

Aparato para realizar experimentos de Fluorescencia de Rayos X y de pérdida de energía de partículas α en un laboratorio de Física a nivel licenciatura

J. A. Mendoza-Flores^a, D. L. Serrano-Juárez^a, J. C. Pineda^a, S. Reynoso-Cruces^{b,*} y J. Miranda^{a,*}

^a *Departamento de Física Nuclear y Aplicaciones de la Radiación Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México,*

Circuito Investigación Científica S/N, Ciudad Universitaria 04510, Coyoacán, CDMX.

**e-mail: miranda@fisica.unam.mx;*

ORCID 0000-0003-4745-3050.

^b *Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito Exterior S/N, Ciudad Universitaria 04510 Coyoacán, CDMX.*

**ORCID 0000-0001-6283-915X*

Received 21 August 2023; accepted 28 September 2023

Se describen el diseño y el funcionamiento de un dispositivo para realizar experimentos de espectrometrías de rayos X y de partículas cargadas, en un laboratorio avanzado de enseñanza de Física, a nivel licenciatura. Se presentan dos experimentos que pueden llevarse a cabo en seis sesiones de tres horas, cada uno. La primera práctica se refiere a la medición de probabilidades de transiciones radiativas de vacantes con fluorescencia de rayos X, usando la radiación γ producida por una fuente de ^{241}Am para inducir la emisión de rayos X K de elementos lantanoides. En el segundo experimento se mide el espesor de una muestra delgada de un polímero, mediante la pérdida de energía de partículas α emitidas por una fuente triple de ^{239}Pu - ^{241}Am - ^{244}Cm al atravesar el blanco. Con esto, los alumnos reciben una introducción a las técnicas de vacío, manejo de fuentes radiactivas, detectores de radiación ionizante y electrónica nuclear, así como también se muestra la importancia del cálculo de incertidumbres y errores experimentales.

Descriptores: Espectrometría; instrumentación; fluorescencia de rayos X; partículas α .

The design and operation of a device for conducting X-ray and charged particle spectrometry experiments in an advanced Physics teaching laboratory at the undergraduate level are described. Two experiments are presented that can be carried out in six sessions of three hours each. The first practice concerns the measurement of probabilities of radiative transitions of vacancies with X-ray fluorescence, using the γ radiation produced by a ^{241}Am source to induce the emission of K X-rays from lanthanoid elements. In the second experiment, the thickness of a thin sample of a polymer is measured through the energy lost by α particles emitted by a ^{239}Pu - ^{241}Am - ^{244}Cm triple source when passing through the target. With this, students receive an introduction to vacuum techniques, radioactive sources handling, ionizing radiation detectors, and nuclear electronics, as well as the importance of evaluating experimental uncertainties and errors.

Keywords: Spectrometry; instrumentation; X-ray fluorescence; α particles.

DOI: <https://doi.org/10.31349/RevMexFis.21.020206>

1. Introducción

Recientemente, se modificaron los cursos de laboratorio de Física Contemporánea, impartidos a los estudiantes de la licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). El objetivo principal es permitir que los estudiantes trabajen en laboratorios de investigación ubicados en otros institutos científicos de la UNAM, estrechamente vinculados a la Facultad de Ciencias, además de realizar experimentos en los laboratorios de docencia de la Facultad de Ciencias. Entre los sitios participantes, el Laboratorio de Aerosoles, perteneciente al Instituto de Física de la UNAM, ha ofrecido con frecuencia la posibilidad de llevar a cabo experimentos basados en aplicaciones de fluorescencia de rayos X (XRF, por sus siglas en inglés). Los temas de los experimentos incorporan física atómica básica o análisis de muestras como suelos, aerosoles atmosféricos, plantas o alimentos [1].

La técnica de XRF se ha utilizado previamente en varios trabajos para experimentos a nivel de pregrado [2–7]. Los experimentos propuestos incluían la medición de parámetros básicos o análisis cuantitativos. La mayoría de los trabajos se basó en fuentes radiactivas, pero también se empleó un haz de protones de un acelerador para inducir la emisión de rayos X característicos [4]. Por lo general, se han utilizado fuentes de ^{241}Am [2, 5, 6], aunque también ^{57}Co [7] y ^{239}Pu [3] se usaron como emisores de radiación primaria. Estos isótopos producen fotones con intervalos de energía registrados fácilmente con detectores comunes, como los de $\text{Si}(\text{Li})$ o centelleadores $\text{NaI}(\text{Tl})$. Recientemente, se propuso el uso de interfaces Arduino para procesar las señales electrónicas provenientes de espectrómetros de fotones [8].

Por otro lado, las mediciones de pérdida de energía de partículas α también han sido descritas para laboratorios de licenciatura por varios autores [9–12]. Se han propuesto diferentes experimentos, utilizando fuentes ^{210}Po y ^{241}Am . Por

lo general, se determinó la pérdida de energía de los iones y la anchura de su distribución de energías (*straggling*), con diversas configuraciones experimentales. También se describe el funcionamiento de un dispositivo que permite hacer espectroscopía α y β mediante un imán anular permanente [13].

