnéticos lo-

calizados coincidan con las frecuencias propias de los excitones y, como resultado, se logre un acoplamiento fuerte entre los modos electromagnéticos de la cavidad y los excitones confinados en el pozo cuántico. El acoplamiento fotón-excitón fuerte también se observa en microcavidades formadas por capas laterales de metal [12]. En el caso de microcavidades semiconductoras con pozo cuántico en presencia de un campo magnético cuantizante, recientemente se ha predicho un acoplamiento fuerte entre magnetoexcitones confinados y los modos electromagnéticos localizados [13]. En la referencia [14], se consideró una capa de semiconductor ubicada entre dos prismas separados por dos películas ya sea de dieléctrico o de metal. Los espectros de reflexión, transmisión y absorción para tal sistema en un campo magnético cuantizante mostraron una estructura resonante asociada con la excitación de modos electromagnéticos localizados en la capa semiconductor que están fuertemente acoplados a los magnetoexcitones confinados. Cabe mencionar que en este último trabajo, los cálculos de las relaciones de dispersión así como los espectros ópticos se llevaron a cabo con el método de la matriz de transferencia. Adicionalmente, se demostró que el régimen de acoplamiento fuerte entre magnetoexcitones y los modos electromagnéticos localizados se logra incluso cuando las ondas están débilmente localizadas, es decir, cuando la capa dieléctrica dentro de la microcavidad es rodeada por un medio dieléctrico de menor permitividad.

El presente trabajo tiene un objetivo educativo: profundizar en el estudio de los modos propios electromagnéticos localizados en una capa dieléctrica usando el formalismo de la matriz de transferencia. Aquí, se analiza el caso más simple de este problema fundamental que consiste en suponer que la capa y los medios que la rodean son medios dieléctricos con permitividad eléctrica y permeabilidad magnética constantes (Sec. 2). También, se supone que los medios a la izquierda y a la derecha de la capa tienen la misma permitividad eléctrica y permeabilidad magnética, es decir, la capa dieléctrica c está inmersa dentro de un medio dieléctrico b . En las Secs. 3 y 4, se obtienen las relaciones de dispersión de las ondas localizadas en la capa c para polarización s y polarización p , respectivamente. Ambas relaciones de dispersión son válidas para cualesquiera valores de permitividad y permeabilidad del medio b y la capa c . Para el análisis detallado de los modos propios localizados la permitividad del medio b se fija con signo positivo tanto en polarización s como en polarización p . Mientras que la permitividad eléctrica de la capa c era positiva, o bien, negativa. En el caso donde las permitividades del medio b y la capa c son positivas, existe un número infinito de modos propios localizados. Lo anterior no depende de la polarización y ocurre si se cumple la condición de que la permitividad de la capa c sea mayor que la permitividad del medio b . El análisis de los modos propios localizados es similar en ambas polarizaciones. Por el contrario, cuando la permitividad del medio b es positiva y la de la capa c es negativa ambas polarizaciones dan diferentes resultados. Para el caso de polarización s se observa que no existen modos propios localizados en la capa c . Pero el caso de polarización p es más

sofisticado. En polarización p existe un modo propio electromagnético localizado que tiene un espectro muy complicado. Esto porque el espectro depende también del signo de la diferencia entre el valor absoluto de la permitividad de la capa c y la permitividad del medio b . Todo el análisis correspondiente se muestra en este trabajo educativo. Finalmente, se estudia la simetría de los modos propios localizados: en polarización s con respecto al campo eléctrico y en polarización p con respecto al campo magnético. Los resultados generales de nuestra investigación se pueden encontrar en el Resumen.

Creemos que este trabajo puede ser útil para estudiantes de licenciatura o posgrado, así como jóvenes investigadores en el área de Física, particularmente hispanohablantes, en virtud de que está escrito en español.

2. Formulación del problema

El sistema de estudio consiste de una capa dieléctrica c de espesor d_c rodeada por un medio dieléctrico b como se muestra en la Fig. 1. La porción de dieléctrico b que está a la izquierda de la capa dieléctrica c se denota por b_L , mientras que la porción de dieléctrico b que se encuentra a la derecha de la capa dieléctrica c se etiqueta por b_R .

Debido a lo anterior se forman dos interfaces planas entre la capa c y el medio circundante b . El sistema de coordenadas se escoge tal que el eje x es perpendicular a las interfaces y el eje z es paralelo a ambas interfaces planas. De acuerdo con la elección del sistema de coordenadas, que se muestra en la Fig. 1, la primera interfaz está al inicio de la capa c en $x = 0$ y se denota como *interfaz izquierda* ($b_L|c$). La segunda interfaz está al final de la capa c en $x = d_c$ y se denomina como *interfaz derecha* ($c|b_R$).

En los medios b y dentro de la capa c el campo electromagnético se modela mediante ondas electromagnéticas planas. En el medio b_L a partir de una onda plana que incide

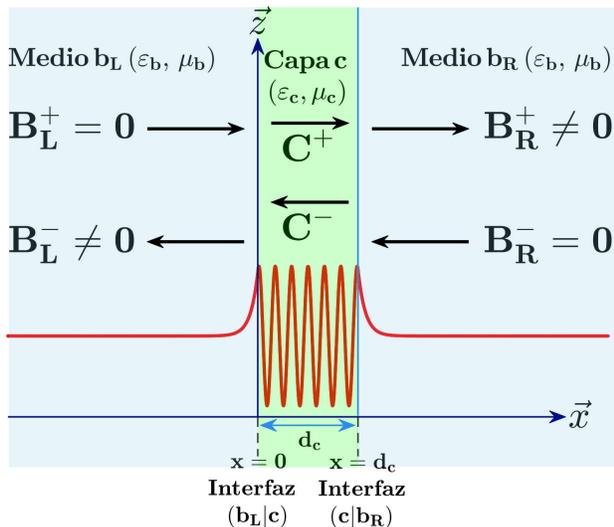


FIGURA 1. Capa dieléctrica, c , rodeada por un medio dieléctrico, b .

en la interfaz izquierda ($b_L|c$) con amplitud B_L^+ y una onda plana reflejada por la interfaz izquierda ($b_L|c$) con amplitud B_L^- . Naturalmente la onda con amplitud B_L^+ se denomina onda incidente y la onda cuya amplitud es B_L^- se denomina onda reflejada. Dentro de la capa c el campo electromagnético consiste de la superposición de dos ondas electromagnéticas planas con amplitudes C^+ y C^- . De manera similar al medio b_L , en el medio b_R se tienen las ondas electromagnéticas planas incidente y reflejada en la interfaz derecha ($c|b_R$) con amplitudes B_R^- y B_R^+ respectivamente. Todas estas ondas se observan en la Fig. 1.

Los medios b_L y b_R tienen *permitividad eléctrica* ε_b y *permeabilidad magnética* μ_b . Mientras que la placa c posee permitividad eléctrica ε_c y permeabilidad magnética μ_c . Las permitividades ε_b y ε_c así como las permeabilidades μ_b y μ_c son constantes. El *número de onda* en los medios b_L y b_R se denota por k_b . En la capa c el *número de onda* se representa por k_c . La permitividad eléctrica y permeabilidad magnética se relacionan con el número de onda en cada medio mediante las ecuaciones,

$$\varepsilon_b, \mu_b, k_b = \sqrt{k^2 \varepsilon_b \mu_b - k_z^2}, \quad (1a)$$

$$\varepsilon_c, \mu_c, k_c = \sqrt{k^2 \varepsilon_c \mu_c - k_z^2}, \quad \text{con} \quad k = \omega/c. \quad (1b)$$

Aquí, k_z es la componente del vector de onda tangencial a las interfaces, ω es la frecuencia de la onda electromagnética plana y c es la velocidad de la luz.

El campo electromagnético en los medios b_L , c y b_R obedece las ecuaciones de Maxwell. Como en los medios no existen corrientes eléctricas, las ecuaciones de Maxwell tienen la siguiente forma general

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2a)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (2b)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2c)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0. \quad (2d)$$

La Ec. (2a) se llama *ley de Faraday*. La ley de Faraday relaciona el rotacional del *campo eléctrico* \vec{E} con la derivada parcial respecto del tiempo de la *inducción magnética* \vec{B} . La ecuación que relaciona el rotacional del *campo magnético* \vec{H} con la derivada parcial respecto del tiempo del *desplazamiento* \vec{D} se conoce como *ley de Ampère-Maxwell* (2b). La Ec. (2c) se conoce como ley de inexistencia de monopolos magnéticos o ley de Gauss para el magnetismo. Finalmente la Ec. (2d) se denomina *ley de Gauss*. Adicionalmente, el campo eléctrico \vec{E} y vector desplazamiento \vec{D} , así como, el campo magnético \vec{H} e inducción magnética \vec{B} se relacionan según las ecuaciones

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (3)$$

Como no existen densidades superficiales de corriente el campo electromagnético debe ser continuo al atravesar las interfaces ($b_L|c$) y ($c|b_R$). Esto significa que existen dos condiciones de frontera, a saber, la continuidad de las componentes tangenciales a las interfaces de los vectores \vec{E} y \vec{H} ,

$$\vec{E}_t = \text{continuo}, \quad \vec{H}_t = \text{continuo}. \quad (4)$$

Estas condiciones de frontera deben satisfacerse tanto en la interfaz izquierda ($b_L|c$) en $x = 0$ como en la interfaz derecha ($c|b_R$) en $x = d_c$.

En el caso de ondas electromagnéticas planas se estudian dos polarizaciones lineales independientes y de tal modo fundamentales, a saber, polarización s y polarización p. Se conoce como polarización s el caso cuando el campo eléctrico es orientado en la dirección perpendicular al plano de incidencia. El plano de incidencia es el plano que contiene al vector normal a la superficie radiada y al vector de propagación de la onda. La polarización s también se conoce como polarización TE (Transversal Eléctrica). De acuerdo con la Fig. 1 el plano de incidencia es el plano xz y para el caso de polarización s el campo eléctrico está en la dirección del eje y .

Por el contrario, si ocurre que el campo magnético está orientado en la dirección perpendicular al plano de incidencia se conoce como polarización p ó polarización TM (Transversal Magnética). De acuerdo con la Fig. 1, en el caso de polarización p el campo magnético está en la dirección del eje y .

Las ondas electromagnéticas planas, en general, se escriben como ondas con polarización s, como ondas con polarización p o como ondas con una combinación de ambas polarizaciones. Por esto es suficiente analizar ambas polarizaciones por separado como se presenta a continuación.

3. Polarización s

Primero se considera un campo electromagnético monocromático de frecuencia ω con polarización s. En este caso, el campo eléctrico \vec{E} está en la dirección del eje y . Mientras que, el campo magnético \vec{H} tiene componentes en las direcciones de los ejes x y z . La forma del campo eléctrico \vec{E} y del campo magnético \vec{H} corresponde a una onda electromagnética plana que se propaga a lo largo de la capa c , es decir en la dirección positiva del eje z ,

$$\vec{E}(x, z, t) = \left(0, E_y(x), 0\right)^T \exp(ik_z z - i\omega t), \quad (5a)$$

$$\vec{H}(x, z, t) = \left(H_x(x), 0, H_z(x)\right)^T \exp(ik_z z - i\omega t). \quad (5b)$$

El superíndice T en las expresiones anteriores y en adelante indica la operación de transposición del vector renglón. Es decir, el campo eléctrico \vec{E} y el campo magnético \vec{H} son vectores columna pero se escriben como vector renglón transpuesto para una mejor presentación.

Debido a la presencia de la capa c es conveniente definir tres intervalos a lo largo del eje x . El primero está a la izquierda de la capa $-\infty < x \leq 0$ en el medio b_L . El segundo

está a lo ancho de la capa c en $0 \leq x \leq d_c$. El tercero está a la derecha de la capa $d_c \leq x < \infty$ en el medio b_R . En cada uno de los intervalos anteriores los campos eléctrico \vec{E} y magnético \vec{H} son de la forma presentada en las Ecs. (5).

Los medios a la izquierda b_L y a la derecha b_R de la capa se denotarán por b indistintamente. Cuando sea necesario especificar a que medio se refiere, si al de la izquierda o al de la derecha, usaremos los subíndices L y R respectivamente.

Como se mencionó anteriormente el campo electromagnético en los medios b_L , c y b_R obedece las ecuaciones de Maxwell (2) para un medio sin corriente eléctrica. A partir de la ley de Faraday (2a) se encuentra la relación entre el campo eléctrico \vec{E} y la inducción magnética \vec{B} .

Primero, el rotacional del campo eléctrico \vec{E} tiene componentes en x y z . La componente x es proporcional a la derivada parcial respecto de z de la componente $E_y^{b,c}(x)$ del campo eléctrico. La componente z es proporcional a la derivada parcial de la componente $E_y^{b,c}(x)$ del campo eléctrico respecto de x . Segundo, dado que los campos eléctrico \vec{E} y magnético \vec{H} dependen del tiempo de manera armónica (5), la derivada parcial respecto del tiempo es proporcional a la frecuencia ω . Se sigue que la derivada parcial respecto del tiempo de la inducción magnética \vec{B} también es proporcional a la frecuencia ω . Por lo anterior el rotacional del campo eléctrico \vec{E} y la derivada parcial respecto del tiempo de la inducción magnética \vec{B} se escriben como

$$\nabla \times \vec{E}^{b,c} = \left(-ik_z E_y^{b,c}(x), 0, \frac{dE_y^{b,c}(x)}{dx} \right)^T \times \exp(ik_z z - i\omega t), \quad (6a)$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}^{b,c}}{\partial t} = ik\mu_{b,c} \left(H_x^{b,c}(x), 0, H_z^{b,c}(x) \right)^T \times \exp(ik_z z - i\omega t). \quad (6b)$$

Al igualar las Ecs. (6) se obtiene explícitamente la forma de las componentes x y z del campo magnético $\vec{H}^{b,c}(x)$ en los medios b y la placa c . En donde, la componente $H_x^{b,c}(x)$ del campo magnético en el medio b o en la capa c es proporcional a la componente $E_y^{b,c}(x)$ del campo eléctrico. Mientras que la componente $H_z^{b,c}(x)$ es proporcional a la derivada de la componente $E_y^{b,c}(x)$ respecto de x . Esto es

$$H_x^{b,c}(x) = \frac{-k_z}{k\mu_{b,c}} E_y^{b,c}(x), \quad (7a)$$

$$H_z^{b,c}(x) = \frac{1}{ik\mu_{b,c}} \frac{dE_y^{b,c}(x)}{dx}. \quad (7b)$$

De manera similar, a partir de la ley de Ampère-Maxwell (2b) se obtiene otra relación entre las componentes del campo magnético \vec{H} y la componente del campo eléctrico \vec{E} . La componente y del rotacional del campo magnético es igual a la derivada parcial respecto de z de la componente $H_x^{b,c}(x)$,

menos la parcial respecto de x de la componente $H_z^{b,c}(x)$. La derivada parcial del desplazamiento eléctrico respecto del tiempo es proporcional a la frecuencia ω debido a la dependencia armónica de los campos (5). Lo anterior se escribe como

$$\nabla \times \vec{H}^{b,c} = \left(0, ik_z H_x^{b,c}(x) - \frac{dH_z^{b,c}(x)}{dx}, 0 \right)^T \times \exp(ik_z z - i\omega t), \quad (8a)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}^{b,c}}{\partial t} = -ik \varepsilon_{b,c} \left(0, E_y^{b,c}(x), 0 \right)^T \times \exp(ik_z z - i\omega t). \quad (8b)$$

Igualando la componente y de las expresiones (8) y simplificando se llega a la ecuación

$$ik_z H_x^{b,c}(x) - \frac{dH_z^{b,c}(x)}{dx} = -ik \varepsilon_{b,c} E_y^{b,c}(x). \quad (9)$$

Luego, sustituyendo la forma explícita de las componentes $H_x^{b,c}(x)$ y $H_z^{b,c}(x)$ del campo magnético (7) en la igualdad (9) se obtiene la ecuación de onda para la componente $E_y^{b,c}(x)$ del campo eléctrico

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k_{b,c}^2 \right) E_y^{b,c}(x) = 0. \quad (10)$$

En donde, el número de onda k_c dentro de la capa c está dada por la Ec. (1b). El número de onda k_b en los medios b es imaginario y de la forma

$$k_b = i\kappa_b \quad \text{con} \quad \kappa_b = (k_z^2 - k^2 \mu_b \varepsilon_b)^{1/2} > 0, \quad (11)$$

observe que a partir de esta transformación κ_b es de valor real y positivo.

El campo eléctrico en las tres regiones del espacio debe cumplir con la ecuación de onda (10). Además, las componentes del campo magnético tienen la forma presentada en las Ecs. (7). Por tanto, es necesario conocer como se relacionan estos campos en las interfaces del sistema. Esta relación se deriva a partir de las condiciones de frontera (4) de las ecuaciones de Maxwell. Las condiciones de frontera de las ecuaciones de Maxwell (4) implican la continuidad de las componentes tangenciales a las interfaces del sistema de los campos eléctrico y magnético. Las componentes del campo eléctrico y magnético tangenciales a las interfaces son $E_y^{b,c}(x)$ y $H_z^{b,c}(x)$ respectivamente.

A partir de la ecuación de onda (10) y de la Ec. (7b) se obtienen las componentes $E_y^{b,c}(x)$ de los campos eléctricos y las componentes $H_z^{b,c}(x)$ de los campos magnéticos respectivamente. Las componentes tangenciales de los campos en las regiones a la izquierda de la capa, dentro de la capa c y a la derecha de la capa, tienen la forma siguiente

$$E_y^{bL}(x) = B_L^+ \exp(ik_b x) + B_L^- \exp(-ik_b x), \quad (12a)$$

$$H_z^{bL}(x) = \frac{k_b}{k \mu_b} \left[B_L^+ \exp(ik_b x) - B_L^- \exp(-ik_b x) \right], \quad (12b)$$

en el medio izquierdo b_L , donde $-\infty < x \leq 0$

$$E_y^c(x) = C^+ \exp(ik_c x) + C^- \exp(-ik_c x), \quad (12c)$$

$$H_z^c(x) = \frac{k_c}{k \mu_c} \left[C^+ \exp(ik_c x) - C^- \exp(-ik_c x) \right], \quad (12d)$$

en la capa c , donde $0 \leq x \leq d_c$

$$E_y^{bR}(x) = B_R^+ \exp(ik_b[x - d_c]) + B_R^- \exp(-ik_b[x - d_c]), \quad (12e)$$

$$H_z^{bR}(x) = \frac{k_b}{k \mu_b} \left[B_R^+ \exp(ik_b[x - d_c]) - B_R^- \exp(-ik_b[x - d_c]) \right], \quad (12f)$$

en el medio derecho b_R , donde $d_c \leq x < \infty$.

Debido a que el número de onda k_b es una cantidad imaginaria (11), la onda con amplitud B_L^+ decrece de izquierda a derecha, mientras que la onda con amplitud B_L^- decrece de derecha a izquierda. De manera similar, la onda con amplitud B_R^+ decrece hacia la derecha y la onda con amplitud B_R^- decrece hacia la izquierda.

Ahora bien, evaluando las componentes tangenciales $E_y^{b,c}(x)$ del campo eléctrico y $H_z^{b,c}(x)$ del campo magnético (12) en las interfaces ($b_L|c$) en $x = 0$, ($b_R|c$) en $x = d_c$ y aplicando las condiciones de frontera se obtienen las ecuaciones que relacionan las amplitudes de las ondas en las tres regiones del espacio dadas por

$$E_y^c(0) = E_y^{bL}(0) \rightarrow C^+ + C^- = B_L^+ + B_L^-, \quad (13a)$$

$$H_z^c(0) = H_z^{bL}(0) \rightarrow C^+ - C^- = \frac{\mu_c k_b}{\mu_b k_c} \left[B_L^+ - B_L^- \right], \quad (13b)$$

en la interfaz ($b_L|c$) donde $x = 0$,

$$E_y^{bR}(d_c) = E_y^c(d_c) \rightarrow B_R^+ + B_R^- = C^+ \exp(ik_c d_c) + C^- \exp(-ik_c d_c), \quad (13c)$$

$$H_z^{bR}(d_c) = H_z^c(d_c) \rightarrow B_R^+ - B_R^- = \frac{\mu_b k_c}{\mu_c k_b} \left[C^+ \exp(ik_c d_c) - C^- \exp(-ik_c d_c) \right], \quad (13d)$$

en la interfaz ($c|b_R$) donde $x = d_c$.

Las relaciones (13a) y (13b) corresponden a la interfaz ($b_L|c$) para el campo eléctrico y magnético respectivamente. Se reescriben en la forma de la matriz de transferencia siguiente

$$\begin{pmatrix} C^+ \\ C^- \end{pmatrix} = \hat{M}^{(bc)} \begin{pmatrix} B_L^+ \\ B_L^- \end{pmatrix}. \quad (14)$$

La matriz $\hat{M}^{(bc)}$ se llama matriz de transferencia. Esta matriz describe la transferencia de ondas a través de la interfaz $(b_L|c)$, específicamente desde el medio b_L hasta la capa c . Esta relación transforma la amplitud B_L^+ de la onda incidente y la amplitud de la onda reflejada B_L^- que están en la interfaz $(b_L|c)$ del lado izquierdo, en la amplitud incidente C^- y la amplitud de la onda reflejada C^+ del lado derecho de la interfaz $(b_L|c)$ como puede verse en la Fig. 1. La forma explícita de la matriz de transferencia $\hat{M}^{(bc)}$ es

$$\hat{M}^{(bc)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\mu_c k_b}{\mu_b k_c} & 1 - \frac{\mu_c k_b}{\mu_b k_c} \\ 1 - \frac{\mu_c k_b}{\mu_b k_c} & 1 + \frac{\mu_c k_b}{\mu_b k_c} \end{pmatrix},$$

$$\det \hat{M}^{(bc)} = \mu_c k_b / \mu_b k_c. \quad (15)$$

Las Ecs. (13c) y (13d) se reescriben en forma de la matriz de transferencia para la segunda interfaz de una forma más complicada

$$\begin{pmatrix} B_R^+ \\ B_R^- \end{pmatrix} = \hat{M}^{(cb)} \hat{M}^{(c)} \begin{pmatrix} C^+ \\ C^- \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Esta relación contiene las matrices de transferencia $\hat{M}^{(c)}$ y $\hat{M}^{(cb)}$. La matriz de transferencia $\hat{M}^{(c)}$ es responsable de la propagación libre de las ondas dentro de la capa c . Específicamente desde el lado derecho de la interfaz $(b_L|c)$ hasta el lado izquierdo de la interfaz $(c|b_R)$. Es una matriz diagonal. Los elementos diagonales de la matriz representan el desplazamiento de fase $k_c d_c$ que adquiere la onda al pasar por la capa c de espesor d_c .

$$\hat{M}^{(c)} = \begin{pmatrix} \exp(ik_c d_c) & 0 \\ 0 & \exp(-ik_c d_c) \end{pmatrix},$$

$$\det \hat{M}^{(c)} = M_{11}^{(c)} M_{22}^{(c)} - M_{12}^{(c)} M_{21}^{(c)} = 1. \quad (17)$$

Ya que su determinante $\det \hat{M}^{(c)}$ vale uno, la matriz $\hat{M}^{(c)}$ es unimodular. Luego, la matriz de transferencia $\hat{M}^{(cb)}$ tiene la forma siguiente

$$\hat{M}^{(cb)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\mu_b k_c}{\mu_c k_b} & 1 - \frac{\mu_b k_c}{\mu_c k_b} \\ 1 - \frac{\mu_b k_c}{\mu_c k_b} & 1 + \frac{\mu_b k_c}{\mu_c k_b} \end{pmatrix},$$

$$\det \hat{M}^{(cb)} = \mu_b k_c / \mu_c k_b. \quad (18)$$

La matriz $\hat{M}^{(cb)}$ describe la transferencia de las ondas a través de la interfaz $(c|b_R)$. Específicamente desde la capa c hasta el medio derecho b_R . La matriz $\hat{M}^{(cb)}$ tiene la misma estructura que la matriz $\hat{M}^{(bc)}$. Ambas matrices pueden obtenerse una a partir de la otra, mediante el remplazo de los índices $b \leftrightarrow c$. Además, son inversas una de la otra

$$\hat{M}^{(cb)} = \hat{M}^{(bc)^{-1}}. \quad (19)$$

Se sigue que, al sustituir la primera relación de transferencia (14) que corresponde a la interfaz $(b_L|c)$, en la segunda relación de transferencia (16) que pertenece a la interfaz $(c|b_R)$,

se obtiene la relación de transferencia total de una onda a través del sistema $(b_L|c|b_R)$.

$$\begin{pmatrix} B_R^+ \\ B_R^- \end{pmatrix} = \hat{M}^{(T)} \begin{pmatrix} B_L^+ \\ B_L^- \end{pmatrix}, \quad (20a)$$

$$\hat{M}^{(T)} = \hat{M}^{(cb)} \hat{M}^{(c)} \hat{M}^{(bc)}. \quad (20b)$$

Esta relación transforma las amplitudes de las ondas incidente B_L^+ y reflejada B_L^- del lado izquierdo de la interfaz $(b_L|c)$ en las amplitudes de las ondas incidente B_R^- y reflejada B_R^+ del lado derecho de la interfaz $(c|b_R)$. La matriz de transferencia total $\hat{M}^{(T)}$ (20b) es resultado del producto de tres matrices. Los elementos de la matriz $\hat{M}^{(T)}$ son

$$M_{11}^{(T)} = \cos(k_c d_c) + \alpha_+ \sin(k_c d_c), \quad (21a)$$

$$M_{12}^{(T)} = \alpha_- \sin(k_c d_c), \quad (21b)$$

$$M_{21}^{(T)} = -\alpha_- \sin(k_c d_c), \quad (21c)$$

$$M_{22}^{(T)} = \cos(k_c d_c) - \alpha_+ \sin(k_c d_c), \quad (21d)$$

en donde

$$\alpha_{\pm} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_b k_c}{\mu_c k_b} \mp \frac{\mu_c k_b}{\mu_b k_c} \right), \quad \alpha_-^2 - \alpha_+^2 = 1. \quad (22)$$

Como la matriz de transferencia total $\hat{M}^{(T)}$ proviene del producto de las matrices $\hat{M}^{(cb)}$, $\hat{M}^{(c)}$ y $\hat{M}^{(bc)}$ su determinante es igual a uno. Esto se ve directamente de que $\det \hat{M}^{(cb)} = 1/\det \hat{M}^{(bc)}$ y de que la matriz $\hat{M}^{(c)}$ es unimodular. Por tanto el producto de los tres determinantes es igual a uno

$$\det \hat{M}^{(T)} = \det \hat{M}^{(cb)} \det \hat{M}^{(c)} \det \hat{M}^{(bc)} = 1. \quad (23)$$

A partir de la relación de transferencia total (20) se escriben las ecuaciones que relacionan las amplitudes de las ondas externas a la capa c

$$B_R^+ = M_{11}^{(T)} B_L^+ + M_{12}^{(T)} B_L^-, \quad (24a)$$

$$B_R^- = M_{21}^{(T)} B_L^+ + M_{22}^{(T)} B_L^-. \quad (24b)$$

Para que existan ondas localizadas en la capa c debe cumplirse que las amplitudes de las ondas incidentes a las interfaces sean iguales a cero. Esto es $B_L^+ = 0$ y $B_R^- = 0$. Lo anterior se debe a que las ondas no deben propagarse en la dirección perpendicular a las interfaces y las ondas con amplitudes B_L^+ y B_R^- no tienden a cero conforme $x \rightarrow \mp \infty$ respectivamente.