Con el objetivo de proponer una variedad más amplia de experimentos disponibles, se construyó un dispositivo para medir diferentes cantidades relacionadas con la emisión característica de rayos X o el espesor de película delgada, utilizando fuentes radiactivas, para operar en el Laboratorio de Aerosoles. Para el primer tema, la radiación gamma emitida por una fuente de ^{241}Am se utiliza para la medición de parámetros básicos relacionados con la emisión característica de rayos X, mientras que, para el segundo, la base es una fuente emisora de partículas α ^{239}Pu - ^{241}Am - ^{244}Cm , para determinar espesores de película delgada. El equipo se puede modificar fácilmente para llevar a cabo los experimentos de rayos X o de partículas α , y está construido con componentes disponibles comercialmente.

2. El aparato

Como el objetivo principal del dispositivo es su uso con dos tipos diferentes de radiación (fotones o partículas cargadas), era deseable construir el sistema con componentes fácilmente intercambiables. Además, es necesario trabajar en condiciones de vacío, para reducir la absorción de rayos X o la pérdida de energía de los iones en el aire dentro del dispositivo.

Por lo tanto, el sistema se ensambló como se esboza en la Fig. 1, que es una vista superior del sistema. El diseño original se describe con detalle en el trabajo de Mendoza [14]. Consta de varios componentes de vacío de acero inoxidable,

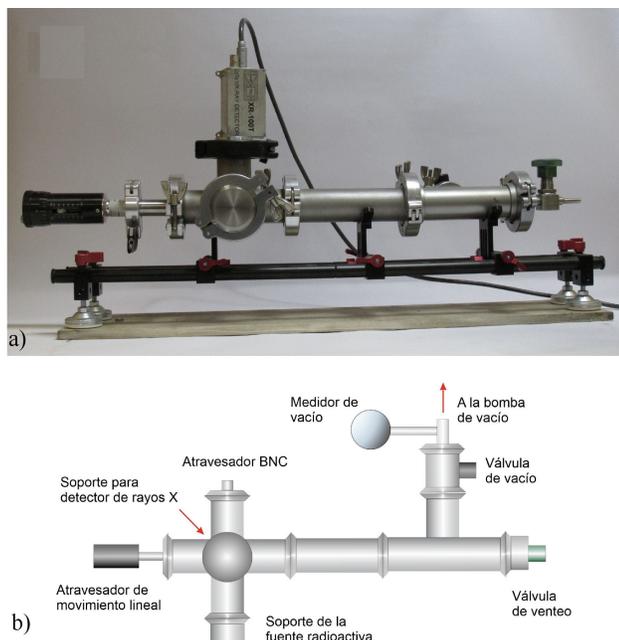


FIGURE 1. a) Fotografía y b) vista superior del aparato para espectrometrías de rayos X y de partículas cargadas.

basados en el estándar NW40. La longitud total del dispositivo es de 63 cm. La parte principal es una cruz de cinco vías. Aquí, es posible conectar un soporte para las fuentes radiactivas, una alimentación electrónica BNC a través de la señal del detector de partículas o un soporte para el detector de rayos X. Además, en otra rama de la cruz de cinco vías se utiliza un atravesador lineal que sirve para la inserción de la muestra y la rama opuesta para conectar el equipo con el que se hará el vacío.

Otros componentes necesarios están relacionados con la producción de vacío, como un medidor de termopar (TGT-6000, MDC Vacuum, Hayward, CA, EUA) con el controlador correspondiente (DVM, MDC Vacuum), una válvula de mariposa para aislar el sistema de la bomba de vacío y una válvula de ventilación para permitir la entrada de aire al sistema. El vacío se consigue con una bomba mecánica Varian SD-40. Con este sistema, es posible alcanzar una presión de 0.65 Pa (5 mTorr).

Las muestras pueden ser gruesas, en forma de pastillas, láminas o paralelepípedos, o blancos delgados, como películas depositadas sobre sustratos delgados, preferiblemente circulares con un diámetro máximo de 25 mm. Las muestras se pueden colocar en su lugar en el atravesador de movimiento lineal (MDC Vacuum).

Los detectores pueden ubicarse en diferentes brazos de la cruz de cinco vías, dependiendo del tipo de radiación utilizada. Por lo tanto, como se muestra en la Fig. 2, que es una vista lateral del sistema, el detector de rayos X (Amptek XR-100CdTe) se fija en la posición superior, con un ángulo de 90° desde la fuente radiactiva. Los fotones emitidos por la fuente inciden en el blanco a un ángulo de 45° con su normal. El soporte de la fuente está diseñado para acomodar un cilindro de 5 mm con una fuente de ^{241}Am , con actividad de 1.72 GBq. El detector CdTe tiene una buena eficiencia para el intervalo de energía alrededor de los fotones γ de 59.54 keV emitidos por la fuente [15]. El detector tiene una resolución

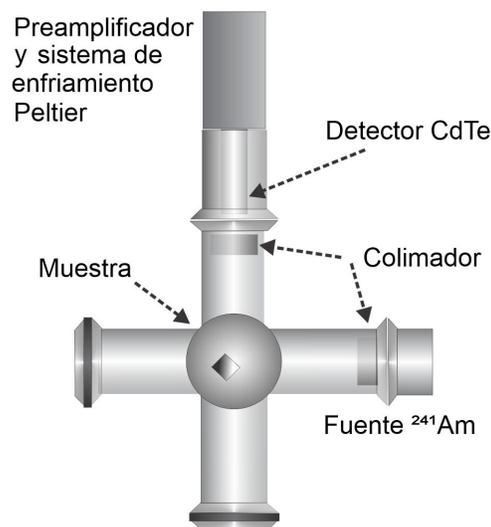


FIGURE 2. Vista lateral de la cámara de irradiación para su uso en espectrometría de rayos X.