De acuerdo con lo anterior, la Ec. (24a) toma la forma siguiente

$$B_R^+ = M_{12}^{(T)} B_L^-. \quad (25)$$

Esto significa que la amplitud de la onda B_R^+ en la interfaz derecha $(c|b_R)$ es directamente proporcional a la amplitud de la onda B_L^- en la interfaz izquierda $(b_L|c)$. Asimismo la

Ec. (24b) proporciona la condición para la existencia de ondas localizadas en la capa c con polarización s . Esta condición es

$$M_{22}^{(T)} = 0. \quad (26)$$

Escribiendo la forma explícita del elemento de matriz $M_{22}^{(T)}$ (21d) en la condición (26) se obtiene la relación de dispersión de las ondas localizadas con polarización s dentro de la capa c

$$\cot(k_c d_c) = \alpha_+, \quad (27)$$

con α_+ para polarización s dado en la Ec. (22).

La relación de dispersión (27) es una fórmula general que contiene 4 parámetros, μ_b , μ_c , κ_b , k_c y la dependencia de estos parámetros podría ser muy complicada. Por lo que resulta muy difícil de analizar. Sin embargo una restricción que debe recordarse es que el número de onda k_b (11) es imaginario con κ_b de valor positivo. El resto de los parámetros μ_b , μ_c y k_c pueden tener valores cualesquiera. Por simplicidad se considerará que las permeabilidades μ_b y μ_c son de valores reales y constantes. Se analizarán los casos cuando el número de onda k_c (1b) en la capa c es imaginario y real. Así como las condiciones necesarias para la existencia de la solución a la relación de dispersión (27) en los casos antes mencionados.

3.1. El número de onda k_c es imaginario

Primero se considera que el número de onda k_c es imaginario. Entonces k_c se reescribe como

$$k_c = i\kappa_c \quad \text{con} \quad \kappa_c = (k_z^2 - k^2 \varepsilon_c \mu_c)^{1/2} > 0. \quad (28)$$

Debido a esta transformación κ_c es de valor real y positivo. Como k_c es imaginario los factores α_{\pm} también se vuelven imaginarios. Los factores α_{\pm} se reescriben en la siguiente forma

$$\alpha_{\pm} = i\tilde{\alpha}_{\pm} \quad \text{con} \quad \tilde{\alpha}_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_b \kappa_c}{\mu_c \kappa_b} \pm \frac{\mu_c \kappa_b}{\mu_b \kappa_c} \right), \quad (29)$$

en donde es posible ver que $\tilde{\alpha}_{\pm}$ es una cantidad real.

Por todo lo anterior es evidente que el elemento de matriz $M_{12}^{(T)}$ (21b) así como la relación de dispersión (27) cambian. En la definición (21b) del elemento de matriz $M_{12}^{(T)}$ la función seno se transforma según la identidad $\sin(i\kappa_c d_c) = i \sinh(\kappa_c d_c)$. Mientras que en la relación de dispersión (27) la función cotangente se modifica de acuerdo con la identidad $\cot(i\kappa_c d_c) = -i \coth(\kappa_c d_c)$. Así, el elemento de matriz $M_{12}^{(T)}$ y la relación de dispersión cuando el número de onda k_c es imaginario en verdad son

$$M_{12}^{(T)} = -\tilde{\alpha}_- \sinh(\kappa_c d_c), \quad (30)$$

$$\coth(\kappa_c d_c) = -\tilde{\alpha}_+. \quad (31)$$

El lado izquierdo de la relación de dispersión (31) siempre es positivo ya que el argumento de la función cotangente hiperbólica es real y positivo. Entonces para que exista una solución a la ecuación de dispersión (31) es necesario que el

lado derecho sea positivo también. Esto implica que $\tilde{\alpha}_+$ debe ser negativo. Como κ_b y κ_c son positivos, para que $\tilde{\alpha}_+$ sea de valor negativo las permeabilidades μ_b y μ_c deben tener signos opuestos. Es decir, que alguna de las permeabilidades μ_b o μ_c tiene que ser negativa.

No obstante, este caso no se analizará en detalle porque se considerarán únicamente medios no magnéticos es decir que $\mu_b = \mu_c = 1$. Bajo esta suposición, la relación de dispersión (31) no tiene solución.

3.2. El número de onda k_c es real

Ahora se considera el caso cuando el número de onda k_c (1b) es real. Para simplificar un poco el análisis los medios b y la placa c se supondrán medios no magnéticos, es decir, $\mu_b = \mu_c = 1$. Los números de onda k_b (11) y k_c (1b) se reescriben como

$$k_b = i\kappa_b \quad \text{donde} \quad \kappa_b = (k_z^2 - k^2 \varepsilon_b)^{1/2}, \quad (32a)$$

$$k_c = (k^2 \varepsilon_c - k_z^2)^{1/2}. \quad (32b)$$

Como ya se mencionó κ_b y k_c (32) son de valores reales. Por tanto los términos dentro de la raíz de κ_b y k_c (32) son mayores o iguales a cero. Esto origina que el número de onda k_z esté restringido dentro del siguiente intervalo

$$k^2 \varepsilon_b < k_z^2 < k^2 \varepsilon_c. \quad (33)$$

Como puede verse en la Ec. (1b) debido a su definición k^2 es de valor real. Se considera que la permitividad ε_c es real y positiva para que k_z^2 sea de valor real.

Note que la parte izquierda de la desigualdad (33) se satisface automáticamente si la permitividad ε_b es negativa. En ese caso el número de onda k_b aún es imaginario,

$$k_b = i\kappa_b \quad \text{con} \\ \kappa_b = (k_z^2 + k^2 |\varepsilon_b|)^{1/2} \quad \text{si} \quad \varepsilon_b < 0. \quad (34)$$

Dado que κ_b y k_c son reales la relación de dispersión conserva la forma presentada en la Ec. (27). Nuevamente ocurre que tanto el lado izquierdo como el lado derecho de la relación de dispersión (27) pueden ser de signo positivo o negativo. Por lo que la ecuación de dispersión (27) con ε_b negativa puede tener solución. Sin embargo, este caso no se estudiará en detalle porque estamos interesados en que ε_b sea positiva.

Así que ahora se supone que la permitividad ε_b es positiva. De acuerdo con la desigualdad (33) se observa que la permitividad ε_b del medio b tiene que ser menor que la permitividad ε_c de la capa c ,

$$0 < \varepsilon_b < \varepsilon_c. \quad (35)$$

A partir de las definiciones (32) se demuestra que κ_b es una función monótonamente creciente respecto de k_z . Ocurre que κ_b crece desde cero hasta alcanzar su valor máximo

$k_b = k_c^{(\text{máx})}$ cuando $k_c = 0$. De manera similar, k_c decrece monótonamente respecto de k_z . Específicamente k_c decrece desde su valor máximo $k_c^{(\text{máx})}$, que ocurre cuando $k_b = 0$, hasta cero. Por tanto $k_c^{(\text{máx})}$ es el valor máximo posible de k_b y k_c ,

$$k_c^{(\text{máx})} = k\sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon_b}, \quad (36a)$$

$$k_c^2 + \kappa_b^2 = k^2(\varepsilon_c - \varepsilon_b), \quad (36b)$$

$$0 \leq \kappa_b \leq k_c^{(\text{máx})}, \quad 0 \leq k_c \leq k_c^{(\text{máx})}, \quad (36c)$$

$$\kappa_b = 0, \quad k_c = k_c^{(\text{máx})}, \quad \text{si } k_z = k\sqrt{\varepsilon_b}, \quad (36d)$$

$$\kappa_b = k_c^{(\text{máx})}, \quad k_c = 0, \quad \text{si } k_z = k\sqrt{\varepsilon_c}. \quad (36e)$$

Además si se sustituye la Ec. (36a) en (36c) se obtiene el intervalo correspondiente donde κ_b y k_c como funciones de k están restringidos

$$0 \leq \kappa_b(k) \leq k_z\sqrt{(\varepsilon_c - \varepsilon_b)/\varepsilon_c}, \quad (37a)$$

$$0 \leq k_c(k) \leq k_z\sqrt{(\varepsilon_c - \varepsilon_b)/\varepsilon_b}. \quad (37b)$$

Ahora que ha finalizado el análisis de los números de onda k_b y k_c (32) se prosigue con el análisis de la relación de dispersión.

En este caso el elemento de matriz $M_{12}^{(T)}$ y la ecuación de dispersión tienen la forma presentada en la Ecs. (21b) y (27) respectivamente. Tanto el elemento de matriz $M_{12}^{(T)}$ (21b) como la relación de dispersión (27) se reescriben a continuación con la forma explícita de los factores α_{\pm} (22) luego de considerar medios no magnéticos

$$M_{12}^{(T)} = \alpha_- \text{sen}(k_c d_c), \quad \alpha_- = \frac{1}{2} \left(\frac{k_c}{\kappa_b} + \frac{\kappa_b}{k_c} \right), \quad (38)$$

$$\cot(k_c d_c) = \alpha_+, \quad \alpha_+ = \frac{1}{2} \left(\frac{k_c}{\kappa_b} - \frac{\kappa_b}{k_c} \right). \quad (39)$$

Observe que el lado izquierdo de la relación de dispersión (39) puede ser de valor tanto positivo como negativo. Además no existe restricción sobre el signo de α_+ . Entonces, en principio la relación de dispersión (39) tiene solución.

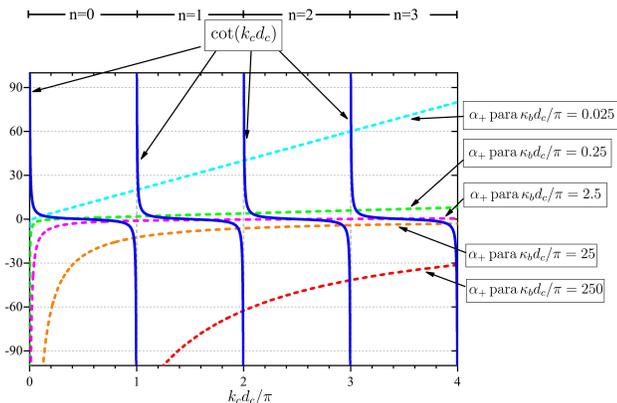


FIGURA 2. Solución gráfica de la relación de dispersión (39).

En la Fig. 2 se muestra la solución gráfica de la relación de dispersión (39) para diferentes valores de α_+ como función de $k_c d_c$. Las curvas en color azul corresponden a la función periódica $\cot(k_c d_c)$ del lado izquierdo de la ecuación de dispersión (39). Como el periodo de $\cot(k_c d_c)$ es igual a π se observan 4 curvas en la Fig. 2. Las curvas en colores cian, verde, magenta, naranja y rojo representan α_+ del lado derecho de la relación de dispersión (39). En estas curvas el término $\kappa_b d_c / \pi$ en α_+ se fijó en valores iguales a 0.025, 0.25, 2.5, 25 y 250 respectivamente. Las soluciones de la relación de dispersión (39) se encuentran en los puntos de intersección entre la curva que representa a α_+ y las curvas que representan a $\cot(k_c d_c)$. Cada curva para α_+ tiene un número infinito de intersecciones con las curvas de la función periódica $\cot(k_c d_c)$. De la Fig. 2 se sigue que la relación de dispersión (39) tiene un número infinito de soluciones porque hay un número infinito de intersecciones. No obstante, en la Fig. 2 solo se aprecian unas cuantas intersecciones.

Por otro lado, la relación de dispersión (39) puede presentarse también como

$$k_c d_c = \pi n + \text{arccot}(\alpha_+), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (40)$$

De esta manera es posible ver que la relación de dispersión en verdad tiene un número infinito de soluciones $k = k_n(k_z)$. Por tal motivo, existe un número infinito de ondas electromagnéticas localizadas dentro de la placa c . Para enumerar cada onda localizada se utilizará el entero n y a cada una de estas ondas se le llama modo electromagnético localizado o modo propio electromagnético localizado. Cada modo propio electromagnético localizado está descrito por su correspondiente curva de dispersión o curva espectral $k = k_n(k_z)$. Note que la forma (40) de la ecuación de dispersión contiene la función $\text{arccot}(\alpha_+)$ que por su definición es una función monótona que disminuye desde π hasta 0. Mientras que α_+ es una función que aumenta desde $-\infty$ hasta ∞ y que vale cero cuando $k_c = \kappa_b$,

$$-\infty < \alpha_+ = \frac{1}{2} \left(\frac{k_c}{\kappa_b} - \frac{\kappa_b}{k_c} \right) < \infty, \quad (41)$$

$$\alpha_+ = 0 \quad \text{si } k_c = \kappa_b.$$

Ahora que se ha considerado que las permitividades ε_b y ε_c son positivas (35) se puede reescribir la condición (33) con respecto de k . Por tanto de acuerdo con la desigualdad (33) el espectro $k = k_n(k_z)$ de las ondas localizadas con relación de dispersión (40) está dentro del intervalo

$$k = k_z / \sqrt{\varepsilon_c} \leq k = k_n(k_z) \leq k = k_z / \sqrt{\varepsilon_b}. \quad (42)$$

Esto significa que el espectro $k = k_n(k_z)$ de las ondas localizadas en la capa c se halla entre las líneas de luz $k = k_z / \sqrt{\varepsilon_c}$ y $k = k_z / \sqrt{\varepsilon_b}$.

Por otra parte, de la relación de dispersión (40) es posible ver que para cada n dado se halla una solución si $k_c d_c$ está dentro del intervalo

$$\pi n \leq k_c d_c \leq \pi(n + 1). \quad (43)$$

Esto proporciona una condición complementaria a la condición (42) para la n -ésima curva de dispersión una vez que se fija el valor del entero n . De esta condición se ve que la n -ésima curva espectral $k = k_n(k_z)$ está confinada dentro del intervalo

$$k = k_n^{(r)}(k_z) \leq k = k_n(k_z) \leq k = k_{n+1}^{(r)}(k_z). \quad (44)$$

En la expresión anterior $k_n^{(r)}(k_z)$ representa el borde izquierdo que delimita el intervalo en donde está confinada la n -ésima curva de dispersión,

$$k_n^{(r)}(k_z) = \sqrt{(\pi n/d_c)^2 + k_z^2} / \sqrt{\varepsilon_c}. \quad (45)$$

Mientras que $k_{n+1}^{(r)}(k_z)$ representa el borde derecho que delimita el intervalo (44). En concordancia con la definición (45) para $n = 0$ se tiene $k_0^{(r)}(k_z) = k_z / \sqrt{\varepsilon_c}$. Además, según la condición (44) debe existir un valor umbral a partir del que inicia la n -ésima curva de dispersión $k = k_n(k_z)$ cuando n toma valores diferentes de cero.

Por tanto se han obtenido dos condiciones independientes para el espectro $k = k_n(k_z)$ de las ondas localizadas con relación de dispersión (40) dadas por las Ecs. (42) y (44). La primera condición (42) indica que todas las curvas espectrales $k = k_n(k_z)$ están dentro de dos líneas de luz. La segunda (44) manifiesta que para cada n dado la curva $k = k_n(k_z)$ está dentro del intervalo delimitado por $k = k_n^{(r)}(k_z)$ (45) y su correspondiente $k = k_{n+1}^{(r)}(k_z)$.

En la Fig. 3 se muestra parte de las curvas espectrales $k = k_n(k_z)$ etiquetadas por el entero n que fueron obtenidas por solución numérica de la relación de dispersión (40). Cada espectro de la Fig. 3 pertenece a una onda diferente. Todas las curvas de dispersión $k = k_n(k_z)$ están entre las dos líneas de luz dadas por $k = k_0^{(r)}(k_z) = k_z / \sqrt{\varepsilon_c}$ y $k = k_z / \sqrt{\varepsilon_b}$ tal como lo indica la condición impuesta en (42). Las líneas de luz, $k = k_0^{(r)}(k_z) = k_z / \sqrt{\varepsilon_c}$ y $k = k_z / \sqrt{\varepsilon_b}$ son las rectas en color violeta y azul respectivamente.

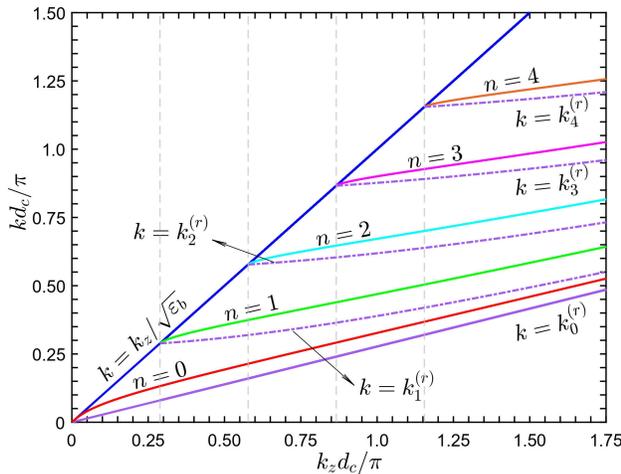


FIGURA 3. Espectro $k = k_n(k_z)$ de las ondas localizadas en la capa c con relación de dispersión (40). Se usó que $\varepsilon_b = 1$ y $\varepsilon_c = 13$.

Las curvas espectrales que se aprecian en la Fig. 3 corresponden a $k = k_0(k_z)$, $k = k_1(k_z)$, $k = k_2(k_z)$, $k = k_3(k_z)$ y $k = k_4(k_z)$ en colores rojo, verde, cian, magenta y naranja respectivamente. Se observa que todas las curvas espectrales comienzan a lo largo de la línea de luz $k = k_z / \sqrt{\varepsilon_b}$. La curva $k = k_0(k_z)$ inicia en el origen del sistema de coordenadas e incrementa a lo largo de la línea de luz $k = k_z / \sqrt{\varepsilon_b}$. Sin embargo, para las curvas espectrales con $n \neq 0$ se observa que existe un umbral. Estas curvas espectrales comienzan a partir del umbral justo sobre la línea de luz $k = k_z / \sqrt{\varepsilon_b}$ e incrementan conforme k_z aumenta pero se mantienen por debajo de la línea de luz. El umbral para cada curva $k = k_n(k_z)$ con $n \neq 0$ se muestra en línea punteada. El resto de las líneas violeta representan los bordes de los intervalos en donde $k = k_n(k_z)$ está confinada de acuerdo con la condición (44).

Las curvas de dispersión $k = k_n(k_z)$ mostradas en la Fig. 3 corresponden plenamente a las condiciones (42) y (44). Ya que como se observa en la Fig. 3 las curvas espectrales $k = k_n(k_z)$ están entre las líneas de luz $k = k_0^{(r)} = k_z / \sqrt{\varepsilon_c}$ y $k = k_z / \sqrt{\varepsilon_b}$. Adicionalmente, cada curva de dispersión $k = k_n(k_z)$ se encuentra entre las curvas $k = k_n^{(r)}(k_z)$ (45) y $k = k_{n+1}^{(r)}(k_z)$.

3.2.1. Asíntota del inicio del espectro

En el inicio del espectro k_c es cercano a su valor máximo $k_c^{(\text{máx})}$ (36a) y según la Ec. (36d) κ_b está cerca de su valor mínimo, es decir, κ_b es pequeño. Luego, κ_b es mucho menor que k_c entonces de acuerdo con el análisis hecho anteriormente el factor α_+ es positivo, tiende a infinito y se puede aproximar como

$$\alpha_+ \approx k_c / 2\kappa_b \quad \text{si} \quad \kappa_b / k_c \ll 1. \quad (46)$$

Debido a lo anterior, basta considerar solo el primer término de la representación en serie de la función arcocotangente, a saber, $\text{arccot}(k_c d_c) \approx 1/\alpha_+$. Gracias a esto la relación de dispersión (40) se presenta como

$$k_c d_c \approx \pi n + 2 \frac{\kappa_b}{k_c}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (47)$$

Como κ_b es pequeño, el segundo término de la ecuación anterior es menor que πn . Por lo que es posible sustituir k_c por su valor máximo $k_c^{(\text{máx})}$ dado en la Ec. (36a) y obtener la siguiente expresión

$$k \approx \frac{\pi n}{d_c \sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon_b}} + \frac{2\kappa_b}{(\varepsilon_c - \varepsilon_b) k d_c}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (48)$$

Esta ecuación muestra como depende k de κ_b . No obstante, también tiene dependencia de n por eso es necesario considerar esta dependencia cuando $n = 0$ y cuando $n \neq 0$ por separado. Ya que $n = 0$ es una curva especial, para este caso en la parte derecha de la Ec. (48) solo se tiene el segundo término y por ende ya solo existe dependencia del parámetro κ_b .

3.2.2. Modo cero, $n = 0$

Se denomina modo cero al modo electromagnético localizado con $n = 0$. Evidentemente $k = k_0(k_z)$ es la curva de dispersión del modo cero. En esta situación de acuerdo con la Ec. (48) en el inicio de esta curva de dispersión es válida la expresión

$$(kd_c)^2 \approx \frac{2}{(\varepsilon_c - \varepsilon_b)} \kappa_b d_c. \quad (49)$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad (49) y sustituyendo la definición (32a) de κ_b se obtiene la ecuación

$$(kd_c)^2 \approx \frac{(k_z d_c)^2}{\varepsilon_b} - \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2}{4\varepsilon_b} (kd_c)^4. \quad (50)$$

La solución en la primera aproximación de esta ecuación es $kd_c \approx k_z d_c / \sqrt{\varepsilon_b}$, que al ser usada en el término de cuarto orden en kd_c se llega a la asíntota

$$k = k_0(k_z) \approx \frac{k_z}{\sqrt{\varepsilon_b}} \left\{ 1 - \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2}{8\varepsilon_b^2} (k_z d_c)^2 \right\}$$

si $\frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2}{4\varepsilon_b^2} (k_z d_c)^2 \ll 1. \quad (51)$

De acuerdo con la Fig. 3 se ve que la curva de dispersión $k = k_0(k_z)$ del modo cero está bien descrita por la asíntota (51). En particular cuando esta curva espectral inicia se encuentra muy cerca de la línea de luz $k = k_z / \sqrt{\varepsilon_b}$ y conforme $k_z d_c$ aumenta se aleja lentamente de la línea de luz permaneciendo por debajo de ella y siguiendo la asíntota (51).

3.2.3. Umbral de las curvas espectrales con $n \neq 0$

Existe un valor umbral a partir del que inicia la n -ésima curva de dispersión $k = k_n(k_z)$ para los casos con $n \neq 0$. A partir de la Ec. (48) se tiene que el segundo término del lado derecho es pequeño en comparación con el primero, por eso se puede considerar como una pequeña perturbación. Después, al sustituir la primera aproximación $k \approx \pi n / (d_c \sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon_b})$ en el segundo término del lado derecho se llega a la ecuación

$$k \approx \frac{\pi n}{d_c \sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon_b}} + \frac{2}{\pi n \sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon_b}} (k_z^2 - k^2 \varepsilon_b)^{1/2},$$

$n = 1, 2, 3, \dots \quad (52)$

De acuerdo con esta ecuación se aprecia que el umbral de la n -ésima curva de dispersión se obtiene de escribir $k = k_z / \sqrt{\varepsilon_b}$ para luego encontrar el valor explícito de k ,

$$k - k_n^{(cr)} \approx \frac{2}{\pi n \sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon_b}} \sqrt{k_z^2 - (k_n^{(cr)})^2},$$

$n = 1, 2, 3, \dots, \quad (53)$

donde los valores $k_z^{(cr)}$ y $k_n^{(cr)}$ del umbral de la n -ésima curva espectral son

$$k_z^{(cr)} = k_n^{(cr)} \sqrt{\varepsilon_b} = \frac{\pi n}{d_c} \sqrt{\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_c - \varepsilon_b}},$$

$$k_n^{(cr)} = \frac{\pi n}{d_c \sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon_b}} = \frac{k_z^{(cr)}}{\sqrt{\varepsilon_b}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (54)$$

Es posible ver que el umbral en verdad es un punto de intersección entre la línea de luz $k = k_z / \sqrt{\varepsilon_b}$ y el borde izquierdo $k = k_n^{(r)}(k_z)$ del intervalo (44) donde está confinada la n -ésima curva espectral. Este umbral se encuentra en la línea de luz $k = k_z / \sqrt{\varepsilon_b}$ como se observa en la Fig. 3. Además el valor del umbral obtenido mediante solución numérica de la relación de dispersión (39) coincide con el valor deducido en la expresión (54).

3.2.4. La mitad del espectro en donde $\alpha_+ = 0$

Ahora bien, como se mencionó anteriormente el factor α_+ aumenta de $-\infty$ a ∞ entonces la *media* de los valores posibles de α_+ corresponde al caso donde $\alpha_+ = 0$. De acuerdo con la Ec. (41) $\alpha_+ = 0$ si $k_c = \kappa_b$, de la Ec. (36b) se deriva que

$$k_c = \kappa_b = k \sqrt{(\varepsilon_c - \varepsilon_b)/2}. \quad (55)$$

A partir de la definición (32a) de κ_b , o bien de la definición (32b) de k_c se llega a la expresión

$$k_z = k \sqrt{(\varepsilon_b + \varepsilon_c)/2}. \quad (56)$$

Luego, gracias a la relación de dispersión (40) y debido que $\alpha_+ = 0$ la función $\text{arccot}(\alpha_+) = \pi/2$, se tiene

$$k_c d_c = \pi(n + 1/2). \quad (57)$$

Sustituyendo el valor de k_c de la expresión (55) en la ecuación anterior y usando la igualdad (56) se obtienen los valores de k_z y k de la mitad del espectro

$$k_z = \frac{\pi(n + 1/2)}{d_c} \sqrt{\frac{\varepsilon_c + \varepsilon_b}{\varepsilon_c - \varepsilon_b}},$$

$$k = \frac{\pi(n + 1/2)}{d_c} \sqrt{\frac{2}{\varepsilon_c - \varepsilon_b}}. \quad (58)$$

Los valores (58) satisfacen la condición $\alpha_+ = 0$ que de acuerdo con nuestro análisis corresponde a la media de los valores posibles para el parámetro α_+ , por lo que cuando k_z y k toman los valores de la expresión (58) nos encontramos en la *mitad* de la n -ésima curva espectral.

3.2.5. Asíntota del espectro para $1 \ll \kappa_b d_c$

Por otra parte, analicemos el caso cuando $1 \ll \kappa_b d_c$. Este caso es contrario al caso cerca del inicio del espectro. Entonces esta vez k_c es mucho menor que κ_b . Por lo que de acuerdo con el análisis hecho el factor α_+ tiende a menos infinito y se puede aproximar como

$$\alpha_+ \approx -\kappa_b / 2k_c \quad \text{si} \quad k_c / \kappa_b \ll 1. \quad (59)$$

Debido que $\alpha_+ < -1$ es suficiente usar la representación en serie de la función $\text{arccot}(\alpha_+)$ hasta el primer término en el que aparece α_+ , es decir $\text{arccot}(\alpha_+) \approx \pi + 1/\alpha_+$. Entonces, la relación de dispersión (40) se presenta como

$$k_c d_c \approx \pi(n+1) - 2 \frac{k_c}{\kappa_b}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (60)$$

Gracias a que $k_c \ll \kappa_b$ se puede despreciar el término cuadrático de k_c en la Ec. (36b) y por ende κ_b tiende a su valor máximo $k_c^{(\text{máx})}$. Luego como $k_c \ll \kappa_b$ y a su vez $\kappa_b \leq k_c^{(\text{máx})}$ (36c) el segundo término del lado derecho de la Ec. (60) se puede ver como una perturbación pequeña. Entonces al sustituir la solución de la primera aproximación, a saber $k_c \approx \pi(n+1)/d_c$, en el segundo término del lado derecho de la Ec. (60) se llega a la expresión

$$k_c \approx \frac{\pi(n+1)}{d_c} \left(1 - \frac{2}{k d_c \sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon_b}} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (61)$$

Al elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación anterior y según la definición (32b) de k_c se obtiene la ecuación

$$k \sqrt{\varepsilon_c} \approx \left\{ \left(\frac{\pi(n+1)}{d_c} \right)^2 \left(1 - \frac{2}{k d_c \sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon_b}} \right)^2 + k_z^2 \right\}^{1/2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (62)$$

A partir de la Ec. (62) se encuentra la asíntota deseada

$$k \approx k_{n+1}^{(r)}(k_z) \left\{ 1 - \frac{4 [\pi(n+1)/d_c]^2}{\varepsilon_c d_c [k_{n+1}^{(r)}(k_z)]^3 \sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon_b}} \right\}^{1/2},$$

si $\left(\frac{2}{\varepsilon_c k d_c \sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon_b}} \right)^2 \ll 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (63)$

La asíntota (63) muestra que a medida que aumenta $k_z d_c$ el segundo término dentro de las llaves del lado derecho tiende a cero y entonces la curva espectral tiende al borde derecho $k = k_{n+1}^{(r)}(k_z)$ del intervalo (44) donde está confinada la n -ésima curva espectral. Es posible apreciar este comportamiento en la Fig. 3 dado que conforme aumenta $k_z d_c$ las curvas de dispersión mostradas tienden por debajo al borde derecho $k = k_{n+1}^{(r)}(k_z)$.

Además, gracias a la Fig. 3 es posible ver que la n -ésima curva de dispersión $k = k_n(k_z)$ inicia en el borde izquierdo $k = k_n^{(r)}(k_z)$ y a medida que aumenta $k_z d_c$ se encuentra por encima de este borde. Pero por otro lado se mantiene por debajo del borde derecho $k = k_{n+1}^{(r)}(k_z)$ en perfecta concordancia con lo predicho teóricamente por el intervalo (44).

Finalmente es posible probar que las tres curvas que limitan a la n -ésima curva de dispersión, es decir, $k = k_z/\sqrt{\varepsilon_c}$, $k = k_n^{(r)}(k_z)$ y $k = k_{n+1}^{(r)}(k_z)$ se aproximan una a la otra cuando $k_z \rightarrow \infty$.

3.2.6. Simetría de los modos propios localizados

Ahora bien, analicemos la distribución del campo eléctrico $E_y(x)$ de los modos propios localizados. Las amplitudes de onda C^+ , C^- y B_R^+ se escriben en términos de la amplitud B_L^- gracias a que las amplitudes B_L^+ y B_R^- son nulas. Lo anterior se logra usando las relaciones de transferencia (14) y (24), la Ec. (25) y la relación de dispersión (26). Debido a esto la distribución (12) del campo eléctrico $E_y(x)$ se reescribe como

$$E_y^{b_L}(x) = B_L^- \exp(\kappa_b x), \quad (64a)$$

en el medio izquierdo b_L , donde $-\infty < x \leq 0$;

$$E_y^c(x) = B_L^- \left\{ \cos(k_c x) + \frac{\kappa_b}{k_c} \sin(k_c x) \right\}, \quad (64b)$$

en la capa c , donde $0 \leq x \leq d_c$,

$$E_y^{b_R}(x) = B_L^- M_{12}^{(T)} \exp(-\kappa_b [x - d_c]), \quad (64c)$$

en el medio derecho b_R , donde $d_c \leq x < \infty$.

Como se puede apreciar en la interfaz izquierda ($b_L|c$) donde $x = 0$ las Ecs. (64a) y (64b) son iguales. Además, ocurre que $M_{12}^{(T)}$ es igual al término entre llaves de la Ec. (64b) cuando $x = d_c$,

$$M_{12}^{(T)} \equiv \alpha_- \sin(k_c d_c) = \cos(k_c d_c) + \frac{\kappa_b}{k_c} \sin(k_c d_c). \quad (65)$$

Para probar esto debe sumarse y restarse el término $(\kappa_b/2k_c) \sin(k_c d_c)$ en la definición (38) de $M_{12}^{(T)}$. Después sustituyendo la definición de α_- , desarrollando y reagrupando se obtiene el término $\alpha_+ \sin(k_c d_c)$. Gracias a la relación de dispersión (39) es posible reemplazar el término $\alpha_+ \sin(k_c d_c)$ por $\cos(k_c d_c)$ y llegar al resultado (65). De lo anterior se ve que en la interfaz derecha ($c|b_R$) donde $x = d_c$ las Ecs. (64b) y (64c) son iguales. Entonces es claro que las Ecs. (64) automáticamente cumplen las condiciones de frontera.

Por otro lado, para completar la descripción de la distribución del campo eléctrico $E_y(x)$ es muy importante conocer la forma que adquiere el elemento de matriz $M_{12}^{(T)}$ (38) para los n modos propios localizados. En verdad, $M_{12}^{(T)}$ (38) es igual a la unidad si n es par y a menos la unidad si n es impar,

$$M_{12}^{(T)} = \alpha_- \sin(\pi n + \text{arccot}[\alpha_+]) = (-1)^n. \quad (66)$$

Para demostrar esto se sustituye la ecuación de dispersión (40) en el argumento de la función seno de la definición (38) del elemento de matriz $M_{12}^{(T)}$. Luego se desarrolla la función seno de la suma que aparece en el argumento. Es preciso notar que al desarrollar la función seno de la suma se obtiene un término $\cos(\pi n)$ que es igual a $(-1)^n$. Después, se usan las relaciones entre funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas. Finalmente, aplicando la relación

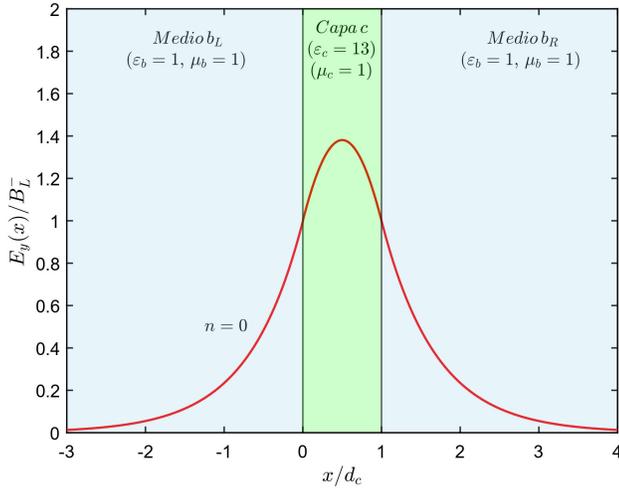


FIGURA 4. Distribución del campo eléctrico $E_y(x)/B_L^-$ (64) del modo propio localizado $n = 0$. Se usó que $k_z d_c/\pi = 0.5$ y $k d_c/\pi = 0.1931$.

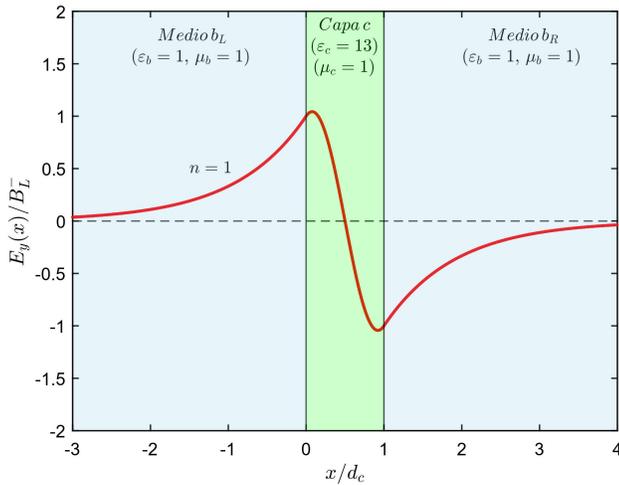


FIGURA 5. Distribución del campo eléctrico $E_y(x)/B_L^-$ (64) del modo propio localizado $n = 1$. Se usó que $k_z d_c/\pi = 0.5$ y $k d_c/\pi = 0.3564$.

$\alpha_-^2 - \alpha_+^2 = 1$ para factores α_{\pm} , se obtiene que el elemento de matriz $M_{12}^{(T)}$ es igual a $(-1)^n$.

Como consecuencia de la Ec. (66) el campo eléctrico de la onda en las interfaces derecha ($c|b_R$) e izquierda ($b_L|c$) tiene valores iguales siempre que n sea par. En contraste, cuando n es impar el campo eléctrico en las interfaces tiene la misma magnitud, pero signo opuesto. Por lo que, la distribución (64) del campo eléctrico $E_y(x)$ es simétrica para n par o bien antisimétrica cuando n es impar. De manera que los modos propios con n par son simétricos y los modos propios con n impar son antisimétricos con respecto del campo eléctrico.

A continuación en las Figs. 4 y 5 se muestra la forma de dos modos propios localizados dentro de la capa c , uno simétrico y uno antisimétrico. Se escogió el valor de $k_z d_c/\pi = 0.5$. De acuerdo con la Fig. 3 para $k_z d_c/\pi = 0.5$ existen dos modos propios localizados, a saber, $n = 0$ y

$n = 1$. A $n = 0$ le corresponde $k d_c/\pi = 0.1931$. Para $n = 1$ le compete el valor $k d_c/\pi = 0.3564$.

En la Fig. 4 se muestra la distribución de campo eléctrico $E_y(x)/B_L^-$ (64) del modo propio localizado $n = 0$. Debido a que n es par, $M_{12}^{(T)} = 1$ en la Ec. (64c). Como se observa en la Fig. 4 la distribución $E_y(x)/B_L^-$ (64) es máxima en el centro de la capa c , disminuye en las interfaces ($b_L|c$) y ($c|b_R$) hasta decaer en los medios izquierdo b_L y derecho b_R . De modo que la distribución $E_y(x)/B_L^-$ (64) es simétrica. En las Ecs. (64) se consideró B_L^- positivo.

De la Fig. 4 se ve que la primera derivada de la distribución (64) del campo eléctrico $E_y(x)/B_L^-$ es continua en las interfaces izquierda ($b_L|c$) y derecha ($c|b_R$). Por tanto, de acuerdo con la Ec. (7b) la componente tangencial $H_z(x)$ del campo magnético también es continua en las interfaces. Esto gracias a que el factor que multiplica a la primera derivada del campo eléctrico $E_y(x)/B_L^-$ tiene el mismo valor en el medio b y en la capa c porque los medios son no magnéticos $\mu_b = \mu_c = 1$. Es interesante notar que, por la misma razón, la componente normal $H_x(x)$ (7a) del campo magnético que es proporcional al campo eléctrico $E_y(x)$ también es continua en las interfaces.

En la Fig. 5 se graficó la distribución de campo eléctrico $E_y(x)/B_L^-$ (64) del modo propio localizado $n = 1$. Dado que n es impar, $M_{12}^{(T)} = -1$ en la Ec. (64c). Como se observa en la Fig. 5 la distribución $E_y(x)/B_L^-$ (64) es antisimétrica, tal que disminuye desde su valor máximo cerca de la interfaz ($b_L|c$), se anula en el centro de la capa c y toma su valor mínimo cerca de la interfaz ($c|b_R$). Como se ve las amplitudes de $E_y(x)/B_L^-$ en las interfaces, izquierda ($b_L|c$) y derecha ($c|b_R$), tienen la misma magnitud. Además en los medios izquierdo b_L y derecho b_R el campo $E_y(x)/B_L^-$ (64) decrece hasta anularse conforme se aleja de la capa c . Se consideró B_L^- positivo en las expresiones (64).

De manera análoga al modo propio simétrico con respecto al campo eléctrico, de la Fig. 5 se observa que la primera derivada de la distribución (64) del campo eléctrico $E_y(x)/B_L^-$ es continua en las interfaces izquierda ($b_L|c$) y derecha ($c|b_R$). Por tanto, como ya se mencionó, las componentes $H_x(x)$ y $H_z(x)$ (7) del campo magnético son continuas en las interfaces.

Como complemento a las Figs. 4 y 5, se muestra la dinámica temporal de la parte real del campo eléctrico $\vec{E}(x, z, t)$ descrito por las Ecs. (5a) y (64) evaluadas a diferentes valores del tiempo t de los modos propios simétrico $n = 0$ y antisimétrico $n = 1$, respectivamente. Los paneles (a) de las figuras corresponden al tiempo $t = 0$. Los paneles (b) se obtuvieron con el tiempo $t = T/4$, donde $T = 2\pi/\omega$ es el periodo de la onda electromagnética. El campo eléctrico en los paneles (c) se realiza para el tiempo $t = T/2$. El panel (d) corresponde al tiempo $t = 3T/4$. Cuando se completa el periodo en $t = T$ la parte real del campo eléctrico $\vec{E}(x, z, t)$ coincide nuevamente con la mostrada en los paneles (a). Como se ve en las Figs. 6 y 7 el campo eléctrico $\vec{E}(x, z, t)$ se

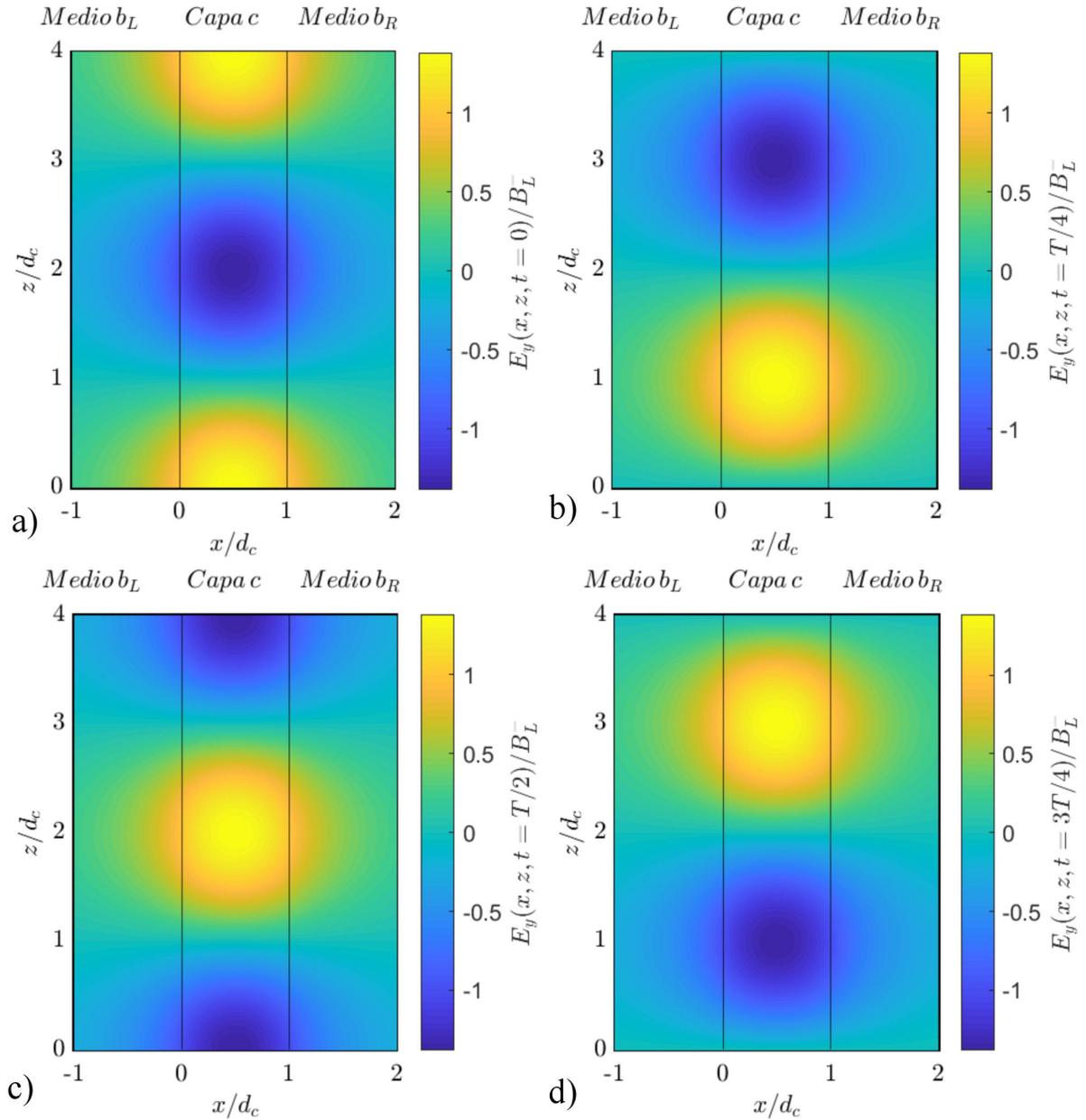


FIGURA 6. Parte real del campo eléctrico $\vec{E}(x, z, t)$ (5a), (64) del modo propio localizado $n = 0$: a) corresponde al tiempo $t = 0$, b) $t = T/4$, c) $t = T/2$, d) $t = 3T/4$. Se usó que $k_z d_c / \pi = 0.5$ y $k d_c / \pi = 0.1931$.

propaga oscilando dentro de la capa c y decae en los medios izquierdo b_L y derecho b_R .

Finalmente, analicemos brevemente la simetría del campo magnético de los modos propios localizados de polarización s . De acuerdo con la relación (7a), la componente magnética $H_x(x)$ transversal a las interfaces, es proporcional a la única componente eléctrica $E_y(x)$ dada por la distribución (64). En consecuencia, sus simetrías coinciden: para números propios n pares, tanto $E_y(x)$ como $H_x(x)$ resultan ser simétricos en función de la coordenada x , mientras que para n impares son antisimétricos. Por el contrario, la componente magnética $H_z(x)$ longitudinal a las interfaces y proporcionada por la Ec. (7b), está directamente asociada con

la primera derivada de $E_y(x)$. Por lo tanto, la simetría de la componente magnética $H_z(x)$ debe ser opuesta a la simetría del campo eléctrico $E_y(x)$: el campo simétrico $E_y(x)$ da lugar al campo antisimétrico $H_z(x)$ para n pares y viceversa para números propios n impares.