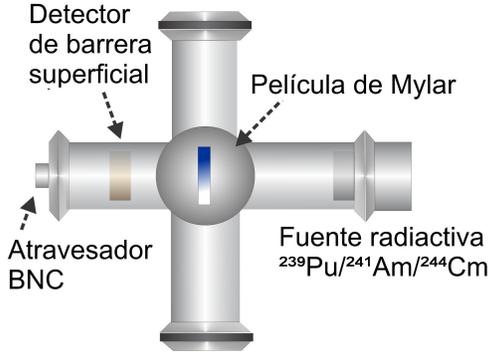


FIGURE 3. Vista superior de la cámara de irradiación para su uso en espectrometría de partículas cargadas.

nominal de 1.5 keV a 122 keV, un área activa de 25 mm², un espesor de 1 mm y una ventana Be de 100 μm de espesor.

En contraste, el detector de partículas se coloca en la misma dirección que las partículas α emitidas por la fuente, detrás del blanco, como se muestra en la Fig. 3. Las partículas se registran con un detector de barrera superficial (Ortec, modelo BU-011-025-300), que tiene un área activa de 25 mm² y una profundidad de agotamiento de 300 μm, con una resolución de 11 keV para partículas α, estas son producidas por una fuente triple de ²³⁹Pu-²⁴¹Am-²⁴⁴Cm, con 25 mm de diámetro y una actividad 110 kBq.

Debe enfatizarse que el uso del dispositivo ofrece a los alumnos la posibilidad de familiarizarse con el manejo de equipos de vacío (producción y medición), así como de conceptos elementales de detección de radiación ionizante y electrónica nuclear.

3. Experimentos propuestos

Como se mencionó anteriormente, el aparato se puede utilizar para dos tipos de experimentos: espectrometrías de rayos X y de partículas cargadas. Debido a que las prácticas del curso se llevan a cabo en seis sesiones de tres horas, es conveniente que la recolección de cada espectro, junto con el análisis de los resultados, pueda completarse en ese tiempo. De esta forma, se presentan ejemplos de experimentos en cada uno de los temas.

3.1. Espectrometría de rayos X

El primer paso para este experimento es la medición de la eficiencia del sistema de detección. En particular, se requiere determinar la *eficiencia absoluta* ϵ_{abs} del detector, definida como [15]:

$$\epsilon_{abs} = \frac{\text{Número de pulsos registrados}}{\text{Número de pulsos emitidos por la fuente}}, \quad (1)$$

la cual depende de la energía de los fotones incidentes y puede medirse por medio de fuentes radiactivas calibradas, que emitan rayos γ o X. Si se tiene una fuente cuya actividad es A_0 en su fecha de calibración, la eficiencia para fotones de una línea de energía E_f , es:

$$\epsilon_{abs}(E_f) = \frac{N_X e^{\mu \rho t}}{A_0 e^{-(\ln 2) \tau / \tau_{1/2}} \Gamma(E_f) T}. \quad (2)$$

En esta ecuación, N_X es el número de fotones registrados por el detector para la línea de interés, μ es el coeficiente másico de atenuación de los fotones en el material de la fuente radiactiva, ρ es la densidad y t el espesor de dicho material que deben atravesar los fotones al salir de la fuente, τ es el tiempo transcurrido desde la calibración de la fuente y la fecha de la medición de la eficiencia del detector, $\tau_{1/2}$ es la vida media del radioisótopo de la fuente, $\Gamma(E_f)$ es la intensidad relativa de la línea emitida por la fuente, y T es el tiempo de recolección del espectro para la medición de la eficiencia.

Si un fotón de rayos X incide en un átomo blanco, existe la probabilidad de que un electrón sea expulsado de este, produciendo una vacante en la capa K (que corresponde al número cuántico principal $n = 1$) [16]. El hueco generado en la capa K será ocupado por medio de una transición radiativa o no radiativa. La probabilidad total de transferencia de vacantes para la capa K a cualquiera de las subcapas L (de número cuántico principal $n = 2$), η_{KL_i} , es igual a la suma de la probabilidad de transferencia radiativa de vacantes $\eta_{KL_i}(R)$ y la probabilidad de transferencia no radiativa de vacantes $\eta_{KL_i}(A)$:

$$\eta_{KL_i} = \eta_{KL_i}(R) + \eta_{KL_i}(A). \quad (3)$$

La probabilidad de transferencia radiativa de vacantes se obtiene a través de la ecuación

$$\eta_{KL_i} = \omega_K \left[\frac{I(KL_i)}{I_K(R)} \right]. \quad (4)$$

En este caso, $I(KL_i)$ denota la intensidad de rayos X debidos a la transición K a L_i , $I_K(R)$ es la intensidad total de los rayos X K, y ω_K es la producción de fluorescencia de la capa K. Como la transición radiativa de L_1 a K tiene una probabilidad de ocurrencia sumamente baja, solo se requiere calcular las probabilidades de transferencia de vacantes radiativas η_{KL_2} y η_{KL_3} para L_2 a K y para L_3 a K, respectivamente, utilizando las ecuaciones:

$$\eta_{KL_2} = \omega_K \left[\frac{I(K_{\alpha 2})}{I(K_{\alpha 1})} \right] \times \left\{ \left[1 + \frac{I(K_{\alpha 2})}{I(K_{\alpha 1})} \right] \left[1 + \frac{I(K_{\beta})}{I(K_{\alpha})} \right] \right\}^{-1}, \quad (5)$$

$$\eta_{KL_3} = \omega_K \left\{ \left[1 + \frac{I(K_{\alpha 2})}{I(K_{\alpha 1})} \right] \left[1 + \frac{I(K_{\beta})}{I(K_{\alpha})} \right] \right\}^{-1}, \quad (6)$$

donde $I(K_{\alpha 2})/I(K_{\alpha 1})$ e $I(K_{\beta})/I(K_{\alpha})$ representan los cocientes de intensidad de rayos K de las líneas correspondientes. El Apéndice A muestra cómo derivar las Ecs. (5) y (6) a partir de la Ec. (4). Como consecuencia, es posible ver que, midiendo solo la intensidad de las líneas K de rayos X, se

pueden determinar las probabilidades de transferencia radiativa de vacantes η_{KL_i} . Las intensidades de las líneas deben corregirse por la eficiencia del sistema de detección, calculada con la Ec. (2), así como por la diferencia en la atenuación de las líneas K_α y K_β dentro del mismo blanco.

Si se supone que los fotones γ emitidos por la fuente ven reducida su intensidad a la mitad a una profundidad $d_{1/2}$ dentro del blanco, en una primera aproximación el cociente de las intensidades “reales” $I_0(K_\beta)$ e $I_0(K_\alpha)$ de las líneas K_α y K_β , respectivamente, se obtiene con la ecuación:

$$\frac{I_0(K_\alpha)}{I_0(K_\beta)} = \frac{I(K_\alpha)}{I(K_\beta)} e^{\ln 2 \frac{(\mu_\alpha - \mu_\beta)}{\mu_\gamma}}, \quad (7)$$

ecuación en la que μ_α y μ_β son los coeficientes másicos de atenuación de las líneas K_α y K_β , respectivamente, y μ_γ es el coeficiente másico de atenuación de los fotones γ de la fuente, todos en el material que constituye el blanco.

La combinación de la fuente ^{241}Am y el detector CdTe es muy adecuada para medir las probabilidades de transferencia radiativa de elementos lantanoides, como Sm, Gd, Tb, Dy, Ho y Er (con números atómicos Z entre 62 y 68). Esto se debe a que las energías de enlace de la capa K están comprendidas en el intervalo entre 43.5 keV y 57.5 keV, por lo que pueden ser ionizadas por los fotones γ de ^{241}Am de 59.54 keV con una alta sección eficaz fotoeléctrica.

Para este experimento, se utilizaron como blancos cubos de 1 cm de lado de los elementos lantanoides Sm, Gd, Tb y Dy, de pureza superior al 99 % (X. Chen, Pu Tian, China). Los espectros de rayos X K se recolectaron durante 60 min cada uno y se analizaron con el programa especializado AXIL [17]. Los coeficientes másicos de atenuación se calcularon por medio del programa XCOM [18] y las producciones de fluorescencia se obtienen de las tablas publicadas por Krause [19].

La eficiencia del sistema de detección se midió con dos fuentes radiactivas calibradas, de ^{241}Am (0.35 MBq, encapsulada en aluminio) y de ^{137}Cs (0.26 MBq, encapsulada en acrílico). Para la primera fuente se consideran las líneas γ de 26.344 keV, 33.196 keV, 43.420 keV y 59.541 keV, mientras que para la segunda se usan los rayos X de Ba, de 30.970 keV (K_α) y 34.984 keV (K_β), elemento proveniente del decaimiento β^- . Las fuentes se colocan de forma que la normal es paralela a la dirección del detector. Los datos de los decaimientos radiactivos se extrajeron del *National Nuclear Data Center*, de los E.U.A. [20]. Los espectros se recolectaron durante 2 h cada uno.

3.2. Espectrometría de partículas cargadas (iones)

El blanco analizado fue una película de Mylar[®] con un espesor medio de 483 (24) $\mu\text{g}/\text{cm}^2$, medido inicialmente con un tornillo micrométrico digital (resolución de 1 μm), con diez repeticiones. La configuración experimental para la medición con la fuente radiactiva se muestra en la Fig. 3. Un detector Ortec ULTRA, de silicio implantado con iones (resolución

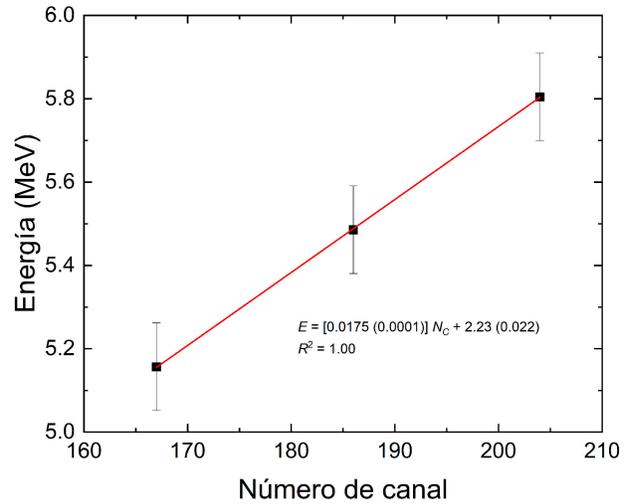


FIGURE 4. Calibración del eje de energías de partículas α usando una fuente triple ^{239}Pu - ^{241}Am - ^{244}Cm .