4. Polarización p

Ahora se considera un campo electromagnético monocromático de frecuencia ω cuando su componente eléctrica \vec{E} resulta estar en el plano de propagación (x, z) , mientras que su componente magnética \vec{H} está orientada en la dirección normal a este plano. Esta es la geometría de polarización p o

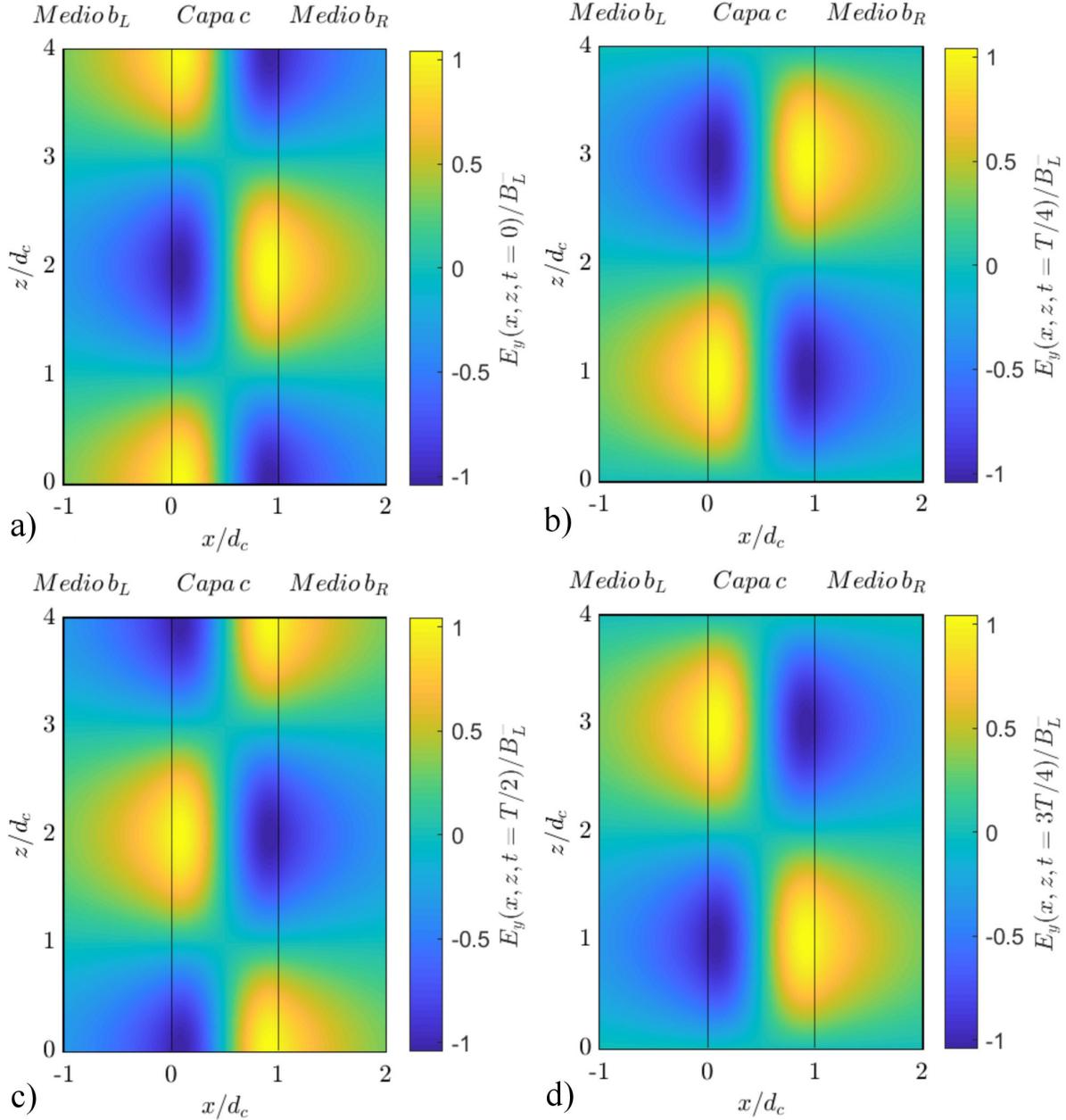


FIGURA 7. Parte real del campo eléctrico $\vec{E}(x, z, t)$ (5a), (64) del modo propio localizado $n = 1$: a) corresponde al tiempo $t = 0$, b) $t = T/4$, c) $t = T/2$, d) $t = 3T/4$. Se usó que $k_z d_c / \pi = 0.5$ y $k d_c / \pi = 0.3564$.

bien polarización TM (Transversa Magnética). En polarización p, el campo eléctrico \vec{E} tiene dos componentes, una que es paralela al eje x y la otra se dirige a lo largo del eje z . Por el contrario, el campo magnético \vec{H} solo tiene componente y . Los campos eléctrico y magnético se presentan como una onda plana que se propaga en la dirección positiva del eje z ,

$$\vec{E}(x, z, t) = \left(E_x(x), 0, E_z(x) \right)^T \exp(ik_z z - i\omega t), \quad (67a)$$

$$\vec{H}(x, z, t) = \left(0, H_y(x), 0 \right)^T \exp(ik_z z - i\omega t). \quad (67b)$$

La capa c divide el espacio en tres regiones. La primera está a la izquierda de la capa c en el medio b_L que ocupa el intervalo

lo $-\infty < x \leq 0$. La segunda región es la capa c que está en $0 \leq x \leq d_c$. La tercera región está a la derecha de la capa c en el medio b_R ocupando el intervalo $d_c \leq x < \infty$. En cada una de las regiones el campo electromagnético obedece las ecuaciones de Maxwell (2) para un medio dieléctrico sin densidades de carga ni de corriente eléctrica.

Para denotar a los medios b se usarán los subíndices L , para el medio b_L a la izquierda de la capa, y R para el medio b_R a la derecha de la capa. Si no es necesario especificar de qué medio b_R o b_L se habla, entonces se usará b indistintamente.

A partir de la ley de Ampère-Maxwell (2b) se obtiene la relación entre las componentes $E_x(x)$ y $E_z(x)$ del campo eléctrico (67a) con la componente $H_y(x)$ del campo magnético (67b). Al efectuar el cálculo del rotacional del campo magnético se ve que tiene componentes en x y z . La componente x es directamente proporcional a la componente $H_y(x)$ del campo magnético (67b). La componente z es directamente proporcional a la derivada de la componente $H_y(x)$ del campo magnético (67b) respecto de x .

Por otro lado, la derivada parcial respecto del tiempo del desplazamiento eléctrico es proporcional a la frecuencia ω , ya que los campos \vec{E} y \vec{H} dependen del tiempo de manera armónica (67). Por lo anterior se tiene

$$\nabla \times \vec{H}^{b,c} = \left(-ik_z H_y^{b,c}(x), 0, \frac{dH_y^{b,c}(x)}{dx} \right)^T \times \exp(ik_z z - i\omega t), \quad (68a)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}^{b,c}}{\partial t} = -ik \varepsilon_{b,c} \left(E_x^{b,c}(x), 0, E_z^{b,c}(x) \right)^T \times \exp(ik_z z - i\omega t). \quad (68b)$$

Igualando las Ecs. (68a) y (68b) se obtienen las componentes $E_x(x)$ y $E_z(x)$ del campo eléctrico (67a) en términos de la componente $H_y(x)$ del campo magnético (67b).

$$E_x^{b,c}(x) = \frac{k_z}{k \varepsilon_{b,c}} H_y^{b,c}(x), \quad (69a)$$

$$E_z^{b,c}(x) = -\frac{1}{ik \varepsilon_{b,c}} \frac{dH_y^{b,c}(x)}{dx}. \quad (69b)$$

Por otra parte, según la ley de Faraday (2a) el rotacional del campo eléctrico es igual a menos la derivada parcial respecto del tiempo de la inducción magnética dividida entre la velocidad de la luz c . Debido a la dependencia armónica en el tiempo de los campos \vec{E} y \vec{H} (67), la derivada parcial respecto de t es proporcional a la frecuencia ω . Mientras tanto, el rotacional del campo eléctrico es proporcional a las derivadas parciales del campo eléctrico \vec{E} respecto de z y x . Por consiguiente, el rotacional del campo eléctrico y la derivada parcial de la inducción magnética respecto del tiempo son

$$\nabla \times \vec{E}^{b,c} = \left(0, ik_z E_x^{b,c}(x) - \frac{dE_z^{b,c}(x)}{dx}, 0 \right)^T \times \exp(ik_z z - i\omega t), \quad (70a)$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}^{b,c}}{\partial t} = ik \mu_{b,c} \left(0, H_y^{b,c}(x), 0 \right)^T \times \exp(ik_z z - i\omega t). \quad (70b)$$

Luego entonces, igualando las Ecs. (70a) y (70b) se obtiene la ecuación

$$ik_z E_x^{b,c}(x) - \frac{dE_z^{b,c}(x)}{dx} = ik \mu_{b,c} H_y^{b,c}(x). \quad (71)$$

Sustituyendo la forma explícita de las componentes $E_x^{b,c}(x)$ y $E_z^{b,c}(x)$ (69) del campo eléctrico se llega a la ecuación de onda para la componente $H_y^{b,c}(x)$ del campo magnético que tiene la forma

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k_{b,c}^2 \right) H_y^{b,c}(x) = 0. \quad (72)$$

En donde k_c está dado por la Ec. (1b). Mientras que en los medios b el número de onda k_b es imaginario y tiene la forma

$$k_b = i\kappa_b \quad \text{donde} \quad \kappa_b = (k_z^2 - k^2 \mu_b \varepsilon_b)^{1/2} > 0, \quad (73)$$

note que κ_b es una cantidad real y positiva.

Ahora bien, las condiciones de frontera (4) de las ecuaciones de Maxwell implican la continuidad de las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético. Esto gracias a que no existen densidades de corriente ni de carga en las interfaces. Debido a lo anterior es necesario conocer la forma de las componentes tangenciales a las interfaces. A saber, las componentes $H_y^{b,c}(x)$ de los campos magnéticos y $E_z^{b,c}(x)$ de los campos eléctricos. A partir de la ecuación de onda (72) y de la Ec. (69b) las componentes tangenciales de los campos en las regiones a la izquierda de la capa, en el medio b_L , en la capa c y a la derecha de la capa en el medio b_R son

$$H_y^{b_L}(x) = B_L^+ \exp(ik_b x) + B_L^- \exp(-ik_b x), \quad (74a)$$

$$E_z^{b_L}(x) = -\frac{k_b}{k \varepsilon_b} \left[B_L^+ \exp(ik_b x) - B_L^- \exp(-ik_b x) \right], \quad (74b)$$

en el medio izquierdo b_L , donde $-\infty < x \leq 0$;

$$H_y^c(x) = C^+ \exp(ik_c x) + C^- \exp(-ik_c x), \quad (74c)$$

$$E_z^c(x) = -\frac{k_c}{k \varepsilon_c} \left[C^+ \exp(ik_c x) - C^- \exp(-ik_c x) \right], \quad (74d)$$

en la capa c , donde $0 \leq x \leq d_c$;

$$H_y^{b_R}(x) = B_R^+ \exp(ik_b[x - d_c]) + B_R^- \exp(-ik_b[x - d_c]), \quad (74e)$$

$$E_z^{b_R}(x) = -\frac{k_b}{k \varepsilon_b} \left[B_R^+ \exp(ik_b[x - d_c]) - B_R^- \exp(-ik_b[x - d_c]) \right], \quad (74f)$$

en el medio derecho b_R , donde $d_c \leq x < \infty$.

Dado que el número de onda k_b (73) es una cantidad puramente imaginaria, la onda con amplitud B_L^+ decrece de izquierda a derecha. Mientras que la onda con amplitud B_L^- decrece de derecha a izquierda. De manera similar a las ondas en el medio b_L , la onda reflejada con amplitud B_R^+ decrece a la derecha y la onda incidente con amplitud B_R^- decrece a la izquierda. La onda con amplitud C^+ se propaga de izquierda

a derecha dentro de la capa c y la onda con amplitud C^- se propaga de derecha a izquierda dentro de la capa c .

Las componentes tangenciales de los campos eléctricos y magnéticos deben ser continuas en las interfaces entre los medios b y la capa c . Esto implica evaluar las Ecs. (74) en $x = 0$ y $x = d_c$. Al evaluar las componentes tangenciales de los campos magnéticos y eléctricos en las interfaces $(b_L|c)$, $(c|b_R)$ y aplicando la condición de continuidad, se obtienen las siguientes ecuaciones

$$H_y^c(0) = H_y^{b_L}(0) \rightarrow C^+ + C^- = B_L^+ + B_L^-, \quad (75a)$$

$$\begin{aligned} E_z^c(0) &= E_z^{b_L}(0) \rightarrow C^+ - C^- \\ &= \frac{\varepsilon_c k_b}{\varepsilon_b k_c} [B_L^+ - B_L^-] \end{aligned} \quad (75b)$$

en la interfaz $(b_L|c)$ en donde $x = 0$;

$$\begin{aligned} H_y^{b_R}(d_c) &= H_y^c(d_c) \rightarrow \\ B_R^+ + B_R^- &= C^+ \exp(ik_c d_c) + C^- \exp(-ik_c d_c), \end{aligned} \quad (75c)$$

$$E_z^{b_R}(d_c) = E_z^c(d_c) \rightarrow$$

$$\begin{aligned} B_R^+ - B_R^- &= \frac{\varepsilon_b k_c}{\varepsilon_c k_b} [C^+ \exp(ik_c d_c) \\ &- C^- \exp(-ik_c d_c)], \end{aligned} \quad (75d)$$

en la interfaz $(c|b_R)$ en donde $x = d_c$.

Las relaciones (75a) y (75b) corresponden a la continuidad de las componentes tangenciales de los campos en la interfaz $(b_L|c)$. Relacionan las amplitudes en el medio b_L con las amplitudes dentro de la capa c y se pueden escribir en la forma de la matriz de transferencia mediante

$$\begin{pmatrix} C^+ \\ C^- \end{pmatrix} = \hat{M}^{(bc)} \begin{pmatrix} B_L^+ \\ B_L^- \end{pmatrix}. \quad (76)$$

La matriz $\hat{M}^{(bc)}$ describe la transferencia de ondas en la interfaz $(b_L|c)$. Específicamente desde el medio b_L hasta la capa c , transforma las amplitudes de las ondas incidente y reflejada B_L^+ y B_L^- que están del lado izquierdo de la interfaz $(b_L|c)$ en las amplitudes de onda C^+ y C^- que están del lado derecho de la interfaz $(b_L|c)$ dentro de la capa c . La matriz de transferencia $\hat{M}^{(bc)}$ es

$$\hat{M}^{(bc)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\varepsilon_c k_b}{\varepsilon_b k_c} & 1 - \frac{\varepsilon_c k_b}{\varepsilon_b k_c} \\ 1 - \frac{\varepsilon_c k_b}{\varepsilon_b k_c} & 1 + \frac{\varepsilon_c k_b}{\varepsilon_b k_c} \end{pmatrix},$$

$$\det \hat{M}^{(bc)} = \varepsilon_c k_b / \varepsilon_b k_c. \quad (77)$$

En cambio, las Ecs. (75c) y (75d) corresponden a la continuidad de las componentes tangenciales de los campos en la interfaz $(c|b_R)$. Reescritas en la forma de la matriz de transferencia tienen una forma más complicada. Esta relación se escribe mediante el producto de dos matrices y es

$$\begin{pmatrix} B_R^+ \\ B_R^- \end{pmatrix} = \hat{M}^{(cb)} \hat{M}^{(c)} \begin{pmatrix} C^+ \\ C^- \end{pmatrix}. \quad (78)$$

La matriz de transferencia $\hat{M}^{(c)}$ es responsable de la propagación libre de las ondas dentro de la capa c . Específicamente desde el lado izquierdo de la interfaz $(b_L|c)$ hasta el lado derecho de la interfaz $(c|b_R)$. Es una matriz diagonal y unimodular. Los elementos de la diagonal representan el desplazamiento de fase $k_c d_c$ que adquiere la onda al pasar por la capa c . La matriz $\hat{M}^{(c)}$ es unimodular y tiene la forma siguiente

$$\hat{M}^{(c)} = \begin{pmatrix} \exp(ik_c d_c) & 0 \\ 0 & \exp(-ik_c d_c) \end{pmatrix},$$

$$\det \hat{M}^{(c)} = M_{11}^{(c)} M_{22}^{(c)} - M_{12}^{(c)} M_{21}^{(c)} = 1. \quad (79)$$

En la Ec. (78) la matriz de transferencia $\hat{M}^{(cb)}$ describe la transferencia de las ondas a través de la interfaz $(c|b_R)$, específicamente desde la capa c hasta el medio derecho b_R . La matriz $\hat{M}^{(cb)}$ tiene la misma estructura que la matriz de transferencia $\hat{M}^{(bc)}$. Ambas matrices pueden obtenerse una a partir de la otra mediante el reemplazo de los índices $b \leftrightarrow c$. También las matrices $\hat{M}^{(bc)}$ y $\hat{M}^{(cb)}$ son matrices inversas una de la otra.

$$\hat{M}^{(cb)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\varepsilon_b k_c}{\varepsilon_c k_b} & 1 - \frac{\varepsilon_b k_c}{\varepsilon_c k_b} \\ 1 - \frac{\varepsilon_b k_c}{\varepsilon_c k_b} & 1 + \frac{\varepsilon_b k_c}{\varepsilon_c k_b} \end{pmatrix},$$

$$\det \hat{M}^{(cb)} = \varepsilon_b k_c / \varepsilon_c k_b. \quad (80)$$

Al sustituir la relación de transferencia (76) de la interfaz $(b_L|c)$ en la relación de transferencia (78) de la interfaz $(c|b_R)$ se obtiene la relación de transferencia total de una onda a través del arreglo $(b_L|c|b_R)$ dada por

$$\begin{pmatrix} B_R^+ \\ B_R^- \end{pmatrix} = \hat{M}^{(T)} \begin{pmatrix} B_L^+ \\ B_L^- \end{pmatrix}, \quad (81a)$$

$$\hat{M}^{(T)} = \hat{M}^{(cb)} \hat{M}^{(c)} \hat{M}^{(bc)}, \quad (81b)$$

con las matrices $\hat{M}^{(bc)}$, $\hat{M}^{(c)}$ y $\hat{M}^{(cb)}$ dadas por las ecuaciones (77), (79) y (80) respectivamente. La relación de transferencia (81a) transforma las amplitudes de las ondas incidente y reflejada B_L^+ y B_L^- , que están en el medio b_L , en las amplitudes de onda incidente y reflejada B_R^- y B_R^+ , que están en el medio b_R , pasando a través de la capa c . La matriz de transferencia total $\hat{M}^{(T)}$ se calcula efectuando el producto de las tres matrices como lo indica la Ec. (81b). De manera que los elementos de la matriz $\hat{M}^{(T)}$ son

$$M_{11}^{(T)} = \cos(k_c d_c) + \alpha_+ \sin(k_c d_c), \quad (82a)$$

$$M_{12}^{(T)} = \alpha_- \sin(k_c d_c), \quad (82b)$$

$$M_{21}^{(T)} = -\alpha_- \sin(k_c d_c), \quad (82c)$$

$$M_{22}^{(T)} = \cos(k_c d_c) - \alpha_+ \sin(k_c d_c), \quad (82d)$$

en donde

$$\alpha_{\pm} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_b k_c}{\varepsilon_c \kappa_b} \mp \frac{\varepsilon_c \kappa_b}{\varepsilon_b k_c} \right), \quad \alpha_-^2 - \alpha_+^2 = 1. \quad (83)$$

Puesto que los medios a la izquierda y a la derecha de la capa c son iguales, la matriz de transferencia total $\hat{M}^{(T)}$ es unimodular.

$$\det \hat{M}^{(T)} = \det \hat{M}^{(cb)} \det \hat{M}^{(c)} \det \hat{M}^{(bc)} = 1. \quad (84)$$

A partir de las relaciones de la matriz de transferencia $\hat{M}^{(T)}$, las amplitudes de las ondas del lado derecho de la capa c están relacionadas con las amplitudes de las ondas del lado izquierdo de la capa c mediante las siguientes ecuaciones

$$B_R^+ = M_{11}^{(T)} B_L^+ + M_{12}^{(T)} B_L^-, \quad (85a)$$

$$B_R^- = M_{21}^{(T)} B_L^+ + M_{22}^{(T)} B_L^-. \quad (85b)$$

Para que existan ondas localizadas dentro de la capa c , debe cumplirse que la onda incidente del lado izquierdo de la interfaz ($b_L|c$) y la onda incidente del lado derecho de la interfaz ($c|b_R$) sean iguales a cero. Esto es $B_L^+ = 0$ y $B_R^- = 0$. Ya que las ondas no deben propagarse en la dirección perpendicular a las interfaces y las ondas con amplitudes B_L^+ y B_R^- no tienden a cero conforme $x \rightarrow \mp \infty$ respectivamente. Por lo anterior, la Ec. (85a) que conecta las amplitudes de las ondas en las interfaces adquiere la forma

$$B_R^+ = M_{12}^{(T)} B_L^-. \quad (86)$$

Además, a partir de (85b) se tiene que la condición para que existan ondas localizadas en la capa c es

$$M_{22}^{(T)} = 0, \quad (87)$$

que da la relación de dispersión de las ondas. Note que las ecuaciones (86) y (87) para polarización p coinciden con las ecuaciones (25) y (26) para polarización s . Por tanto es importante concluir que (86) y (87) son ecuaciones generales para la existencia de ondas electromagnéticas localizadas en la capa c , es decir que estas condiciones son generales porque no dependen de la polarización. Sin embargo, para cada polarización s o p , los factores α_{\pm} que se encuentran en la definición de los elementos de matriz $M_{12}^{(T)}$ y $M_{22}^{(T)}$ tienen una forma particular.

De la condición general (87) se obtiene la relación de dispersión de las ondas localizadas dentro de la capa c , para polarización p la ecuación de dispersión es

$$\cot(k_c d_c) = \alpha_+, \quad (88)$$

con α_+ dado en la Ec. (83).

La relación de dispersión (88) es una fórmula general que contiene 4 parámetros ε_b , ε_c , κ_b y k_c . La dependencia de estos parámetros puede ser muy complicada. Luego entonces, resulta muy difícil de analizar. Sin embargo, cabe resaltar que

para que existan modos localizados dentro de la capa c el número de onda k_b tiene que ser imaginario (73) mientras que el número de onda k_c puede ser tanto real como imaginario.

A continuación se analizarán los casos cuando k_c es imaginario y cuando es real. En contraste con el caso de polarización s , estudiado anteriormente, se verá que la relación de dispersión (88) puede tener solución para ambos casos. Además, las permitividades del medio b y de la capa c pueden ser tanto positivas como negativas.

Por simplicidad, de aquí en adelante se considerará que los medios b y c son no magnéticos, o bien $\mu_b = \mu_c = 1$. Esto para simplificar un poco el análisis de la relación de dispersión (88) limitando el número de parámetros disponibles para variar. De esta manera los parámetros que variarán son los valores de las permitividades ε_b del medio b y ε_c de la capa c .

4.1. Capa c con permitividad ε_c negativa

En este caso se considera que las permitividades eléctricas del medio b y la capa c son de valores reales y constantes. La permitividad ε_b del medio b se considera positiva y la permitividad ε_c de la capa c se considera negativa. Por lo que el número de onda k_c en la capa c es imaginario, entonces k_b (73) y k_c (1b) para el medio b y la placa c son

$$k_b = i\kappa_b, \quad \kappa_b = (k_z^2 - k^2 \varepsilon_b)^{1/2} > 0, \quad k \leq k_z / \sqrt{\varepsilon_b}; \quad (89)$$

$$k_c = i\kappa_c, \quad \kappa_c = (k_z^2 + k^2 |\varepsilon_c|)^{1/2} > 0. \quad (90)$$

Mientras que los factores α_{\pm} (83) son

$$\alpha_{\pm} = -i\tilde{\alpha}_{\pm}, \quad \tilde{\alpha}_{\pm} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_b \kappa_c}{|\varepsilon_c| \kappa_b} \pm \frac{|\varepsilon_c| \kappa_b}{\varepsilon_b \kappa_c} \right). \quad (91)$$

Por lo anterior, es posible reescribir el elemento de matriz $M_{12}^{(T)}$ (82b), que conecta a las amplitudes B_L^- y B_R^+ en la ecuación (86), y la relación de dispersión (88) como

$$M_{12}^{(T)} = \tilde{\alpha}_- \sinh(\kappa_c d_c), \quad (92)$$

$$\coth(\kappa_c d_c) = \tilde{\alpha}_+. \quad (93)$$

Note que el lado izquierdo de la relación de dispersión (93) es positivo para cualesquiera valores de κ_c y d_c , de igual forma el término $\tilde{\alpha}_+$ del lado derecho es positivo ya que los 4 parámetros que contiene ε_b , $|\varepsilon_c|$, κ_b y κ_c son positivos. Por lo que, en principio puede existir una solución a la ecuación de dispersión (93).

Por otra parte, las amplitudes C^+ , C^- y B_R^+ se expresan en términos de la amplitud B_L^- a partir de las relaciones de transferencia (76) y (81), la expresión (86) y la relación de dispersión (87). De lo anterior, la distribución (74) del campo magnético $H_y(x)$ es

$$H_y^{bL}(x) = B_L^- \exp(\kappa_b x), \quad (94a)$$

en el medio izquierdo b_L , donde $-\infty < x \leq 0$;

$$H_y^c(x) = B_L^- \left\{ \cosh(\kappa_c x) - \frac{|\varepsilon_c| \kappa_b}{\varepsilon_b \kappa_c} \sinh(\kappa_c x) \right\}, \quad (94b)$$

en la capa c , donde $0 \leq x \leq d_c$;

$$H_y^{bR}(x) = B_L^- M_{12}^{(T)} \exp(-\kappa_b[x - d_c]), \quad (94c)$$

en el medio derecho b_R , donde $d_c \leq x < \infty$.

Como es posible ver en la interfaz izquierda ($b_L|c$) cuando $x = 0$ las Ecs. (94a) y (94b) son iguales. En la misma manera gracias a la definición (92) y a la relación de dispersión (93) es muy simple mostrar que el término entre llaves de la Ec. (94b) es igual a $M_{12}^{(T)}$ cuando $x = d_c$,

$$M_{12}^{(T)} = \cosh(\kappa_c d_c) - \frac{|\varepsilon_c| \kappa_b}{\varepsilon_b \kappa_c} \sinh(\kappa_c d_c). \quad (95)$$

Esto se prueba a partir de expresar el coseno hiperbólico y el seno hiperbólico de acuerdo con su definición en términos de la función exponencial y después se sustituye la relación de dispersión (93). De lo anterior es posible ver que automáticamente se cumple la condición de frontera para el campo magnético en la interfaz derecha ($c|b_R$) en donde $x = d_c$. Por tanto, las Ecs. (94) como debe ser cumplen las condiciones de frontera.

Ahora bien, la definición de la función cotangente hiperbólica en términos de la función exponencial transforma la única relación de dispersión (93) en dos relaciones de dispersión diferentes

$$\exp(-\kappa_c d_c) = \pm \frac{\kappa_c d_c - \eta}{\kappa_c d_c + \eta}, \quad (96)$$

donde aparece un parámetro nuevo η que se define como

$$\eta \equiv \frac{|\varepsilon_c|}{\varepsilon_b} \kappa_b d_c. \quad (97)$$

Por consiguiente, tenemos dos relaciones de dispersión que significan dos ondas diferentes para cada relación de dispersión.

Adicionalmente, las relaciones de dispersión (96) se pueden presentar en otra forma equivalente

$$\pm(\kappa_c d_c + \eta)^2 \exp(-\kappa_c d_c) = (\kappa_c d_c)^2 - \eta^2. \quad (98)$$

Esta forma es útil para algunos cálculos posteriores. También usando las definiciones (89), (90) y (97) el lado derecho de la Ec. (98) se expresa como

$$(\kappa_c d_c)^2 - \eta^2 = \frac{|\varepsilon_c|}{\varepsilon_b} (\varepsilon_b + |\varepsilon_c|) \left\{ (k d_c)^2 - \frac{(k_z d_c)^2}{\varepsilon_{red}} \right\}. \quad (99)$$

Aquí surge una nueva característica de gran importancia ε_{red} que llamamos *permitividad eléctrica reducida* que se define por

$$\varepsilon_{red} = \frac{\varepsilon_b |\varepsilon_c|}{|\varepsilon_c| - \varepsilon_b}. \quad (100)$$

Es relevante que la permitividad ε_{red} puede ser positiva o negativa. Si el valor absoluto de la permitividad ε_c es mayor que la permitividad ε_b , entonces ε_{red} será positiva, de lo contrario será negativa. Por esto, para cada onda debemos considerar dos casos cuando ε_{red} sea positiva o negativa, ya que, estas dos ondas tienen espectros diferentes dependientes del signo de ε_{red} .

4.1.1. Onda simétrica con respecto al campo magnético

Primero se considera la onda con relación de dispersión

$$\exp(-\kappa_c d_c) = \frac{\kappa_c d_c - \eta}{\kappa_c d_c + \eta}. \quad (101)$$

En este caso el elemento de matriz $M_{12}^{(T)}$ es igual a la unidad. Para demostrar esto, de acuerdo con su definición expresamos la función seno hiperbólico en la igualdad (92) en términos de la función exponencial. Después se sustituye la relación de dispersión (101) y se obtiene el resultado antes mencionado

$$M_{12}^{(T)} = \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_b \kappa_c}{|\varepsilon_c| \kappa_b} - \frac{|\varepsilon_c| \kappa_b}{\varepsilon_b \kappa_c} \right) \times \left(\frac{\kappa_c d_c + \eta}{\kappa_c d_c - \eta} - \frac{\kappa_c d_c - \eta}{\kappa_c d_c + \eta} \right) = 1. \quad (102)$$

Como consecuencia de la Ec. (102), el campo magnético de la onda en las interfaces izquierda ($b_L|c$) y derecha ($c|b_R$) tiene valores iguales. Esto significa que la distribución (94) del campo magnético $H_y(x)$ es simétrica con respecto del campo magnético. En este caso, suponiendo que B_L^- es positivo, dentro de la capa c la distribución de campo magnético $H_y(x)$ decae hacia el centro de capa c y es máxima en las interfaces izquierda ($b_L|c$) y derecha ($c|b_R$) como se observa en la Fig. 8.

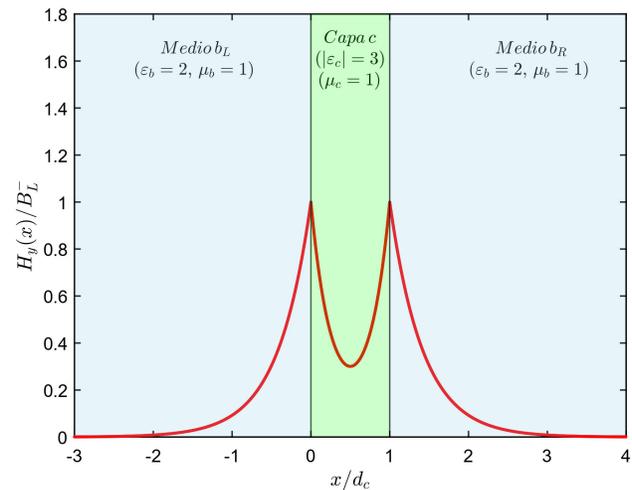


FIGURA 8. Distribución del campo magnético $H_y(x)/B_L^-$ (94) de la onda simétrica con respecto al campo magnético. Se usó que $\varepsilon_b = 2$ y $|\varepsilon_c| = 3$.

A partir de la Fig. 8 se observa que la primera derivada de la distribución (94) del campo magnético $H_y(x)$ es discontinua en las interfaces izquierda ($b_L|c$) y derecha ($c|b_R$). Esto podría ocasionar que la componente tangencial $E_z(x)$ (69b) del campo eléctrico fuese discontinua también, contradiciendo así las condiciones de frontera generales (4). Sin embargo, la componente $E_z(x)$ (69b) del campo eléctrico es continua en las interfaces ($b_L|c$) y ($c|b_R$). Lo anterior se debe al factor que multiplica a la primera derivada del campo magnético $H_y(x)$ en la Ec. (69b). Como las permitividades del medio b y la capa c son de valores diferentes el factor que multiplica a la derivada del campo magnético $H_y(x)$ en la ecuación (69b) es diferente en el medio b y en la capa c . En verdad, ocurre que este factor compensa exactamente el valor de la discontinuidad de las derivadas del campo magnético $H_y^{bL}(x)$ a la izquierda de la capa, $H_y^c(x)$ en la capa y $H_y^{bR}(x)$ a la derecha de la capa en las interfaces ($b_L|c$) y ($c|b_R$). Sin embargo, por la misma razón, la componente normal $E_x(x)$ (69a) del campo eléctrico que es proporcional al campo magnético $H_y(x)$ tiene una discontinuidad de salto en las interfaces.

Además, como la distribución (94) del campo magnético $H_y(x)$ es simétrica su primera derivada con respecto de x es antisimétrica. Por tanto, la componente longitudinal $E_z(x)$ (69b) del campo eléctrico es antisimétrica. Por el contrario, la componente transversal $E_x(x)$ (69a) del campo eléctrico y el campo magnético $H_y(x)$ son proporcionales. En consecuencia, sus simetrías coinciden.

Debido a que la derivada de la función exponencial respecto de $\kappa_c d_c$ es negativa, el lado izquierdo de la relación de dispersión (101) decrece a medida que aumenta $\kappa_c d_c$. Mientras que, la derivada del lado derecho de la relación de dispersión (101) es positiva y la función aumenta conforme aumenta $\kappa_c d_c$. Por tanto existe un punto de intersección entre ambas curvas y por ende una solución. Más aún, la solución siempre existe para cualquier valor positivo del parámetro η , o bien, $0 \leq \eta < \infty$. La Fig. 9 presenta la solución gráfica de la relación de dispersión (101). La curva azul es la función $\exp(-\kappa_c d_c)$ y la curva roja corresponde a la función del lado

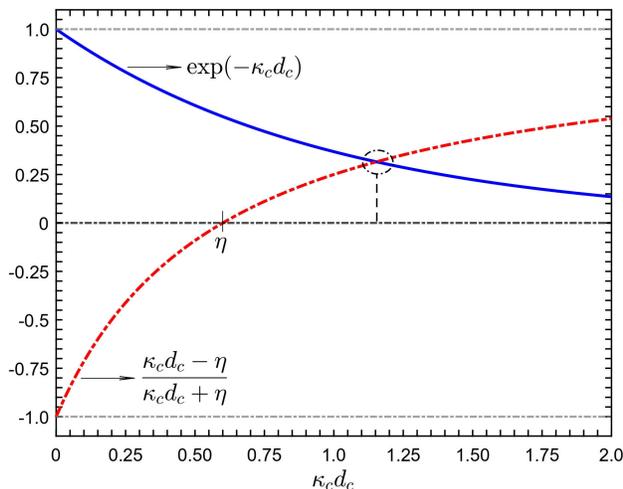


FIGURA 9. Solución gráfica de la relación de dispersión (101).

derecho de (101). La solución de la ecuación de dispersión (101) está en el punto de intersección de ambas curvas.

Ahora bien, el lado izquierdo de la relación de dispersión (101) es positivo para cualesquiera valores de κ_c y d_c . Por lo tanto, para que exista un solución de la relación de dispersión (101) el lado derecho tiene que ser positivo. De lo anterior se deduce que la condición necesaria para la existencia de la solución de la relación de dispersión (101) es

$$\eta < \kappa_c d_c \Rightarrow \eta^2 < (\kappa_c d_c)^2 \Rightarrow k_z^2 / \varepsilon_{\text{red}} < k^2. \quad (103)$$

Como es posible ver, esta condición depende del signo de la permitividad eléctrica reducida ε_{red} . Por esto como se menciono anteriormente debemos considerar dos casos cuando ε_{red} sea positiva y negativa por separado.

4.1.2. Permitividad eléctrica reducida ε_{red} negativa

Primero analicemos el caso cuando el valor absoluto de la permitividad ε_c es menor que la permitividad ε_b , y por tanto la permitividad eléctrica reducida ε_{red} es negativa.

$$\varepsilon_c < 0 < |\varepsilon_c| < \varepsilon_b \Rightarrow \varepsilon_{\text{red}} < 0. \quad (104)$$

Como puede verse, la condición necesaria (103) para la existencia de la solución de la relación de dispersión (101) se satisface automáticamente porque el lado izquierdo siempre es negativo y el lado derecho siempre es positivo. Gracias a esto, la solución $k = k_s(k_z)$ de la relación de dispersión (101) como función de k_z solo tiene la restricción impuesta por la Ec. (89), es decir que estará dentro del intervalo

$$0 \leq k = k_s(k_z) \leq k = k_z / \sqrt{\varepsilon_b}. \quad (105)$$

En la Fig. 10 se presenta el espectro de la onda simétrica $k = k_s(k_z)$ obtenido por solución numérica de la relación de dispersión (101). Como se predijo anteriormente el espectro está dentro del intervalo de la Ec. (105).

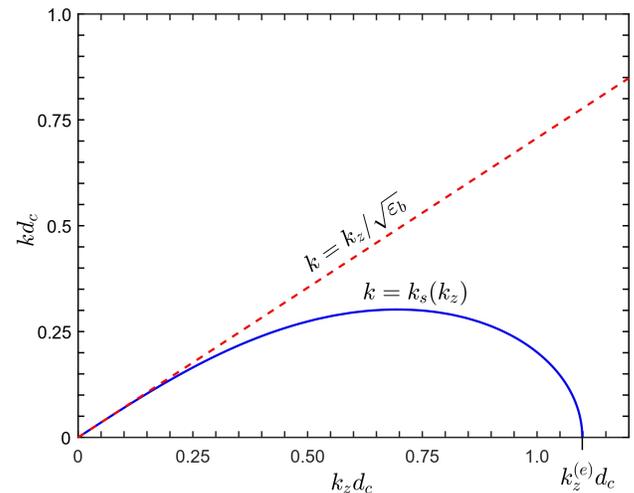


FIGURA 10. Espectro $k = k_s(k_z)$ de la ecuación de dispersión (101) para el caso de ε_{red} (104) negativa. Se usó que $\varepsilon_b = 2$, $|\varepsilon_c| = 1$.

4.1.3. Inicio y fin del espectro

Cuando se considera $k = 0$, los números de onda κ_b (89) y κ_c (90) son iguales, a saber, $\kappa_b = \kappa_c = k_z$. Por lo que la relación de dispersión (101) se reescribe como

$$k_z (1 + |\varepsilon_c|/\varepsilon_b) \exp(-k_z d_c) = k_z (1 - |\varepsilon_c|/\varepsilon_b). \quad (106)$$

Es evidente que la Ec. (106) tiene dos soluciones. La primera es la solución trivial

$$k_z = k = 0. \quad (107)$$

El punto (107) corresponde con el inicio de la curva espectral como se observa en la Fig. 10. La segunda solución, en donde $k_z \neq 0$, es

$$0 < k_z^{(e)} d_c = \ln \left(\frac{1 + |\varepsilon_c|/\varepsilon_b}{1 - |\varepsilon_c|/\varepsilon_b} \right), \quad k^{(e)} d_c = 0. \quad (108)$$

Como se puede apreciar la expresión (108) indica que este punto está a la derecha del inicio del espectro. Es posible observar este punto en la Fig. 10 como el final del espectro. Además, el valor del punto final del espectro obtenido mediante el cálculo numérico coincide con el valor predicho por la expresión (108).

4.1.4. Asíntota de la solución cerca del inicio del espectro

Veamos ahora como se comporta la solución cerca del inicio del espectro, o bien, cuando $k_z d_c$ es pequeño. A partir de las definiciones (89), (90) se infiere que los parámetros $\kappa_b d_c$, $\kappa_c d_c$ también son pequeños y por consiguiente η (97) es pequeño,

$$\begin{aligned} k_z d_c \ll 1 &\Rightarrow k d_c \ll 1, & \kappa_b d_c \ll 1, \\ \kappa_c d_c \ll 1, & & \eta \ll 1. \end{aligned} \quad (109)$$

Entonces, es suficiente desarrollar la relación de dispersión (101) hasta segundo orden de los parámetros pequeños $\kappa_c d_c$ y η . De esta manera se llega a la igualdad

$$\eta \approx (\kappa_c d_c)^2 / 2. \quad (110)$$

Luego, de acuerdo con las definiciones de los parámetros κ_b (89), κ_c (90) y η (97) la expresión (110) se reformula como

$$\kappa_b d_c \approx \frac{\varepsilon_b + |\varepsilon_c|}{|\varepsilon_c|} \cdot \frac{(k_z d_c)^2}{2} - \frac{(\kappa_b d_c)^2}{2}. \quad (111)$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad (111) y agrupando los términos semejantes, se llega a la equivalencia

$$k \approx \frac{k_z}{\sqrt{\varepsilon_b}} \left\{ 1 - \frac{1}{4} \left[\frac{\varepsilon_b + |\varepsilon_c|}{|\varepsilon_c|} k_z d_c - \frac{(\kappa_b d_c)^2}{k_z d_c} \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (112)$$

Puesto que se trabaja hasta segundo orden de los parámetros pequeños (109) se puede despreciar el segundo término dentro de los corchetes de la expresión (112). Como resultado se deduce que la asíntota del espectro cerca del inicio es

$$\begin{aligned} k &\approx \frac{k_z}{\sqrt{\varepsilon_b}} \left\{ 1 - \frac{(\varepsilon_b + |\varepsilon_c|)^2}{8|\varepsilon_c|^2} (k_z d_c)^2 \right\} \\ \text{si } &\frac{(\varepsilon_b + |\varepsilon_c|)^2}{4|\varepsilon_c|^2} (k_z d_c)^2 \ll 1. \end{aligned} \quad (113)$$

Observe que esta asíntota es congruente con el intervalo (105) que confina la solución. De acuerdo con la Fig. 10 se aprecia que el comportamiento del espectro $k = k_s(k_z)$ se describe bien con la asíntota (113). Específicamente cerca del inicio del espectro la solución está muy cerca de la línea de luz $k = k_z/\sqrt{\varepsilon_b}$ y a medida que $k_z d_c$ aumenta se aleja de la línea de luz manteniéndose por debajo de ella tal como lo indica la expresión (113) de la asíntota cerca del inicio del espectro.

4.1.5. Asíntota del espectro cerca de su fin

En la Fig. 10 se observa que el espectro tiene su fin en los valores (108), $k = k^{(e)} = 0$ y $k_z = k_z^{(e)}$. Analicemos la solución $k = k_s(k_z)$ cerca del fin del espectro, es decir, cuando $k_z d_c$ se aproxima al punto final (108) del espectro. Siendo esto, la diferencia entre los parámetros $k_z^{(e)} d_c$ y $k_z d_c$ es pequeña, y por consiguiente $k d_c$ es pequeño también,

$$0 < (k_z^{(e)} - k_z) d_c \ll 1 \Rightarrow k d_c \ll 1. \quad (114)$$

En consecuencia de la condición (114) los parámetros κ_b (89), κ_c (90) y η (97) se reescriben como

$$\begin{aligned} \kappa_b &\approx k_z \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k^2}{k_z^2} \varepsilon_b \right), & \kappa_c &\approx k_z \left(1 + \frac{1}{2} \frac{k^2}{k_z^2} |\varepsilon_c| \right), \\ \eta &\approx \frac{|\varepsilon_c|}{\varepsilon_b} k_z d_c \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k^2}{k_z^2} \varepsilon_b \right). \end{aligned} \quad (115)$$

Sustituyendo la forma de los parámetros (115) en la relación de dispersión (101) se consigue la expresión

$$\begin{aligned} &\exp \left(-k_z d_c \left[1 + \frac{1}{2} \frac{k^2}{k_z^2} |\varepsilon_c| \right] \right) \\ &\approx \frac{1 - |\varepsilon_c|/\varepsilon_b}{1 + |\varepsilon_c|/\varepsilon_b} \left(1 + |\varepsilon_{red}| \frac{k^2}{k_z^2} \right). \end{aligned} \quad (116)$$

Aplicando la función logaritmo en ambos lados de la igualdad (116) y teniendo en cuenta que los parámetros (114) son pequeños se obtiene una expresión que incluye el valor final (108) del espectro,

$$k_z d_c \left(1 + \frac{1}{2} \frac{k^2}{k_z^2} |\varepsilon_c| \right) \approx k_z^{(e)} - |\varepsilon_{red}| \frac{k^2}{k_z^2}. \quad (117)$$

Resolviendo la Ec. (117) con respecto a k , aplicando la aproximación entre los parámetros (114) llegamos a la asíntota

deseada

$$k \approx \frac{k_z^{(e)}}{\sqrt{|\varepsilon_{red}|}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_b - |\varepsilon_c|}{\varepsilon_b} k_z^{(e)} d_c \right)^{-1/2} \times \sqrt{(k_z^{(e)} - k_z) d_c}. \quad (118)$$

Esta asíntota describe como se comporta el espectro $k = k_s(k_z)$ cerca de su fin. Gracias a esta asíntota se obtiene de manera analítica que $k_z^{(e)}$ (108) es realmente el fin del espectro. Esto se ve a partir del término del radicando ya que cuando $k_z = k_z^{(e)}$ se tiene que $k = 0$ que corresponde a los valores (108) del punto final del espectro.

4.1.6. Permitividad eléctrica reducida ε_{red} positiva

En este caso se considera que el valor absoluto de la permitividad ε_c de la capa c es mayor que el valor de la permitividad ε_b del medio externo b . En consecuencia la permitividad eléctrica reducida ε_{red} es positiva,

$$\varepsilon_c < 0 < \varepsilon_b < |\varepsilon_c| \Rightarrow 0 < \varepsilon_b < \varepsilon_{red}. \quad (119)$$

Debido a que la permitividad eléctrica reducida ε_{red} es positiva, la condición necesaria (103) para la existencia de la solución $k = k_s(k_z)$ de la relación de dispersión (101) impone una nueva restricción. Anteriormente no se tenía esa restricción porque la permitividad eléctrica reducida ε_{red} era negativa y la condición necesaria (103) se satisfacía automáticamente. Las condiciones (89) y (103) confinan la solución $k = k_s(k_z)$ dentro del intervalo siguiente

$$k = k_z/\sqrt{\varepsilon_{red}} < k = k_s(k_z) \leq k = k_z/\sqrt{\varepsilon_b}. \quad (120)$$

En la Fig. 11 se presenta el espectro de la onda simétrica $k = k_s(k_z)$ obtenido mediante solución numérica de la relación de dispersión (101). Como previamente se predijo el espectro está confinado dentro del intervalo de la Ec. (120) que se representa gráficamente en la Fig. 11 mediante las rectas de luz $k = k_z/\sqrt{\varepsilon_b}$ y $k = k_z/\sqrt{\varepsilon_{red}}$.

4.1.7. Asíntota de la solución para el inicio del espectro

Obsérvese que cerca del inicio del espectro los cálculos hechos en el caso anterior para parámetros pequeños (109) son independientes del signo de la permitividad eléctrica reducida ε_{red} . De modo que son válidos tanto para la permitividad ε_{red} negativa como positiva. Por eso cerca del inicio la ecuación (113) es la asíntota del espectro $k = k_s(k_z)$.

4.1.8. Asíntota de la solución para $\kappa_c d_c - \eta \ll 1$

Ahora bien, analicemos la solución $k = k_s(k_z)$ cuando la diferencia entre los parámetros $\kappa_c d_c$ y η es pequeña. Es fácil probar que si los parámetros $\kappa_c d_c$ y η son iguales la solución de la relación de dispersión (101) es la línea de luz $k = k_z/\sqrt{\varepsilon_{red}}$,

$$\kappa_c d_c = \eta \Rightarrow k = k_z/\sqrt{\varepsilon_{red}}. \quad (121)$$

Para el análisis cuando la diferencia entre los parámetros $\kappa_c d_c$ y η es pequeña se requiere estudiar el caso donde la solución $k = k_s(k_z)$ tiende a la línea de luz $k = k_z/\sqrt{\varepsilon_{red}}$,

$$0 < \kappa_c d_c - \eta \ll 1 \Rightarrow 0 < \kappa_c d_c - k_z d_c / \sqrt{\varepsilon_{red}} \ll 1. \quad (122)$$

Con esto en mente, a partir de la Ec. (98) podemos presentar la relación de dispersión en la forma

$$(\kappa_c d_c)^2 - \eta^2 \approx 4(\kappa_c d_c)^2 \exp(-\kappa_c d_c) \Big|_{k = k_z/\sqrt{\varepsilon_{red}}}. \quad (123)$$

Gracias a la Ec. (99) se llega a la expresión

$$(k d_c)^2 \approx \frac{(k_z d_c)^2}{\varepsilon_{red}} \left\{ 1 + \frac{4 \varepsilon_{red}}{\varepsilon_b + |\varepsilon_c|} \exp(-k_z d_c \sqrt{|\varepsilon_c|/\varepsilon_b}) \right\}. \quad (124)$$

Resolviendo la ecuación (124) con respecto a k se consigue la asíntota deseada

$$k \approx \frac{k_z}{\sqrt{\varepsilon_{red}}} \left\{ 1 + \frac{2 \varepsilon_{red}}{\varepsilon_b + |\varepsilon_c|} \exp(-k_z d_c \sqrt{|\varepsilon_c|/\varepsilon_b}) \right\} \text{ si } 1 \ll k_z d_c \sqrt{|\varepsilon_c|/\varepsilon_b}. \quad (125)$$

Como se ve en la Fig. 11, el espectro $k = k_s(k_z)$ tiende por arriba a la línea de luz $k = k_z/\sqrt{\varepsilon_{red}}$ conforme $k_z d_c$ aumenta, tal como lo indica la asíntota (125).

Las asíntotas (113) y (125) corresponden completamente a la región (120) donde existe la solución $k = k_s(k_z)$ de la relación de dispersión (101) en el caso cuando la permitividad eléctrica reducida ε_{red} (119) es positiva.

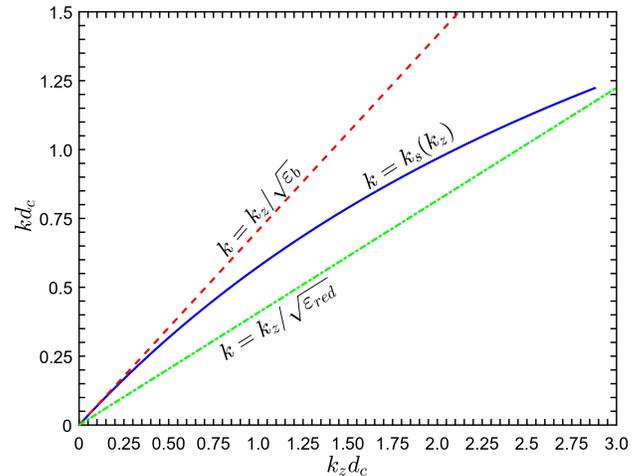


FIGURA 11. Espectro $k = k_s(k_z)$ de la onda simétrica en el caso de ε_{red} (119) positiva. Se usó que $\varepsilon_b = 2$, $|\varepsilon_c| = 3$ y $\varepsilon_{red} = 6$.

4.1.9. Dinámica de la transformación del espectro de la onda simétrica

Como se analizó anteriormente se tienen dos casos diferentes en el espectro de la onda simétrica. Estos espectros corresponden al caso cuando la permitividad eléctrica reducida es negativa, o bien, cuando es positiva. Los espectros se presentan en las Figs. 10 y 11 respectivamente.