nominal de 11 keV a 5.486 MeV), colocado en línea recta en la dirección opuesta a las partículas incidentes, se utilizó para medir la pérdida de energía de las partículas α . El eje de las energías en cada espectro se calibró con las energías de los iones provenientes de la fuente radiactiva de ^{244}Pu - ^{241}Am - ^{239}Cm (5.1566 MeV, 5.4856 MeV y 5.8048 MeV, respectivamente) [20], sin un blanco de por medio. La Fig. 4 muestra la gráfica para la calibración de dicho eje. La presión dentro del aparato fue de alrededor de 5 Pa (38 mTorr). El espesor t de la película de Mylar[®] se obtuvo directamente de la ecuación de poder de frenado:

$$t = \frac{E_i - E_f}{S(E_i)}. \quad (8)$$

Aquí, E_i y E_f son la energía de las partículas α antes y después de pasar a través del blanco, respectivamente; $S(E_i)$ es el poder de frenado de Mylar[®] a una energía E_i . Los valores de poder de frenado para las partículas α se tomaron del código SRIM [21], utilizando un ajuste polinomial de segundo grado. El experimento puede repetirse en varias ocasiones, con el fin de obtener un promedio de los espesores medidos con cada una de las energías de las partículas α . Alternativamente, cabe hacer notar que, si se da por conocido el espesor de la película, es posible obtener el poder de frenado para cada una de las energías de las partículas α emitidas por la fuente.

4. Resultados

4.1. Espectrometría de rayos X

La eficiencia del sistema de detección de rayos X puede apreciarse en la Fig. 5. Se presenta un ajuste lineal a los datos experimentales, cuyo intervalo de validez cubre las energías de las líneas K de los elementos lantanoides por estudiar.

Los espectros de los rayos X K de los elementos Sm, Gd, Tb y Dy, obtenidos con el detector CdTe, se muestran en la

TABLE I. Probabilidades de transferencia radiativa de vacantes medidas y de referencia.

Elemento	ω_K	Experimental		Referencia		Error	
		η_{KL_2}	η_{KL_3}	η_{KL_2}	η_{KL_3}	η_{KL_2}	η_{KL_3}
Sm	0.929	0.267 (0.0044)	0.453 (0.0045)	0.267	0.483	0 %	-6 %
Gd	0.935	0.266 (0.0042)	0.459 (0.0046)	0.269	0.483	-1 %	-5 %
Tb	0.938	0.261 (0.0038)	0.468 (0.0047)	0.270	0.484	-3 %	-3 %
Dy	0.941	0.276 (0.0043)	0.465 (0.0046)	0.271	0.484	2 %	-4 %

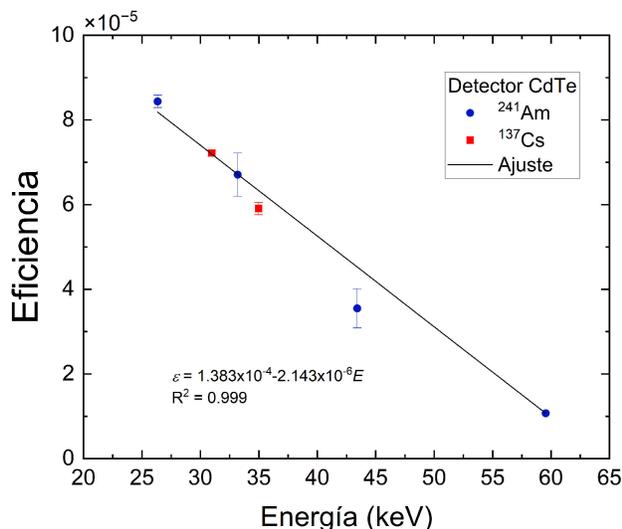


FIGURE 5. Eficiencia del sistema de detección de rayos X, basado en un detector CdTe.

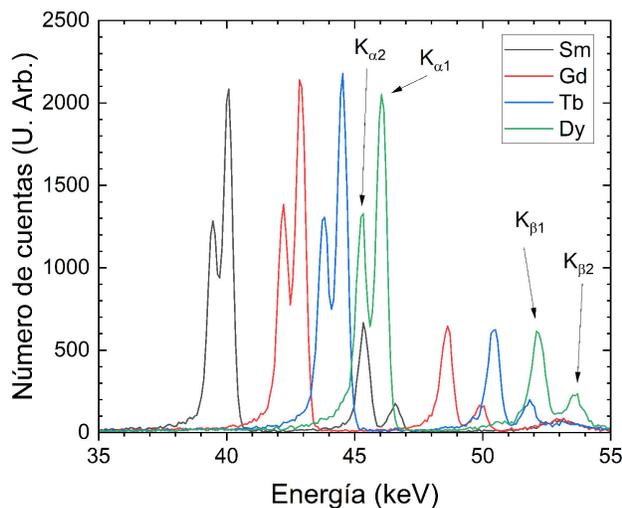


FIGURE 6. Espectros de rayos X K de los elementos lantanoides Sm, Gd, Tb y Dy, inducidos por la radiación α de 59.54 keV, emitidos por una fuente de ^{241}Am .