Examinemos como es la dinámica de la transformación del espectro de la onda simétrica de la Fig. 10 al de la Fig. 11. Se fija el valor de la permitividad ε_b del medio b y se varía el valor de la permitividad ε_c de la capa c . Iniciemos con $|\varepsilon_c| < \varepsilon_b$, en este caso el espectro se presenta en la Fig. 10. Como consecuencia de que el valor absoluto de la permitividad ε_c es menor que el valor de la permitividad ε_b el logaritmo en la expresión (108) es positivo y por ende existe un punto final del espectro. A medida que el valor absoluto de la permitividad ε_c tiende al valor de ε_b nos aproximamos en $k_z d_c$ por la izquierda al punto final del espectro (108) que se aprecia en la Fig. 10. Cuando $|\varepsilon_c| = \varepsilon_b$ el fin del espectro está en el infinito de acuerdo con la expresión (108) y también la permitividad eléctrica reducida ε_{red} (100) tiende a infinito. Esto significa que cuando $|\varepsilon_c| = \varepsilon_b$ el espectro de la Fig. 10 coincide con el eje $k_z d_c$ ya que se tiene que $k = 0$ para cualquier valor de k_z . Pero cuando $\varepsilon_b < |\varepsilon_c|$ la permitividad eléctrica reducida es positiva, aparece la recta de luz $k = k_z / \sqrt{\varepsilon_{\text{red}}}$ y el espectro ya no coincide con el eje $k_z d_c$ sino que se transforma en el espectro presentado en la Fig. 11. En otras palabras, es posible visualizar que el espectro descrito en la Fig. 10 cambia como si rotásemos el eje de las abscisas $k_z d_c$ en un ángulo indicado por la línea de luz $k = k_z / \sqrt{\varepsilon_{\text{red}}}$, tal que el espectro queda entre esa línea de luz y la línea de luz $k = k_z / \sqrt{\varepsilon_b}$ como lo indica la condición (120). También ocurre que el fin del espectro se corre tendiendo hacia el infinito, es decir $k_z d_c \rightarrow \infty$, en donde de acuerdo con las definiciones (89), (90) y (97) se tiene que $\kappa_c d_c = \eta$, cambiando al espectro mostrado en la Fig. 11.

4.1.10. Onda antisimétrica con respecto al campo magnético

Esta vez se considera la onda con relación de dispersión

$$\exp(-\kappa_c d_c) = \frac{\eta - \kappa_c d_c}{\eta + \kappa_c d_c}. \quad (126)$$

En consecuencia el elemento de matriz $M_{12}^{(T)}$ ahora es igual a menos uno. Esto se prueba de manera semejante al caso de la onda simétrica. Conforme a la definición se expresa la función seno hipérbolico en la igualdad (92) en términos de la función exponencial y luego se usa la relación de dispersión (126),

$$M_{12}^{(T)} = \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_b \kappa_c}{|\varepsilon_c| \kappa_b} - \frac{|\varepsilon_c| \kappa_b}{\varepsilon_b \kappa_c} \right) \times \left(\frac{\eta + \kappa_c d_c}{\eta - \kappa_c d_c} - \frac{\eta - \kappa_c d_c}{\eta + \kappa_c d_c} \right) = -1. \quad (127)$$

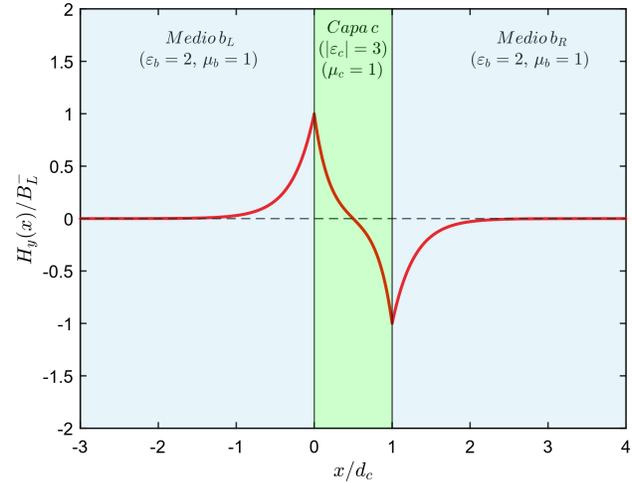


FIGURA 12. Distribución del campo magnético $H_y(x)/B_L^-$ (94) de la onda antisimétrica con respecto al campo magnético. Se usó que $\varepsilon_b = 2$ y $|\varepsilon_c| = 3$.

De la expresión (127) resulta que el campo magnético de la onda en las interfaces izquierda ($b_L|c$) y derecha ($c|b_R$) tiene la misma magnitud, pero signos opuestos. Lo anterior significa que la distribución (94) del campo magnético $H_y(x)$ es antisimétrica. Por esta razón, la onda se llama onda antisimétrica con respecto del campo magnético. En este sentido, suponiendo que B_L^- sea positivo, dentro de la capa c la distribución de campo magnético $H_y(x)$ es máxima positiva en la interfaz izquierda ($b_L|c$), disminuye hasta ser mínima negativa en la interfaz derecha ($c|b_R$) con el mismo valor absoluto como se muestra en la Fig. 12.

De manera similar al caso de onda simétrica con respecto al campo magnético, de la Fig. 12 se observa que la primera derivada de la distribución (94) del campo magnético $H_y(x)$ es discontinua en las interfaces izquierda ($b_L|c$) y derecha ($c|b_R$). Sin embargo, como ya se demostró la componente tangencial $E_z(x)$ (69b) del campo eléctrico es continua en las interfaces. Esto gracias al factor que multiplica a la primera derivada del campo magnético $H_y(x)$ en la ecuación (69b) que compensa exactamente el valor de la discontinuidad. Por la misma razón, la componente normal $E_x(x)$ (69a) del campo eléctrico que es proporcional al campo magnético $H_y(x)$ tiene una discontinuidad de salto en las interfaces.

Más aún, debido que la distribución (94) del campo magnético $H_y(x)$ es antisimétrica y su primera derivada con respecto de x es simétrica, la componente transversal $E_x(x)$ (69a) del campo eléctrico es antisimétrica, mientras que la componente longitudinal $E_z(x)$ (69b) es simétrica.

De acuerdo con la relación de dispersión (126) la función exponencial del lado izquierdo así como la función del lado derecho tienen su máximo global en $\kappa_c d_c = 0$ tal que en este punto ambas funciones son iguales a uno. Si la función del lado derecho de la relación de dispersión (126) decae más rápido que la función exponencial, las curvas que representan a las funciones no se intersecan puesto que ambas funciones

son monótonas decrecientes respecto de $\kappa_c d_c$. En este aspecto, la solución de la relación de dispersión (126) solo puede existir cuando la derivada del lado izquierdo de la Ec. (126) es menor que la derivada del lado derecho. De esta manera la función del lado derecho de la relación de dispersión (126) decae más lento que la función exponencial y existe una intersección entre las curvas correspondientes. Es posible ver esta condición a partir de las derivadas de la función exponencial y del lado derecho de la relación de dispersión (126) evaluadas en el máximo $\kappa_c d_c = 0$. Como consecuencia, para la existencia de la solución a la relación de dispersión (126), se requiere que el parámetro η sea mayor que dos,

$$2 < \eta \Rightarrow k d_c \sqrt{\varepsilon_b} < \sqrt{(k_z d_c)^2 - 4\varepsilon_b^2/|\varepsilon_c|^2}. \quad (128)$$

Esta condición se cumple a la derecha de la hipérbola

$$k d_c \sqrt{\varepsilon_b} = \sqrt{(k_z d_c)^2 - 4\varepsilon_b^2/|\varepsilon_c|^2}. \quad (129)$$

En la Fig. 13 se muestra la solución gráfica de la relación de dispersión (126). La curva azul representa la función $\exp(-\kappa_c d_c)$, las curvas cian, verde y roja son la función del lado derecho de la Ec. (126) con $\eta < 2$, $\eta = 2$ y $2 < \eta$ respectivamente. Como es posible ver de la Fig. 13 la solución de la ecuación de dispersión (126) solo existe cuando el parámetro η es mayor a dos. En ese caso se tiene una intersección entre la curva de la función exponencial y la función del lado derecho de la relación de dispersión (126).

Por otra parte, como el lado izquierdo de la relación de dispersión (126) siempre es positivo, el lado derecho debe ser positivo también. De manera similar al caso de la onda simétrica, la condición necesaria para la existencia de solución a la relación de dispersión (126) es

$$\kappa_c d_c < \eta \Rightarrow (\kappa_c d_c)^2 < \eta^2 \Rightarrow k^2 < k_z^2/\varepsilon_{red}. \quad (130)$$

Esta condición depende del signo de la permitividad eléctrica reducida ε_{red} . Por ende se deben considerar los casos cuando ε_{red} es negativa y positiva por separado.

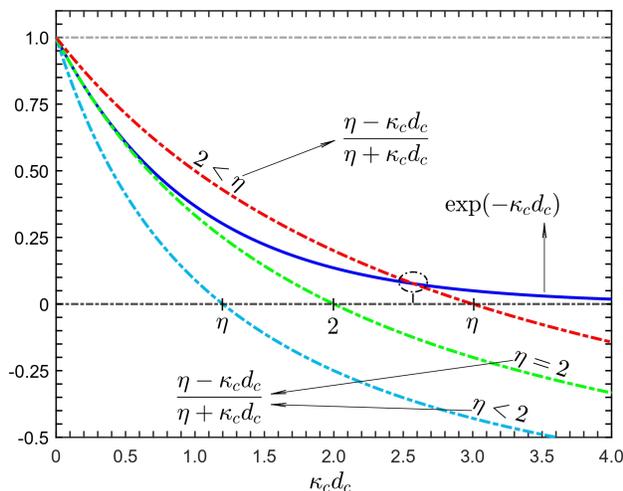


FIGURA 13. Solución gráfica de la relación de dispersión (126).

4.1.11. Permitividad eléctrica reducida ε_{red} negativa

Como se mencionó en el caso de la onda simétrica la permitividad eléctrica reducida ε_{red} (100) es negativa cuando el valor absoluto de la permitividad ε_c es menor que la permitividad ε_b tal como lo indica la expresión (104). Como consecuencia no existen valores reales de k y k_z que satisfagan la condición necesaria (130). Por lo que en este caso la relación de dispersión (126) no tiene solución.

4.1.12. Permitividad eléctrica reducida ε_{red} positiva

Ahora consideraremos que la permitividad eléctrica reducida ε_{red} (100) es positiva. Como se mencionó anteriormente, esto se logra cuando el valor absoluto de la permitividad ε_c es mayor que la permitividad ε_b , es decir, cuando se cumple la desigualdad (119). En este caso, la condición necesaria (130) para la existencia de la solución $k = k_a(k_z)$ de la relación de dispersión (126) da como resultado la restricción

$$k = k_a(k_z) < k = k_z/\sqrt{\varepsilon_{red}}. \quad (131)$$

Esta restricción se añade a la condición (128) sobre el parámetro η que se cumple a la derecha de la hipérbola (129) y cabe resaltar que directamente sobre la hipérbola (129) la solución $k = k_a(k_z)$ no existe. Por lo anterior, existe un valor umbral a partir del que inicia el espectro de la solución $k = k_a(k_z)$. En la Fig. 14 se muestra el espectro de la onda antisimétrica $k = k_a(k_z)$ obtenido por solución numérica de la relación de dispersión (126). Tal como se mencionó, el espectro $k = k_a(k_z)$ está a la derecha de la hipérbola (129) y debajo de la línea de luz $k = k_z/\sqrt{\varepsilon_{red}}$ como lo indican las restricciones (128) y (131) respectivamente.

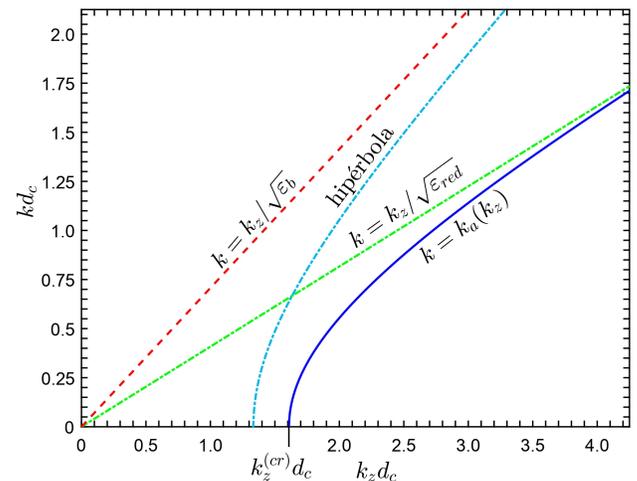


FIGURA 14. Espectro $k = k_a(k_z)$ de la onda antisimétrica para el caso de ε_{red} (119) positiva. La hipérbola obedece la ecuación (129). Se usó que $\varepsilon_b = 2$, $|\varepsilon_c| = 3$ y $\varepsilon_{red} = 6$.

4.1.13. Umbral del inicio del espectro

Para calcular el valor umbral de la solución $k = k_a(k_z)$ suponemos que $k = 0$ y que k_z está a la derecha de la hipérbola (129). Como consecuencia, las proyecciones de los vectores de onda κ_b y κ_c son iguales, a saber, $\kappa_b = \kappa_c = k_z$. Al sustituir los valores de los parámetros κ_b , κ_c y η en la relación de dispersión (126) se llega a la ecuación

$$\exp(-k_z d_c) = \frac{1 - \varepsilon_b/|\varepsilon_c|}{1 + \varepsilon_b/|\varepsilon_c|}. \quad (132)$$

De modo que, los valores k y k_z del umbral del espectro $k = k_a(k_z)$ son

$$k_z^{(cr)} d_c = \ln \left(\frac{1 + \varepsilon_b/|\varepsilon_c|}{1 - \varepsilon_b/|\varepsilon_c|} \right), \quad k^{(cr)} d_c = 0. \quad (133)$$

Para verificar que el umbral en verdad está al lado derecho de la hipérbola (129) se sustituyen los valores del umbral (133) en la condición (128) para el parámetro η , de donde se deriva la desigualdad

$$\frac{2\varepsilon_b}{|\varepsilon_c|} < \ln \left(\frac{1 + \varepsilon_b/|\varepsilon_c|}{1 - \varepsilon_b/|\varepsilon_c|} \right). \quad (134)$$

Es posible probar que la desigualdad anterior se cumple en este caso porque la permitividad eléctrica reducida ε_{red} es positiva, o bien, porque $0 < \varepsilon_b/|\varepsilon_c| < 1$. Por lo anterior este punto en verdad está a la derecha de la hipérbola (129). El punto umbral (133) se aprecia en la Fig. 14. Además, el valor del umbral obtenido por la solución numérica de la relación de dispersión (126) coincide con el valor de la expresión (133).

4.1.14. Asíntota del espectro cerca del umbral

Analicemos la solución $k = k_a(k_z)$ cerca del umbral (133). Esto significa que al aproximarnos al punto umbral (133) la diferencia entre k_z y $k_z^{(cr)}$ se vuelve pequeña,

$$0 < (k_z - k_z^{(cr)}) d_c \ll 1 \quad \Leftrightarrow \quad k d_c \ll 1. \quad (135)$$

Por esta razón es posible escribir los parámetros κ_b (89), κ_c (90) y η (97) en la forma presentada en la ecuación (115). Luego, al sustituir la forma (115) de los parámetros en la relación de dispersión (126) se obtiene la ecuación

$$\begin{aligned} & \exp \left(-k_z d_c \left[1 + \frac{1}{2} \frac{k^2}{k_z^2} |\varepsilon_c| \right] \right) \\ & \approx \frac{1 - \varepsilon_b/|\varepsilon_c|}{1 + \varepsilon_b/|\varepsilon_c|} \left(1 - \varepsilon_{red} \frac{k^2}{k_z^2} \right). \end{aligned} \quad (136)$$

Tomando el logaritmo de la ecuación anterior y teniendo en cuenta que los parámetros (135) son pequeños se llega a la expresión

$$(k_z - k_z^{(cr)}) d_c \approx \frac{k^2}{k_z^2} \varepsilon_{red} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{|\varepsilon_c| - \varepsilon_b}{\varepsilon_b} k_z d_c \right). \quad (137)$$

Finalmente, se resuelve la Ec. (137) respecto de k y se aplica la aproximación entre los parámetros (135) para obtener la asíntota del espectro cerca del valor umbral (133),

$$\begin{aligned} k & \approx \frac{k_z^{(cr)}}{\sqrt{\varepsilon_{red}}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{|\varepsilon_c| - \varepsilon_b}{\varepsilon_b} k_z^{(cr)} d_c \right\}^{-1/2} \\ & \times \sqrt{(k_z - k_z^{(cr)}) d_c}. \end{aligned} \quad (138)$$

Note que el término entre llaves de la Ec. (138) es positivo gracias a que la permitividad eléctrica reducida ε_{red} es positiva. En otras palabras, gracias a que se cumple la desigualdad

$$\ln \left(\frac{1 + \varepsilon_b/|\varepsilon_c|}{1 - \varepsilon_b/|\varepsilon_c|} \right) < 2 \frac{\varepsilon_b/|\varepsilon_c|}{1 - \varepsilon_b/|\varepsilon_c|}. \quad (139)$$

En particular, cuando $1 - \varepsilon_b/|\varepsilon_c| \ll 1$ la desigualdad (139) es equivalente a

$$\ln \left(\frac{2}{1 - \varepsilon_b/|\varepsilon_c|} \right) < \frac{2}{1 - \varepsilon_b/|\varepsilon_c|}. \quad (140)$$

La condición anterior se satisface porque la función logaritmo siempre es menor que su argumento si éste es positivo.

4.1.15. Asíntota del espectro para $\eta - \kappa_c d_c \ll 1$

Ahora analicemos la solución $k = k_a(k_z)$ cuando la diferencia entre los parámetros η y $\kappa_c d_c$ es pequeña. De manera análoga al caso de la onda simétrica, el análisis cuando la diferencia entre los parámetros η y $\kappa_c d_c$ es pequeña consiste en estudiar el caso cuando k tiende a la línea de luz $k = k_z/\sqrt{\varepsilon_{red}}$. Pero esta vez desde valores por debajo de la línea de luz $k = k_z/\sqrt{\varepsilon_{red}}$

$$\begin{aligned} 0 & < \eta - \kappa_c d_c \ll 1 \quad \Rightarrow \\ 0 & < k_z d_c / \sqrt{\varepsilon_{red}} - k d_c \ll 1. \end{aligned} \quad (141)$$

De modo que partiendo de la Ec. (98) es posible presentar la relación de dispersión como

$$\eta^2 - (\kappa_c d_c)^2 \approx 4(\kappa_c d_c)^2 \exp(-\kappa_c d_c) \Big|_{k=k_z/\sqrt{\varepsilon_{red}}}. \quad (142)$$

Mediante la ecuación (99) se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} (k d_c)^2 & \approx \frac{(k_z d_c)^2}{\varepsilon_{red}} \\ & \times \left\{ 1 - \frac{4\varepsilon_{red}}{\varepsilon_b + |\varepsilon_c|} \exp(-k_z d_c \sqrt{|\varepsilon_c|/\varepsilon_b}) \right\}. \end{aligned} \quad (143)$$

Resolviendo la Ec. (143) respecto de k se llega a la expresión de la asíntota buscada

$$\begin{aligned} k & \approx \frac{k_z}{\sqrt{\varepsilon_{red}}} \left\{ 1 - \frac{2\varepsilon_{red}}{\varepsilon_b + |\varepsilon_c|} \exp(-k_z d_c \sqrt{|\varepsilon_c|/\varepsilon_b}) \right\} \\ \text{si } 1 & \ll k_z d_c \sqrt{|\varepsilon_c|/\varepsilon_b}. \end{aligned} \quad (144)$$

Nótese que esta asíntota es congruente con la restricción (131) que delimita la solución $k = k_a(k_z)$. En concordancia con la Fig. 14 esta asíntota describe como se comporta la solución $k = k_a(k_z)$ cuando la diferencia de los parámetros η y $\kappa_c d_c$ es pequeña (141). De manera concreta, se tiene que la solución $k = k_a(k_z)$ se aproxima a la línea de luz $k = k_z/\sqrt{\varepsilon_{red}}$ desde valores por debajo de ella conforme $k_z d_c$ aumenta.

Las asíntotas (138) y (144) son congruentes con el intervalo donde existe la solución $k = k_a(k_z)$ que está delimitado por la hipérbola (129) y la restricción (131) que corresponden al caso cuando la permitividad eléctrica reducida ε_{red} es positiva.

4.1.16. Dinámica de la desaparición del espectro de la onda antisimétrica

De acuerdo con el análisis previo solo se tiene un caso en el espectro para la onda antisimétrica. Este espectro corresponde al caso donde la permitividad eléctrica reducida es positiva y se presenta en la Fig. 14.

Veamos como es la dinámica de la desaparición del espectro de la onda antisimétrica de la Fig. 14. Mantegamos fijo el valor absoluto de la permitividad ε_c y variemos el valor de la permitividad ε_b . En el caso $\varepsilon_b < |\varepsilon_c|$ el espectro corresponde al presentado en la Fig. 14. Como el valor absoluto de la permitividad ε_c es mayor que el valor de la permitividad ε_b el logaritmo de la expresión (133) es positivo y se encuentra a la derecha de la hipérbola (129). Por ende el punto umbral (133) se encuentra cercano a la hipérbola (129). A medida que aumentamos el valor de ε_b aproximándonos al valor de $|\varepsilon_c|$ el punto umbral (133) se recorre hacia valores lejanos respecto de la hipérbola (129), es decir, se corre hacia la derecha respecto del punto presentado en la Fig. 14. También ocurre que tanto el espectro como la hipérbola (129) se recorren hacia la derecha pero el espectro se aleja cada vez más de la hipérbola (129). Asimismo, la línea de luz $k = k_z/\sqrt{\varepsilon_{red}}$ se rota aproximándose al eje $k_z d_c$. Cuando $\varepsilon_b = |\varepsilon_c|$ el umbral del espectro está en el infinito de acuerdo con la expresión (133) y la línea de luz $k = k_z/\sqrt{\varepsilon_{red}}$ coincide con el eje $k_z d_c$ de modo que el espectro de la solución $k = k_s(k_z)$ desaparece por completo.

4.2. Capa c con permitividad ε_c positiva

Esta vez se considera que la permitividad eléctrica ε_c de la placa c es una constante real positiva. El número de onda k_c dentro de la capa c se considera real,

$$k_c = (k^2 \varepsilon_c - k_z^2)^{1/2} \Rightarrow k_z/\sqrt{\varepsilon_c} \leq k = \omega/c. \quad (145)$$

De acuerdo con las definiciones (89) y (145), κ_b y k_c son de valores reales. Luego entonces los términos dentro de la raíz de κ_b (89) y k_c (145) tienen que ser mayores o iguales a cero. Lo que significa que el número de onda k_z está restringido dentro del intervalo

$$k^2 \varepsilon_b < k_z^2 < k^2 \varepsilon_c. \quad (146)$$

Debido a su naturaleza k^2 (1b) es de valor real. Como la permitividad ε_c es real y además positiva k_z^2 es de valor real.

Por otro lado, observe que la parte izquierda de la desigualdad (146) se satisface de manera automática cuando la permitividad ε_b es negativa. En ese caso el número de onda k_b sigue siendo imaginario,

$$k_b = i\kappa_b \text{ con } \kappa_b = (k_z^2 + k^2|\varepsilon_b|)^{1/2} \text{ para } \varepsilon_b < 0. \quad (147)$$

Gracias a esto la relación de dispersión tiene la forma presentada en la ecuación (88). Es claro que no existe restricción sobre el signo del lado derecho así como del lado izquierdo de la relación de dispersión (88). Por tanto, en principio la ecuación de dispersión (88) con ε_b negativa tiene solución. No obstante, este caso no se analizará en detalle porque se tiene interés en que la permitividad ε_b sea positiva.

A continuación se analizará el caso cuando las permitividades ε_b y ε_c son ambas positivas, que resulta ser muy similar al caso estudiado en polarización s en la subsección 3.2. Suponiendo que la permitividad ε_b es positiva y de acuerdo con la desigualdad (146) se tiene,

$$0 < \varepsilon_b < \varepsilon_c. \quad (148)$$

Es decir que la permitividad ε_b es menor que la permitividad ε_c . Gracias a la definición (89) se prueba que κ_b es una función monótona creciente. Como se ve, κ_b crece desde cero hasta su valor máximo $\kappa_b = k_c^{(máx)}$ que se obtiene cuando $k_c = 0$. De manera análoga, de la definición (145) se ve que k_c es una función monótona decreciente respecto de k_z . En verdad k_c decrece desde su valor máximo $k_c^{(máx)}$, que se obtiene cuando $\kappa_b = 0$, hasta cero. Por lo anterior, $k_c^{(máx)}$ representa el valor máximo que pueden tener κ_b y k_c ,

$$k_c^{(máx)} = k\sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon_b}, \quad (149a)$$

$$\kappa_b^2 + k_c^2 = k^2 (\varepsilon_c - \varepsilon_b), \quad (149b)$$

$$0 \leq \kappa_b \leq k_c^{(máx)}, \quad 0 \leq k_c \leq k_c^{(máx)}, \quad (149c)$$

$$\kappa_b = 0, \quad k_c = k_c^{(máx)}, \quad \text{cuando } k_z = k\sqrt{\varepsilon_b}, \quad (149d)$$

$$\kappa_b = k_c^{(máx)}, \quad k_c = 0, \quad \text{cuando } k_z = k\sqrt{\varepsilon_c}. \quad (149e)$$

Nótese que estas ecuaciones son iguales a las Ecs. (36) del caso similar analizado en polarización s. Otras ecuaciones que vienen a continuación se pueden comparar con las ecuaciones correspondientes del caso estudiado en polarización s en la Subsec. 3.2.

Una vez más el elemento de matriz $M_{12}^{(T)}$ y la relación de dispersión se representan como en las Ecs. (82b) y (88) respectivamente, que se reescriben a continuación

$$M_{12}^{(T)} = \alpha_- \text{sen}(k_c d_c),$$

$$\alpha_- = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_b k_c}{\varepsilon_c \kappa_b} + \frac{\varepsilon_c \kappa_b}{\varepsilon_b k_c} \right), \quad (150)$$

$$\cot(k_c d_c) = \alpha_+,$$

$$\alpha_+ = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_b k_c}{\varepsilon_c \kappa_b} - \frac{\varepsilon_c \kappa_b}{\varepsilon_b k_c} \right). \quad (151)$$

El lado izquierdo de la relación de dispersión (151) toma valores positivos así como negativos y el lado derecho puede ser positivo o negativo. Por ende, es posible que exista una solución a la ecuación de dispersión (151).

Como ya se mencionó antes, es posible apreciar que este caso es muy similar al que se estudió anteriormente en polarización *s* en donde las permitividades ε_b y ε_c son ambas positivas. Para ambas polarizaciones la relación de dispersión tiene la misma forma presentada en la Ec. (151). Sin embargo, el factor α_+ tiene una forma diferente para cada polarización. En polarización *s* α_+ es de la forma presentada en la Ec. (39). Mientras que para la polarización *p* toma la forma mostrada en la Ec. (151).

Por otro lado, es posible reescribir la relación de dispersión (151) como

$$k_c d_c = \pi n + \operatorname{arccot}(\alpha_+), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (152)$$

De esta forma se puede ver que la relación de dispersión (152) tiene un número infinito de soluciones $k = k_n(k_z)$. A diferencia del caso anterior cuando ε_c es negativo en donde se vio que solo se tiene una solución en cada caso estudiado. Para enumerar a las ondas localizadas se utilizará el entero n . Al igual que antes, a cada onda localizada se le llama modo electromagnético localizado o modo propio electromagnético localizado y a cada modo le corresponde una curva de dispersión $k = k_n(k_z)$. Además, observe que la función $\operatorname{arccot}(\alpha_+)$ es una función monótona que disminuye desde π hasta 0. En contraste α_+ es una función que aumenta de $-\infty$ a ∞ ,

$$-\infty < \alpha_+ = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_b k_c}{\varepsilon_c k_b} - \frac{\varepsilon_c k_b}{\varepsilon_b k_c} \right) < \infty, \\ \alpha_+ = 0 \quad \text{si} \quad \varepsilon_b k_c = \varepsilon_c k_b. \quad (153)$$

De acuerdo con la condición (146) el espectro $k = k_n(k_z)$ de las ondas localizadas con relación de dispersión (152) está dentro del intervalo

$$k = k_z / \sqrt{\varepsilon_c} \leq k = k_n(k_z) \leq k = k_z / \sqrt{\varepsilon_b}. \quad (154)$$

Es decir, el espectro $k = k_n(k_z)$ de los modos propios se halla entre dos líneas de luz dadas por $k = k_z / \sqrt{\varepsilon_b}$ y $k = k_z / \sqrt{\varepsilon_c}$.

Por otra parte como se puede apreciar de la relación de dispersión (152) para cada valor de n se encuentra una solución cuando $k_c d_c$ está dentro del intervalo

$$\pi n \leq k_c d_c \leq \pi(n + 1). \quad (155)$$

Como se vio para polarización *s*, esto proporciona una condición complementaria a (154) para la n -ésima curva de dispersión. Tal que cuando se fija n la curva espectral $k = k_n(k_z)$ queda confinada dentro del intervalo

$$k = k_n^{(r)}(k_z) \leq k = k_n(k_z) \leq k = k_{n+1}^{(r)}(k_z), \quad (156)$$

donde $k_n^{(r)}(k_z)$ representa el borde izquierdo del intervalo y se define como

$$k_n^{(r)}(k_z) = \sqrt{(\pi n / d_c)^2 + k_z^2} / \sqrt{\varepsilon_c}. \quad (157)$$

De manera similar $k_{n+1}^{(r)}(k_z)$ representa el borde derecho del intervalo (156) donde está la n -ésima curva de dispersión $k = k_n(k_z)$. De acuerdo con esta definición, para $n = 0$ se cumple $k_0^{(r)}(k_z) = k_z / \sqrt{\varepsilon_c}$. Además, a partir de la condición (156) se sigue que existe un valor umbral que indica donde inicia la n -ésima curva espectral para los casos cuando n es distinto de cero.

En resumen, se han obtenido analíticamente dos condiciones independientes que delimitan el espectro $k = k_n(k_z)$ de las ondas localizadas con relación de dispersión (152). La primera condición (154) establece que todas las curvas espectrales $k = k_n(k_z)$ están entre dos líneas de luz. La segunda condición (156) establece que dado n la curva de dispersión $k = k_n(k_z)$ está confinada dentro del intervalo delimitado por $k = k_n^{(r)}(k_z)$ (157) y su correspondiente $k = k_{n+1}^{(r)}(k_z)$.

En la Fig. 15 se muestra parte de las curvas espectrales $k = k_n(k_z)$ enumeradas por el entero n que se obtuvieron mediante solución numérica de la relación de dispersión (151). Las líneas de luz, $k = k_0^{(r)}(k_z) = k_z / \sqrt{\varepsilon_c}$ y $k = k_z / \sqrt{\varepsilon_b}$ son las rectas en color cian y azul respectivamente. Las curvas espectrales que se aprecian en la Fig. 15 son $k = k_0(k_z)$, $k = k_1(k_z)$, $k = k_2(k_z)$, $k = k_3(k_z)$ y $k = k_4(k_z)$ en colores rojo, magenta, verde, naranja y café respectivamente. Se observa que todas las curvas espectrales comienzan a lo largo de la línea de luz $k = k_z / \sqrt{\varepsilon_b}$. La curva $k = k_0(k_z)$ inicia en el origen del sistema de coordenadas e incrementa a lo largo de la línea de luz $k = k_z / \sqrt{\varepsilon_b}$. Pero, para las curvas espectrales con $n \neq 0$ se aprecia que existe un umbral. Estas curvas espectrales comienzan a partir del umbral que está sobre la línea de luz $k = k_z / \sqrt{\varepsilon_b}$. El umbral para cada curva espectral $k = k_n(k_z)$ con $n \neq 0$ se

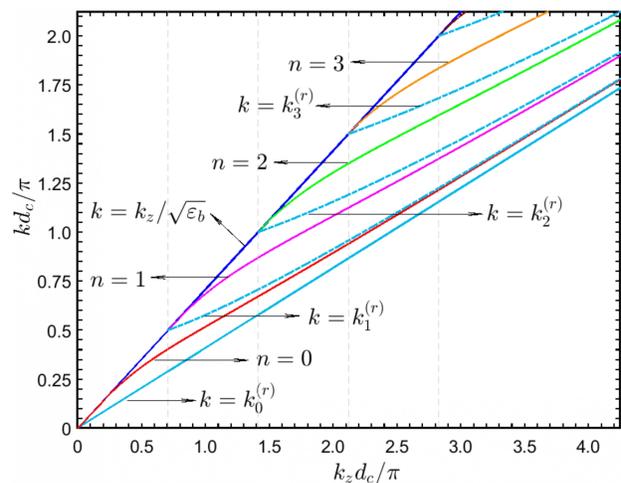


FIGURA 15. Espectro $k = k_n(k_z)$ de las ondas localizadas en la capa *c* con relación de dispersión (152). Se usó que $\varepsilon_b = 2$ y $\varepsilon_c = 6$.

muestra en línea punteada. El resto de las líneas cian representan las curvas $k = k_n^{(r)}(k_z)$ (157).

Las curvas de dispersión $k = k_n(k_z)$ mostradas en la Fig. 15 corresponden totalmente a las condiciones (154) y (156) que se obtuvieron analíticamente. Como se demostró previamente, las curvas de dispersión $k = k_n(k_z)$ están dentro del intervalo (154) que se representa gráficamente en la Fig. 15 mediante las rectas de luz $k = k_z/\sqrt{\varepsilon_b}$ y $k = k_0^{(r)} = k_z/\sqrt{\varepsilon_c}$. Además, la n -ésima curva espectral está dentro del rango establecido en la Ec. (156) representado por las curvas $k = k_n^{(r)}(k_z)$.

4.2.1. Asíntota del inicio del espectro

Al considerar el inicio del espectro, k_c está cerca de su valor máximo (149a). Más aún, de acuerdo con la Ec. (149d) κ_b es cercano a cero. Por tanto, $\varepsilon_c \kappa_b$ es mucho menor que el producto $\varepsilon_b k_c$. Por lo anterior de acuerdo con nuestro análisis de la relación de dispersión (152) el factor α_+ tiende a infinito y se puede aproximar como

$$\alpha_+ \approx \varepsilon_b k_c / 2\varepsilon_c \kappa_b \quad \text{si} \quad \varepsilon_c \kappa_b / \varepsilon_b k_c \ll 1. \quad (158)$$

Gracias a esto es suficiente considerar solo el primer término de la representación en serie de la función $\text{arccot}(\alpha_+)$, es decir $\text{arccot}(\alpha_+) \approx 1/\alpha_+$. En consecuencia, es posible presentar la relación de dispersión (152) como

$$k_c d_c \approx \pi n + 2 \frac{\varepsilon_c \kappa_b}{\varepsilon_b k_c}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (159)$$

Después, ya que κ_b es pequeño el segundo término de la ecuación anterior debe ser menor que πn . Es posible sustituir k_c por su valor máximo dado en la Ec. (149a) y de esta manera llegar a la expresión

$$k \approx \frac{\pi n}{d_c \sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon_b}} + \frac{2\varepsilon_c \kappa_b}{\varepsilon_b (\varepsilon_c - \varepsilon_b) k d_c}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (160)$$

Esta ecuación describe como depende k del parámetro κ_b . Sin embargo, también depende de n por eso podemos considerar por separado todos los casos con $n \neq 0$ y el caso cuando $n = 0$ aparte. Esto porque $n = 0$ es una curva especial: en este caso no tenemos en la parte derecha de la Ec. (160) el término que incluye a π .

4.2.2. Modo cero, $n = 0$

Nuevamente llamamos modo cero a la onda electromagnética localizada con $n = 0$ con curva de dispersión $k = k_0(k_z)$. En este caso, de acuerdo con la Ec. (160) para $n = 0$ cerca del inicio de esta curva de dispersión se cumple

$$(k d_c)^2 \approx \frac{2\varepsilon_c}{\varepsilon_b (\varepsilon_c - \varepsilon_b)} \kappa_b d_c. \quad (161)$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad (161) y sustituyendo la definición (89) de κ_b se llega a la siguiente ecuación

$$(k d_c)^2 \approx \frac{(k_z d_c)^2}{\varepsilon_b} - \frac{\varepsilon_b (\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2}{4\varepsilon_c^2} (k d_c)^4. \quad (162)$$

La solución de primera aproximación de la ecuación anterior es $k d_c \approx k_z d_c / \sqrt{\varepsilon_b}$. Usando la primera aproximación en el término de $(k d_c)^4$ llegamos a la asíntota deseada

$$k = k_0(k_z) \approx \frac{k_z}{\sqrt{\varepsilon_b}} \left\{ 1 - \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2}{8\varepsilon_c^2} (k_z d_c)^2 \right\} \quad \text{si} \quad \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2}{4\varepsilon_c^2} (k_z d_c)^2 \ll 1. \quad (163)$$

De acuerdo con la Fig. 15 se aprecia que el comportamiento del modo cero $k = k_0(k_z)$ es bien descrito por la asíntota (163). Cuando esta curva espectral inicia se encuentra muy cerca de la línea de luz $k = k_z/\sqrt{\varepsilon_b}$ y conforme $k_z d_c$ aumenta se aleja lentamente de la línea de luz manteniéndose por debajo de ella tal como lo dicta la expresión (163).

4.2.3. Umbral de las curvas de dispersión con $n \neq 0$

Como se mencionó anteriormente existe un valor umbral a partir del que inicia la n -ésima curva del espectro con $n \neq 0$. De acuerdo con la Ec. (160) el segundo término del lado derecho es pequeño comparado con el primero, por ende se puede considerar como una pequeña perturbación. Entonces, podemos sustituir en el segundo término del lado derecho de la Ec. (160) la primera aproximación que es $k \approx \pi n / (d_c \sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon_b})$ y de esta manera se obtiene la siguiente ecuación

$$k \approx \frac{\pi n}{d_c \sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon_b}} + \frac{2}{\pi n} \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_b \sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon_b}} (k_z^2 - k^2 \varepsilon_b)^{1/2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (164)$$

Gracias a esta ecuación se ve que el umbral de la n -ésima curva del espectro se obtiene de tomar $k = k_z/\sqrt{\varepsilon_b}$ y después se halla el valor explícito de k

$$k - k_n^{(cr)} \approx \frac{2}{\pi n} \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_b \sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon_b}} \sqrt{k_z^2 - (k_z^{(cr)})^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (165)$$

Por tanto, los valores $k_n^{(cr)}$ y $k_z^{(cr)}$ del umbral de la n -ésima curva del espectro son

$$k_z^{(cr)} = k_n^{(cr)} \sqrt{\varepsilon_b} = \frac{\pi n}{d_c} \sqrt{\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_c - \varepsilon_b}}, \quad k_n^{(cr)} = \frac{\pi n}{d_c \sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon_b}} = \frac{k_z^{(cr)}}{\sqrt{\varepsilon_b}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (166)$$

Note que el umbral es también independiente de la polarización de la onda electromagnética ya que se obtuvo este

mismo resultado para el caso de polarización s (54). El umbral solo depende de los valores de las permitividades del medio b y de la capa c así como del espesor de la capa d_c y del número n . Es posible ver que el umbral es un punto de intersección entre la línea de luz $k = k_z/\sqrt{\varepsilon_b}$ y el borde izquierdo $k = k_n^{(r)}$ del intervalo donde la n -ésima curva espectral está confinada. Esto surge de los cálculos ya que este umbral (165) inicia en la línea de luz $k = k_z/\sqrt{\varepsilon_b}$ y está por encima del borde izquierdo $k = k_n^{(r)}$. A partir de la Fig. 15 se observa que las curvas del espectro $k = k_n(k_z)$ con $n = 1, 2, 3, \dots$ inician a partir del valor umbral (166) que está sobre la línea de luz $k = k_z/\sqrt{\varepsilon_b}$ en perfecta concordancia con los intervalos de las Ecs. (154) y (156) que confinan el espectro $k = k_n(k_z)$. Además, el valor del umbral obtenido mediante la solución numérica de la relación de dispersión (151) coincide con el valor de la expresión (166).

4.2.4. La mitad del espectro en donde $\alpha_+ = 0$

Por otro lado, de acuerdo con el análisis hecho anteriormente el factor α_+ va de $-\infty$ a ∞ por lo que la *media* de todos los valores posibles de α_+ se encuentra en el valor $\alpha_+ = 0$. Según la Ec. (153) $\alpha_+ = 0$ cuando $\varepsilon_b k_c = \varepsilon_c \kappa_b$, y sustituyendo lo anterior en la Ec. (149b) se llega a

$$k_c = k \varepsilon_c \sqrt{\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_b}{\varepsilon_b^2 + \varepsilon_c^2}}. \quad (167)$$

Gracias a la definición (145) de k_c se obtiene la expresión

$$k_z = k \sqrt{\frac{\varepsilon_b \varepsilon_c^2 + \varepsilon_c \varepsilon_b^2}{\varepsilon_b^2 + \varepsilon_c^2}}. \quad (168)$$

Dado que $\alpha_+ = 0$ la función $\text{arccot}(\alpha_+) = \pi/2$ y la relación de dispersión (151) se puede reescribir como

$$k_c d_c = \pi(n + 1/2). \quad (169)$$

Al sustituir la forma de k_c de la expresión (167) en la forma de la relación de dispersión anterior se llega a los valores de k_z y k de la mitad del espectro

$$k_z = \frac{\pi(n + 1/2)}{\varepsilon_c d_c} \sqrt{\frac{\varepsilon_b \varepsilon_c^2 + \varepsilon_c \varepsilon_b^2}{\varepsilon_c - \varepsilon_b}},$$

$$k = \frac{\pi(n + 1/2)}{\varepsilon_c d_c} \sqrt{\frac{\varepsilon_b^2 + \varepsilon_c^2}{\varepsilon_c - \varepsilon_b}}. \quad (170)$$

Los valores (170) satisfacen la condición $\alpha_+ = 0$ que según nuestro análisis corresponde a la *media* de los valores posibles del parámetro α_+ , cuando k_z y k toman los valores de la expresión (170) estamos en la *mitad* de la n -ésima curva espectral.

4.2.5. Asíntota del espectro para $1 \ll \kappa_b d_c$

Por otro lado analicemos la asíntota de la n -ésima curva del espectro cuando $\kappa_b d_c$ es muy grande. Este caso es contrario al primero que ya hemos considerado. Suponemos que de

acuerdo con la Ec. (149e) κ_b esta cerca de su valor máximo tal que κ_b es mayor que k_c . Se sigue que el producto $\varepsilon_b k_c$ es mucho menor que $\varepsilon_c \kappa_b$. De acuerdo con nuestro análisis de la relación de dispersión (152) el factor α_+ tiende a menos infinito y se puede aproximar como

$$\alpha_+ \approx -\varepsilon_c \kappa_b / 2\varepsilon_b k_c \quad \text{si} \quad \varepsilon_b k_c / \varepsilon_c \kappa_b \ll 1. \quad (171)$$

Como el factor α_+ es negativo con valor absoluto mucho mayor que la unidad, el cambio $\text{arccot}(\alpha_+) \approx \pi + 1/\alpha_+$ es adecuado en la relación de dispersión (152) que en este caso se reescribe en la forma

$$k_c d_c \approx \pi(n + 1) - 2 \frac{\varepsilon_b k_c}{\varepsilon_c \kappa_b}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (172)$$

Debido que k_c es pequeño comparado con κ_b , el segundo término de la ecuación anterior es pequeño comparado con $\pi(n + 1)$, por lo que se puede considerar como una perturbación pequeña. Además, es posible sustituir κ_b por su valor máximo (149a) y k_c aproximar por $k_c \approx \pi(n + 1)/d_c$ en el segundo término de la Ec. (172). Obtenemos

$$k_c \approx \frac{\pi(n + 1)}{d_c} \left(1 - \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_c} \frac{2}{k d_c \sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon_b}} \right),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \quad (173)$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad (173) y sustituyendo la definición (145) de k_c se deriva la expresión

$$k \sqrt{\varepsilon_c} \approx \left\{ \left(\frac{\pi(n + 1)}{d_c} \right)^2 \left(1 - \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_c} \frac{2}{k d_c \sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon_b}} \right)^2 + k_z^2 \right\}^{1/2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (174)$$

A partir de la Ec. (174) se obtiene la asíntota buscada

$$k \approx k_{n+1}^{(r)}(k_z) \left\{ 1 - \frac{4 [\pi(n + 1)/d_c]^2}{\varepsilon_c d_c [k_{n+1}^{(r)}(k_z)]^3 \sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon_b}} \right\}^{1/2},$$

si $\left(\frac{2}{\varepsilon_c k d_c \sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon_b}} \right)^2 \ll 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (175)$

De modo que cuando aumentamos $k_z d_c$ el segundo término dentro de las llaves en la asíntota (175) tiende a cero y por tanto la curva tiende al borde derecho del intervalo (156) desde valores por debajo. Este comportamiento se puede apreciar en la Fig. 15 ya que a medida que $k_z d_c$ aumenta las curvas de dispersión con $n = 0, 1, 2, 3$ se aproximan a su respectivo borde derecho $k = k_{n+1}^{(r)}(k_z)$ desde valores por debajo.

También, es posible demostrar que las tres curvas $k = k_z/\sqrt{\varepsilon_c}$, $k = k_n^{(r)}(k_z)$ y $k = k_{n+1}^{(r)}(k_z)$ que limitan a la n -ésima curva de dispersión se aproximan una a la otra si k_z tiende a infinito.

Las asíntotas (163) y (175) así como los valores umbrales (166) corresponden plenamente a la región (154) donde está confinado el espectro $k = k_n(k_z)$.

4.2.6. Simetría de los modos propios localizados

Ahora se analizará la distribución del campo magnético $H_y(x)$ de los modos propios localizados. Gracias a que las amplitudes B_L^+ y B_R^- son iguales a cero, las amplitudes de onda C^+ , C^- y B_R^+ se expresan en términos de la amplitud B_L^- a partir de la relación de transferencia (76) y la Ec. (86) respectivamente. Debido a lo anterior la distribución (74) del campo magnético $H_y(x)$ se reescribe como

$$H_y^{b_L}(x) = B_L^- \exp(\kappa_b x), \quad (176a)$$

en el medio izquierdo b_L , donde $-\infty < x \leq 0$;

$$H_y^c(x) = B_L^- \left\{ \cos(k_c x) + \frac{\varepsilon_c \kappa_b}{\varepsilon_b k_c} \sin(k_c x) \right\}, \quad (176b)$$

en la capa c , donde $0 \leq x \leq d_c$,

$$H_y^{b_R}(x) = B_L^- M_{12}^{(T)} \exp(-\kappa_b [x - d_c]), \quad (176c)$$

en el medio derecho b_R , donde $d_c \leq x < \infty$.

Es fácil notar que la distribución (176) de campo magnético $H_y(x)$ es bastante similar a la distribución (64) de campo eléctrico $E_y(x)$ estudiada en el caso de polarización s . Además, se observa que en la interfaz izquierda ($b_L|c$) donde $x = 0$ las Ecs. (176a) y (176b) coinciden. Más aún, se tiene que $M_{12}^{(T)}$ es igual al término entre llaves de la Ec. (176b) cuando $x = d_c$,

$$\begin{aligned} M_{12}^{(T)} &= \alpha_- \sin(k_c d_c) \\ &= \cos(k_c d_c) + \frac{\varepsilon_c \kappa_b}{\varepsilon_b k_c} \sin(k_c d_c). \end{aligned} \quad (177)$$

Para probar esto, en la definición (150) de $M_{12}^{(T)}$ se suma y se resta el término $(\varepsilon_c \kappa_b / 2\varepsilon_b k_c) \sin(k_c d_c)$. Después de sustituir la expresión explícita de α_- , desarrollar y reagrupar, se obtiene el término $\alpha_+ \sin(k_c d_c)$. Este término se sustituye por el término $\cos(k_c d_c)$ que se obtiene de escribir la función cotangente como el cociente de las funciones coseno y seno en la relación de dispersión (151). Así se llega finalmente a la forma (177) de $M_{12}^{(T)}$. Gracias a esto se aprecia que la condición de frontera para el campo magnético en la interfaz derecha ($c|b_R$) donde $x = d_c$ se cumple automáticamente. Por esto las Ecs. (176) como debe ser cumplen las condiciones de frontera.

Para completar la descripción de la distribución del campo magnético $H_y(x)$ de los modos propios localizados es necesario saber a que es igual $M_{12}^{(T)}$ para cada modo propio. De manera similar al caso con polarización s , se puede probar que el elemento de matriz $M_{12}^{(T)}$ es igual a la unidad si n es par y a menos la unidad si n es impar,

$$M_{12}^{(T)} = \alpha_- \sin(\pi n + \text{arccot}[\alpha_+]) = (-1)^n. \quad (178)$$

Para mostrar esto se sustituye la ecuación de dispersión (152) en el argumento de la función seno de la definición (150) del

elemento de matriz $M_{12}^{(T)}$. Luego se desarrolla la función seno de la suma que aparece en el argumento. Al desarrollar la función seno de la suma se obtiene un término $\cos(\pi n)$ que es igual a $(-1)^n$. Después, se usan las relaciones entre funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas, así como la relación $\alpha_-^2 - \alpha_+^2 = 1$ para factores α_{\pm} , a fin de simplificar el coeficiente de $\cos(\pi n)$. De esta manera se obtiene que el elemento de matriz $M_{12}^{(T)}$ es igual a $(-1)^n$.

En consecuencia de la Ec. (178) el campo magnético de la onda en las interfaces derecha ($c|b_R$) e izquierda ($b_L|c$) tiene valores iguales siempre que el índice n sea par. Mas, si n fuera impar, el campo magnético en las interfaces tiene la misma magnitud, pero signo opuesto. Por tanto, la distribución (176) del campo magnético $H_y(x)$ es simétrica si n es par o antisimétrica si n es impar. Ergo, los modos propios cuyo índice n es par son simétricos y los modos propios cuya n es impar son antisimétricos con respecto del campo magnético.