Fig. 6. En ella es posible apreciar que las líneas $K_{\alpha 1}$, $K_{\alpha 2}$, $K_{\beta 1}$ y $K_{\beta 2}$ están bien resueltas por el sistema de detección. Por tanto, mediante el programa AXIL, es posible determinar las áreas para cada uno de los picos y así calcular las probabilidades de transferencia radiativa de vacantes. Un ejemplo

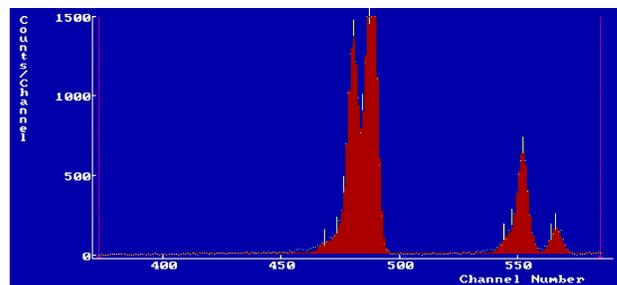


FIGURE 7. Espectro de rayos X de Gd ajustado con el programa AXIL.

de espectro ajustado se muestra en la Fig. 7, para el caso del Gd. Los factores de corrección debidos a la atenuación de los rayos X en el blanco, según la Ec. (7), son 1.113, 1.097, 1.089 y 1.083, para Sm, Gd, Tb y Dy, respectivamente. En la Tabla I se encuentran las probabilidades de transferencia radiativa de vacantes medidas, además de valores de referencia teóricos, obtenidos con las intensidades relativas publicadas por Scofield [22] y las producciones de fluorescencia ω_K de las tablas de Krause [19]. Las incertidumbres se evalúan conforme a lo explicado en el Apéndice B. En la Tabla I, además, se muestra el error porcentual para cada una de las probabilidades medidas, los cuales son menores que el 10 %.

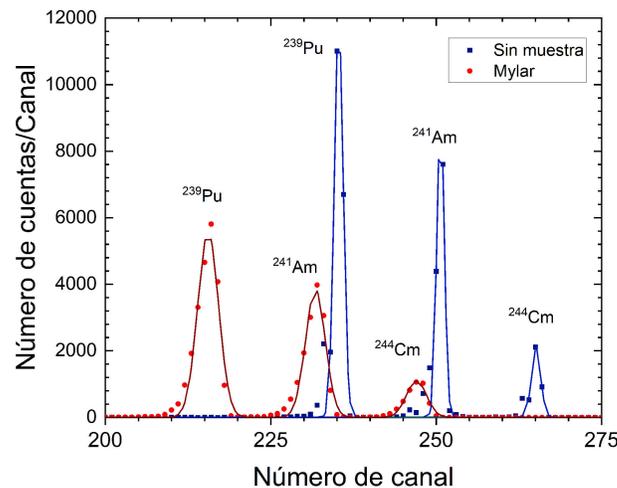


FIGURE 8. Espectros de partículas α emitidas por una fuente triple de ^{239}Pu - ^{241}Am - ^{244}Cm ., sin blanco y con una película de Mylar® entre la fuente y el detector.

TABLE II. Espesor de la película de Mylar[®] medida por transmisión de partículas α .

Repetición	Espesor ($\mu\text{g}/\text{cm}^2$)	Error
1	469 (16)	3 %
2	524 (7)	8 %
3	507 (9)	8 %
4	490 (10)	1 %
5	510 (12)	6 %

4.2. Espectrometría de partículas cargadas (iones).

La Fig. 8 presenta los espectros de las partículas α emitidas por la fuente triple, registrados por el detector directamente y con la película de Mylar[®] entre la fuente y el detector. La Tabla II contiene el resultado del espesor promedio de la película de Mylar[®], haciendo cinco repeticiones del experimento, junto con su error porcentual, recordando que el espesor medido con un tornillo micrométrico es de 483 (24) $\mu\text{g}/\text{cm}^2$. El espesor promedio, entonces, es de 500 (24) $\mu\text{g}/\text{cm}^2$, lo cual da un error del 4 %.

5. Conclusiones

Se desarrolló un dispositivo que permite realizar experimentos didácticos para un laboratorio avanzado de la licenciatura en Física, utilizando fuentes radiactivas y detectores de radiación de estado sólido, tanto para fotones como partículas cargadas. Las mediciones se pueden realizar en sesiones de tres horas, para satisfacer los requisitos del curso. Los alumnos tienen la posibilidad de introducirse en el manejo de equipos de vacío, detectores de radiación ionizante, electrónica nuclear y programas de cómputo especializados para el análisis de los espectros. La obtención de los resultados es simple, resaltando la necesidad de evaluar las incertidumbres experimentales y de comparar con valores de referencia, ya sea teóricos o medidos directamente con otros dispositivos.

Apéndice

A. Derivación de las ecuaciones para cálculo de probabilidades de transferencia radiativa de vacantes

La definición de probabilidad de transferencia radiativa de vacantes, para una transición de una subcapa L_i a la capa K , η_{KL_i} , es:

$$\eta_{KL_i} = \omega_K \frac{I(KL_i)}{I_K(R)}, \quad (\text{A.1})$$

donde ω_K es la producción de fluorescencia, $I(KL_i)$ es la intensidad de la línea de rayos X asociada con esta transición e $I_K(R)$ es la intensidad total de los rayos X K.

Se tiene que la línea $K_{\alpha 1}$ corresponde a la transición KL_3 , mientras que $K_{\alpha 2}$ se asocia con la transición KL_2 . Además, la intensidad total $I_K(R)$ debe ser igual a la suma de K_{α} y K_{β} en donde, por comodidad de la notación, se han simplificado las intensidades de cada línea $I(K_{\alpha}) = K_{\alpha}$ e $I(K_{\beta}) = K_{\beta}$. También, se puede escribir $K_{\alpha} = K_{\alpha 1} + K_{\alpha 2}$.

Para la intensidad total se puede escribir, entonces:

$$I(R) = K_{\alpha} + K_{\beta} = K_{\alpha} \left(1 + \frac{K_{\beta}}{K_{\alpha}} \right), \quad (\text{A.2})$$

y para η_{KL_3} :

$$\begin{aligned} \eta_{KL_3} &= \omega_K \frac{K_{\alpha 1}}{K_{\alpha} \left(1 + \frac{K_{\beta}}{K_{\alpha}} \right)} = \frac{\omega_K}{\left(1 + \frac{K_{\beta}}{K_{\alpha}} \right)} \frac{K_{\alpha 1}}{K_{\alpha 1} + K_{\alpha 2}} \\ &= \frac{\omega_K}{\left(1 + \frac{K_{\beta}}{K_{\alpha}} \right)} \frac{K_{\alpha 1}}{K_{\alpha 1} \left(1 + \frac{K_{\alpha 2}}{K_{\alpha 1}} \right)} \\ &= \frac{\omega_K}{\left(1 + \frac{K_{\beta}}{K_{\alpha}} \right) \left(1 + \frac{K_{\alpha 2}}{K_{\alpha 1}} \right)}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Por otro lado, para η_{KL_2} :

$$\begin{aligned} \eta_{KL_2} &= \omega_K \frac{K_{\alpha 2}}{K_{\alpha} \left(1 + \frac{K_{\beta}}{K_{\alpha}} \right)} = \frac{\omega_K}{\left(1 + \frac{K_{\beta}}{K_{\alpha}} \right)} \frac{K_{\alpha 2}}{K_{\alpha 1} + K_{\alpha 2}} \\ &= \frac{\omega_K}{\left(1 + \frac{K_{\beta}}{K_{\alpha}} \right)} \frac{K_{\alpha 2}}{K_{\alpha 1} \left(1 + \frac{K_{\alpha 2}}{K_{\alpha 1}} \right)} \\ &= \frac{\omega_K \left(\frac{K_{\alpha 2}}{K_{\alpha 1}} \right)}{\left(1 + \frac{K_{\beta}}{K_{\alpha}} \right) \left(1 + \frac{K_{\alpha 2}}{K_{\alpha 1}} \right)}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

que son las ecuaciones necesarias para determinar las probabilidades de interés.

B. Evaluación de incertidumbres

En este apéndice se presentan las expresiones para la evaluación de las incertidumbres experimentales de las probabilidades de transferencia radiativa de vacantes. Se parte de la ley de propagación de las incertidumbres [23]:

$$u(f(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)}, \quad (\text{B.1})$$

donde u representa la incertidumbre; f es la cantidad de la cual se va a determinar la incertidumbre, que es función de las cantidades mensurables x_1, x_2, \dots, x_n . Así mismo, $u(x_i)$

es la incertidumbre combinada de la cantidad x_i . Aplicando a la Ec. (4) para la transición KL_2 :

$$\frac{\partial \eta_{KL_2}}{\partial K_\alpha} = \eta_{KL_2} \frac{K_\beta}{K_\alpha (K_\alpha + K_\beta)}, \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial \eta_{KL_2}}{\partial K_\beta} = -\eta_{KL_2} \frac{1}{K_\alpha + K_\beta}, \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial \eta_{KL_2}}{\partial K_{\alpha 1}} = \eta_{KL_2} \frac{1}{K_{\alpha 1}} \left(1 + \frac{K_{\alpha 2}}{K_{\alpha 1} (K_{\alpha 1} + K_{\alpha 2})} \right), \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial \eta_{KL_2}}{\partial K_{\alpha 2}} = \eta_{KL_2} \left(\frac{1}{K_{\alpha 2}} - \frac{1}{K_{\alpha 1} + K_{\alpha 2}} \right), \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial \eta_{KL_2}}{\partial \omega_K} = \frac{\eta_{KL_2}}{\omega_K}. \quad (\text{B.6})$$

En estas ecuaciones, K_i se refiere a la intensidad de la línea de rayos X respectiva.

Por otro lado, en lo que se refiere a la transición KL_3 se tiene:

$$\frac{\partial \eta_{KL_3}}{\partial K_\alpha} = \eta_{KL_3} \frac{K_\beta}{K_\alpha (K_\alpha + K_\beta)}, \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial \eta_{KL_3}}{\partial K_\beta} = -\eta_{KL_3} \frac{1}{K_\alpha + K_\beta}, \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial \eta_{KL_3}}{\partial K_{\alpha 1}} = \eta_{KL_3} \frac{K_{\alpha 2}}{K_{\alpha 1} (K_{\alpha 1} + K_{\alpha 2})}, \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial \eta_{KL_3}}{\partial K_{\alpha 2}} = \eta_{KL_3} \frac{1}{K_{\alpha 1} + K_{\alpha 2}}, \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{\partial \eta_{KL_3}}{\partial \omega_K} = \frac{\eta_{KL_3}}{\omega_K}. \quad (\text{B.11})$$

Al sustituir estas ecuaciones en (A2.1), y considerando que $u^2(K_i) = K_i$ [24], se tendrán las expresiones finales para las incertidumbres combinadas.