A continuación en las Figs. 16 y 17 se muestra la forma de dos modos propios localizados dentro de la capa c . Uno simétrico y otro antisimétrico. Se escogieron los modos localizados con $n = 2$ y $n = 3$ del caso mostrado en la Fig. 15. A $n = 2$ le corresponden los valores $k_z d_c / \pi = 6$ y $k d_c / \pi = 2.715$. A $n = 3$ le tocan valores de $k_z d_c / \pi = 7$ y $k d_c / \pi = 3.261$. Para ambos modos se consideró que la amplitud B_L^- es positiva en las expresiones (176).

En la Fig. 16 se observa la distribución (176) del campo magnético $H_y(x)/B_L^-$ del modo propio localizado $n = 2$. Como el índice n es par, $M_{12}^{(T)} = 1$ en las expresiones (176c) y (177). En la Fig. 16 se ve que la distribución de $H_y(x)/B_L^-$ es mínima en el centro de la capa c , tiene dos máximos simétricos cerca de las interfaces ($b_L|c$) y ($c|b_R$), y decae en los medios izquierdo b_L y derecho b_R . Por lo que la distribución $H_y(x)/B_L^-$ (176) es simétrica.

En los recuadros pequeños dentro de la Fig. 16 se ve una discontinuidad de salto de la primera derivada de la distribución (176) del campo magnético $H_y(x)$ en las interfaces

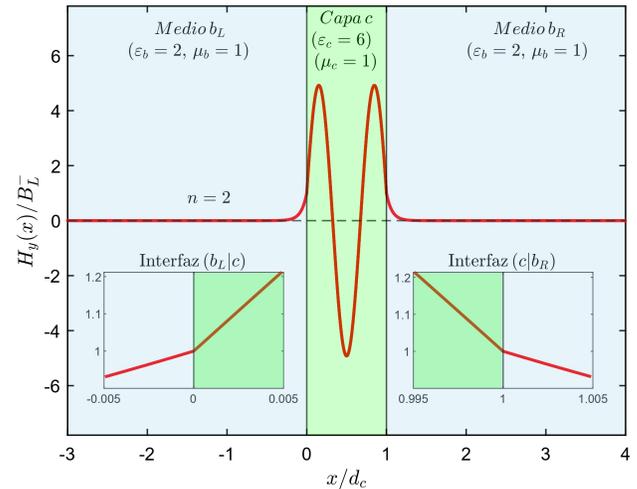


FIGURA 16. Distribución del campo magnético $H_y(x)/B_L^-$ (176) del modo propio localizado $n = 2$. Se usó que $k_z d_c / \pi = 6$ y $k d_c / \pi = 2.715$.

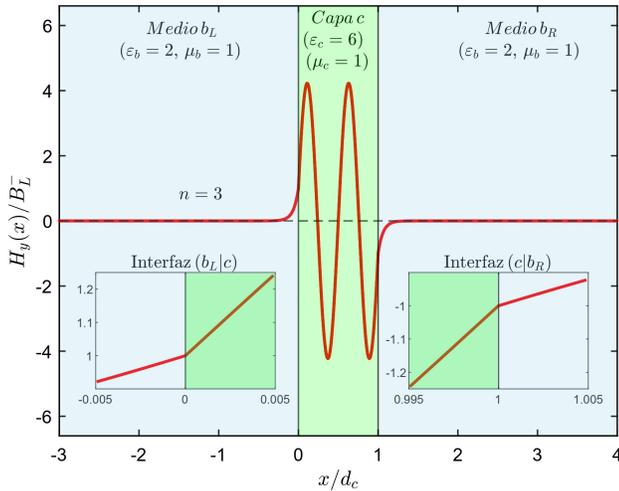


FIGURA 17. Distribución del campo magnético $H_y(x)/B_L^-$ (176) del modo propio localizado $n = 3$. Se usó que $k_z d_c/\pi = 7$ y $kd_c = 3.261$.

$(b_L|c)$ y $(c|b_R)$. Esto, como ya se mencionó anteriormente en el análisis de los modos propios simétrico y antisimétrico en la Subsec. 4.1, no implica que la componente tangencial $E_z(x)$ (69b) del campo eléctrico sea discontinua en las interfaces. Esto es debido a que el factor que multiplica a la derivada del campo magnético $H_y(x)$ en la Ec. (69b) se encarga de compensar exactamente el valor de la discontinuidad de la derivada en las interfaces $(b_L|c)$ y $(c|b_R)$. Sin embargo, la componente normal $E_x(x)$ (69a) del campo eléctrico que es proporcional al campo magnético $H_y(x)$ tiene una discontinuidad de salto en las interfaces gracias a diferentes valores del coeficiente de proporcionalidad en la capa c y en el medio circundante b .

En la Fig. 17 se graficó la distribución (176) del campo magnético $H_y(x)/B_L^-$ del modo propio localizado $n = 3$. En virtud de que el índice n es impar, la distribución de $H_y(x)/B_L^-$ es antisimétrica porque el elemento $M_{12}^{(T)} = -1$ en las Ecs. (176c) y (177). Específicamente, dentro de la capa c el campo magnético oscila, tiene dos valores máximos positivos, dos valores mínimos negativos y tres ceros. Como se muestra los valores máximos y mínimos son de la misma magnitud. También, los valores del campo magnético $H_y(x)/B_L^-$, uno positivo en la interfaz izquierda $(b_L|c)$ y el otro negativo en la interfaz derecha $(c|b_R)$, tienen la misma magnitud. Más aún, en los medios izquierdo b_L y derecho b_R el campo magnético $H_y(x)/B_L^-$, como se deduce de las expresiones (176a) y (176c), decrece exponencialmente hasta anularse conforme se aleja de la capa c .

Una vez más en los recuadros pequeños dentro de la Fig. 17 se observa una discontinuidad de salto de la primera derivada de la distribución (176) del campo magnético $H_y(x)$ en las interfaces $(b_L|c)$ y $(c|b_R)$. Empero, como ya se explicó para el modo propio simétrico, la componente tangencial $E_z(x)$ (69b) del campo eléctrico es continua en las interfaces. Por otro lado, la componente eléctrica normal $E_x(x)$ (69a) que es proporcional al campo magnético $H_y(x)$ tiene una discontinuidad de salto en las interfaces.

Como complemento a las Figs. 16 y 17, en las Figs. 18 y 19 se graficó la dinámica temporal de la parte real del campo magnético $\vec{H}(x, z, t)$ descrito por las Ecs. (67b) y (176) para varios valores del tiempo t de los modos propios simétrico con índice $n = 2$ y antisimétrico con $n = 3$, respectivamente. Los paneles (a) de las figuras corresponden al punto temporal inicial $t = 0$. Los paneles (b) se obtuvieron con el tiempo $t = T/4$, donde $T = 2\pi/\omega$ es el periodo de la onda electromagnética. El campo magnético en los paneles (c) se realiza para el tiempo $t = T/2$. Los paneles (d) corresponden al tiempo $t = 3T/4$. Cuando se completa el ciclo en $t = T$ la parte real del campo magnético $\vec{H}(x, z, t)$ coincide nuevamente con la mostrada en los paneles (a). Como se observa en las Figs. 18 y 19 el campo magnético $\vec{H}(x, z, t)$ se propaga oscilando dentro de la capa c y decae en los medios izquierdo b_L y derecho b_R .

Con ayuda de las Ecs. (69), la simetría del campo eléctrico del modo propio localizado de polarización p está directamente relacionado a la simetría de su campo magnético. De acuerdo con la relación (69a), la componente eléctrica $E_x(x)$ transversal a las interfaces, es proporcional a la única componente magnética $H_y(x)$ dada por la distribución (176). En consecuencia, sus simetrías coinciden: para números propios n pares, tanto $H_y(x)$ como $E_x(x)$ resultan ser simétricos en función de la coordenada x , mientras que para índices n impares son antisimétricos. Por el contrario, la componente eléctrica $E_z(x)$ longitudinal a las interfaces y definida por la Ec. (69b), está asociada con la primera derivada de $H_y(x)$. Por lo tanto, la simetría de la componente eléctrica $E_z(x)$ debe ser opuesta a la simetría del campo magnético $H_y(x)$: el campo simétrico $H_y(x)$ da lugar al campo antisimétrico $E_z(x)$ para índices n pares y viceversa para números propios n impares.

5. Resumen

Se estudiaron los modos propios electromagnéticos localizados en una capa dieléctrica rodeada por medios dieléctricos semi-infinitos (vea la Fig. 1). A partir del formalismo de la matriz de transferencia, se calculó analíticamente la relación de dispersión y la distribución de campo electromagnético de los modos localizados. Las polarizaciones lineales s y p , fundamentales para las ondas electromagnéticas, se analizaron por separado. Un resultado importante que se obtuvo es que las condiciones generales para la existencia de modos localizados no dependen de su polarización [compare el conjunto de las Ecs. (25) – (27) con las Ecs. (86) – (88)].

En el caso de polarización s se encontró que para dieléctricos no magnéticos existe un número infinito de modos localizados si se cumple que la permitividad de la capa dieléctrica sea positiva y mayor que la permitividad del medio circundante. Además, las curvas espectrales, presentadas en la Fig. 3, que describen a los modos propios localizados se encuentran entre dos líneas de luz que se obtienen a partir de la permitividad de la capa dieléctrica y del medio circundante.

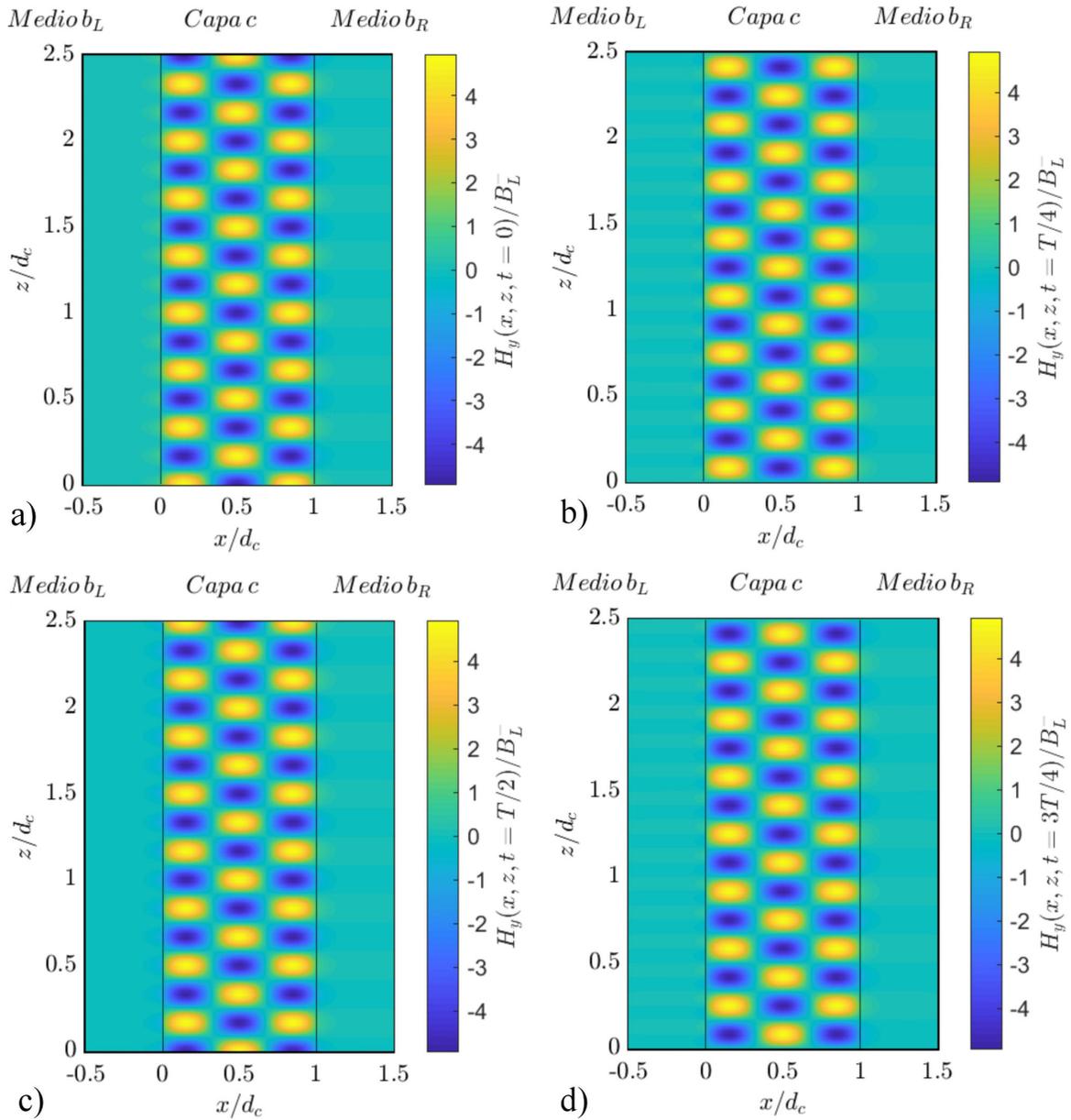


FIGURA 18. Parte real del campo magnético $\vec{H}(x, z, t)$ (67b), (176) del modo propio localizado $n = 2$: a) corresponde al tiempo $t = 0$, b) $t = T/4$, c) $t = T/2$, d) $t = 3T/4$. Para este modo propio $k_z d_c / \pi = 6$ y $k d_c / \pi = 2.715$.

te. Más aún, los modos propios tienen un valor umbral (54) a partir del cual inician. Dicho valor está sobre la línea de luz del medio circundante. Este valor del umbral de los modos propios localizados se calculó analíticamente y coincide con el valor encontrado mediante la solución numérica de la relación de dispersión. Por último, se estudió la simetría de los modos electromagnéticos localizados dependiente de su número $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Se observó que si n es par los modos propios son simétricos con respecto del campo eléctrico. Por el contrario, cuando n es impar los modos propios son antisimétricos. Estas propiedades de simetría se ilustran en las Figs. 4-7.

Para polarización p se encontraron dos tipos de modos localizados principalmente diferentes. El primero se debe a que existe solución para la relación de dispersión cuando la permitividad del medio circundante es positiva y la permitividad de la capa dieléctrica es negativa. Cabe mencionar que en polarización s la relación de dispersión no admite solución bajo esta suposición acerca de las permitividades. No obstante, en este caso ya no se tiene un número infinito de modos propios localizados. Solamente hay un modo electromagnético localizado cuyo espectro es muy complicado (vea las Figs. 10, 11 y 14) ya que depende del signo de la diferencia entre el valor absoluto de la permitividad de la capa dieléctrica y de la permitividad del medio circundante. Lo que ocurre es que la

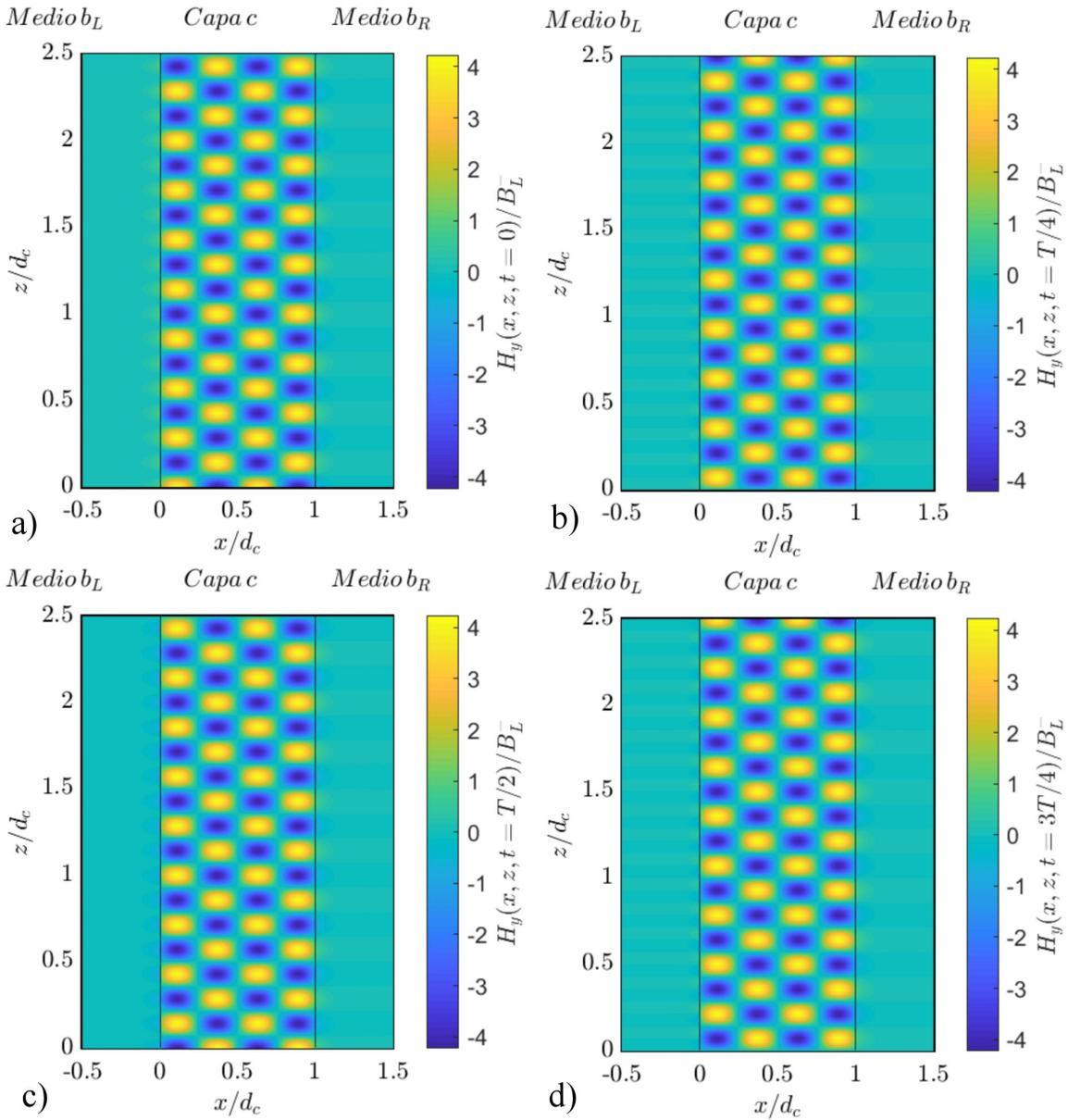


FIGURA 19. Parte real del campo magnético $\vec{H}(x, z, t)$ (67b), (176) del modo propio localizado $n = 3$: a) corresponde al tiempo $t = 0$, b) $t = T/4$, c) $t = T/2$, d) $t = 3T/4$. Para este modo propio $k_z d_c / \pi = 7$ y $k d_c = 3.261$.

relación de dispersión general (88) se divide en dos relaciones de dispersión diferentes (96). Una de ellas corresponde al modo propio localizado con el campo magnético simétrico (Fig. 8), mientras que la otra al campo magnético antisimétrico (Fig. 12). En el caso del modo localizado simétrico existen dos subcasos que se determinan por el signo de una característica de gran importancia ϵ_{red} que se introdujo en la Ec. (100) llamándola permitividad eléctrica reducida. Si ϵ_{red} es negativa, el espectro del modo localizado simétrico que se muestra en la Fig. 10 está acotado por la línea de luz que se obtiene a partir de la permitividad del medio circundante. Además, existe un punto en el plano de fase (108) en donde termina el espectro de este modo localizado simétrico. El cálculo analítico de este valor coincide con el valor numérico

encontrado mediante la solución numérica de la relación de dispersión. Ahora bien, si ϵ_{red} es positiva la curva espectral del modo localizado simétrico (vea la Fig. 11) está acotada entre dos líneas de luz características. Una se obtiene a partir de la permitividad del medio circundante y la otra se define por la permitividad reducida ϵ_{red} . Al analizar el modo localizado antisimétrico se encontró que existe solución a la relación de dispersión de este modo solo si ϵ_{red} es positiva. A diferencia del modo simétrico, el espectro del modo antisimétrico, presentado en la Fig. 14, inicia de un valor umbral (133) y está por debajo de la línea de luz definida por ϵ_{red} . Los valores del umbral encontrados numéricamente y analíticamente a partir de la relación de dispersión coinciden.

El segundo tipo de modos propios localizados con polarización p es bastante similar al estudiado en polarización s . Específicamente, existe solución para la relación de dispersión cuando la permitividad del medio circundante y la permitividad de la capa dieléctrica son ambas positivas. Hay un número infinito de modos electromagnéticos localizados si la permitividad de la capa dieléctrica es mayor que la permitividad del medio circundante. También, ocurre que las curvas espectrales que describen a los modos propios localizados (véase la Fig. 15) se encuentran entre dos líneas de luz definidas por la permitividad de la capa dieléctrica y del medio circundante. Además, se encontró que el valor umbral de los modos propios no depende de su polarización en virtud de que las definiciones del umbral (166) para la polarización p y (54) para la polarización s coinciden. Finalmente, se estudió la simetría de los modos electromagnéticos localizados. Como puede verse de las Figs. 16–19, cuando el número de

modo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ es par los modos propios son simétricos y si n es impar los modos propios son antisimétricos con respecto del campo magnético.

Agradecimientos

Este trabajo fue parcialmente apoyado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) y la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (VIEP, BUAP). J.G. Medrano agradece: al CONACYT por la beca otorgada; al Dr. F.J. Flores-Ruiz por la ayuda concedida durante la elaboración de los cálculos numéricos y por compartir sus conocimientos en esta rama; así como a la Dra S. Pérez-Díaz por sus trascendentes observaciones y todo el apoyo suministrado durante este trabajo. N.M. Makarov agradece al Dr. V.A. Yampol'skii por sus útiles comentarios.

1. Z. N. Chen, D. Liu, H. Nakano, X. Qing and T. Zwick, Handbook of antenna technologies, (Springer Publishing Company, Incorporated, 2016).
2. H. E. Hernández-Figueroa, M. Zamboni-Rached, and E. Recami, Localized waves, vol. 194 (John Wiley & Sons, 2008).
3. P. Markos and C. M. Soukoulis, Wave Propagation: From Electrons to Photonic Crystals and Left-Handed Materials (Princeton University Press, 2008), <https://doi.org/10.1515/9781400835676>.
4. T. M. Slipchenko, D. V. Kadygrob, D. Bogdanis, V. A. Yampol'skii and A. A. Krokhin, Surface and waveguide Josephson plasma waves in slabs of layered superconductors, *Phys. Rev. B* **84** (2011) 224512, <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.84.224512>.
5. S. Cortés-López and F. Pérez-Rodríguez, Nonlocal optical response of a layered high-temperature superconductor slab, *Low Temperature Physics* **44** (2018) 1272, <https://doi.org/10.1063/1.5078611>.
6. S. Cortés-López and F. Pérez-Rodríguez, Excitation of Josephson plasma waves in a layered high-temperature superconductor slab embedded in a high refractive index dielectric, *Low Temperature Physics* **46** (2020) 531, <https://doi.org/10.1063/10.0001058>.
7. S. S. Apostolov, V. I. Havrilenko, Z. A. Maizelis and V. A. Yampol'skii, Anomalous dispersion of surface and waveguide modes in layered superconductor slabs, *Low Temperature Physics* **43** (2017) 296, <https://doi.org/10.1063/1.4977740>.
8. S. S. Apostolov, N. M. Makarov, and V. A. Yampol'skii, Excitation of terahertz modes localized on a layered superconductor: Anomalous dispersion and resonant transmission, *Phys. Rev. B* **97** (2018) 024510, <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.97.024510>.
9. Y. Zhu, D. J. Gauthier, S. E. Morin, Q. Wu, H. J. Carmichael and T. W. Mossberg, Vacuum Rabi splitting as a feature of linear dispersion theory: Analysis and experimental observations, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 2499, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.2499>.
10. C. Weisbuch, M. Nishioka, A. Ishikawa and Y. Arakawa, Observation of the coupled exciton-photon mode splitting in a semiconductor quantum microcavity, *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 3314, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.69.3314>.
11. B. Deveaud, The Physics of Semiconductor Microcavities (Wiley-VCH, 2007).
12. P. A. Hobson *et al.*, Strong exciton-photon coupling in a low-Q all-metal mirror microcavity, *Appl. Phys. Lett.* **81** (2002) 3519, <https://doi.org/10.1063/1.1517714>.
13. P. L. Valdés-Negrin, B. Flores-Desirena, M. Toledo-Solano y F. Pérez-Rodríguez, Magnetoexciton-photon coupling in a semiconductor quantum microcavity subjected to a parallel electric field, *AIP Advances* **10** (2020) 065223, <https://doi.org/10.1063/5.0011533>.
14. P. L. Valdés-Negrin, N. M. Makarov, and F. Pérez-Rodríguez, Excitation of weak and strong guided waves in a semiconductor slab and their strong coupling with confined magnetoexcitons, *Phys. Rev. B* **105** (2022) 245309, <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.105.245309>.