1. M. C. Hernández *et al.*, X-Ray Fluorescence Analysis of Ground Coffee, *J. Nucl. Phys. Mat. Sci. Rad. A.* **5** (2017) 25, <https://doi.org/10.15415/jnp.2017.51003>.
2. W. K. Robinson, W. D. Adams, and J. L. Duggan, Some experiments with a radioisotope X-ray source for the undergraduate laboratory, *Am. J. Phys.* **36** (1968) 683, <https://doi.org/10.1119/1.1975089>.
3. H. D. Fetzer, D. L. Parker, and K. C. Stuart, Student X-ray fluorescence experiments, *Am. J. Phys.* **43** (1975) 323, <https://doi.org/10.1119/1.10081>.
4. D. N. Breiter and M. L. Roush, Trace element analysis of blood serum by proton induced X-ray fluorescence, *Am. J. Phys.* **43** (1975) 569, <https://doi.org/10.1119/1.9768>.
5. D. Desmarais and J. L. Duggan, Alpha-particle-induced, inner-shell ionization measurements for the undergraduate laboratory, *Am. J. Phys.* **52** (1984) 507, <https://doi.org/10.1119/1.13870>.
6. M. Dasgupta *et al.*, Some experiments on X-ray fluorescence for the student laboratory, *Am. J. Phys.* **56** (1988) 245, <https://doi.org/10.1119/1.15656>.
7. A. S. Bennal *et al.*, Measurements of x-ray fluorescence parameters, *Am. J. Phys.* **73** (2005) 883, <https://doi.org/10.1119/1.1881254>.
8. C. M. Lavelle, Gamma ray spectroscopy with Arduino UNO, *Am. J. Phys.* **86** (2018) 384, <https://doi.org/10.1119/1.5026595>.
9. R. H. Lindsay, D. H. Ehlers, and R. R. McLeod, Rutherford Scattering Apparatus for Laboratory and Lecture Demonstration, *Am. J. Phys.* **33** (1965) 1055, <https://doi.org/10.1119/1.1971150>.
10. J. Cochran and M. G. Payne, An Elementary Experiment on the Energy Straggling of α Particles in Air, *Am. J. Phys.* **38** (1970) 762, <https://doi.org/10.1119/1.1976451>.
11. P. J. Ouseph and A. Mostovych, An experiment to measure range, range straggling, stopping power, and energy straggling of alpha particles in air, *Am. J. Phys.* **46** (1978) 742, <https://doi.org/10.1119/1.11392>.
12. D. Desmarais and J. L. Duggan, An undergraduate α -particle time-of-flight experiment for determining the mean excitation energy for electronic stopping power of Al, Cu, Ag, and Au, *Am. J. Phys.* **52** (1984) 408, <https://doi.org/10.1119/1.13626>.
13. F. D. Becchetti *et al.*, A multi-functional apparatus for α and β spectroscopy utilizing a permanent ring-magnet β spectrometer, *Am. J. Phys.* **84** (1984) 883, <https://doi.org/10.1119/1.4964109>.
14. J. A. Mendoza-Flores, Experimento para el Laboratorio de Física Contemporánea usando espectrometría de rayos X: probabilidad de transferencia radiativa de vacantes. Tesis profesional, Física, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México. México, 2019.
15. N. Tsoulfanidis and S. Landsberger, Measurement and detection of radiation, 5th ed. (CRC Press, Boca Raton, EUA, 2021).
16. A. S. Bennal and N. M. Badiger, Measurement of K-L radiative vacancy transfer probabilities for Ta, Au and Pb in a 2π geometrical configuration, *Nucl. Instr. and Meth. B* **247** (2006) 161, <https://doi.org/10.1016/j.nimb.2006.01.057>.
17. H. Nullens, P. V. Espen, and F. Adams, Linear and Non-linear Peak Fitting in Energy-dispersive X-Ray Fluorescence, *X-Ray Spectrom* **8** (1979) 104, <https://doi.org/10.1002/xrs.1300080305>.
18. E. B. Saloman, J. H. Hubbell, and J. H. Scofield, X-ray attenuation cross sections for energies 100 eV to 100 keV and elements $Z = 1$ to $Z = 92$, *At. Data and Nucl. Data Tables* **38** (1988) 1, [https://doi.org/10.1016/0092-640X\(88\)90044-7](https://doi.org/10.1016/0092-640X(88)90044-7).

19. M. O. Krause, Atomic radiative and radiationless yields for K and L shells, *J. Phys. Chem. Ref. Data* **8** (1979) 307, <https://doi.org/10.1063/1.555594>.
20. National Nuclear Data Center, NuDat 3.0, <https://www.nndc.bnl.gov/nudat3/>, consultado el 20/06/2023.
21. J. F. Ziegler, M. D. Ziegler, and J. P. Biersack, SRIM-The stopping and range of ions in matter, *Nucl. Instr. Meth. B* **268** (2010) 1818, <https://doi.org/10.1016/j.nimb.2010.02.091>.
22. J. H. Scofield, Relativistic Hartree-Slater values for K and L X-ray emission rates, *At. Data and Nucl. Data Tables* **14** (1974) 121, [https://doi.org/10.1016/S0092-640X\(74\)80019-7](https://doi.org/10.1016/S0092-640X(74)80019-7).
23. Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM). Report JCGM 100:2008. Joint Committee for Guides in Metrology, Ginebra, 2008.
24. A. C. Melissinos and J. Napolitano, Experiments in Modern Physics, 2nd ed. (Academic Press, San Diego, EUA, 2003).