Aspectos básicos del método de amplitudes I: Caso sin masa

J. Reyes Pérez
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,
Av. San Claudio y 18 Sur, C.U. 72570 Puebla, México,
e-mail: jonathan.reyesper@alumno.buap.mx

Received 17 October 2023; accepted 1 April 2024

En este trabajo se revisa el formalismo de los espinores de helicidad o el método de amplitudes en el espacio de cuatro dimensiones ($D = 4$), en el contexto de la Electrodinámica Cuántica (QED, por sus siglas en inglés). Se muestran los cálculos explícitos de la amplitud del proceso físico $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ a nivel árbol en el límite de altas energías o ultra-relativista como un ejemplo de motivación para estudiar este método. El objetivo es introducir a estudiantes de física en las nuevas técnicas de cálculo que se desarrollan a partir del formalismo de amplitudes.

Descriptores: Método de amplitudes; little group; helicidad; espinores de Weyl.

In this work, the helicity spinors formalism or just amplitudes is reviewed in four-dimensional space ($D = 4$), in the context of Quantum Electrodynamics (QED). Explicit calculations for the amplitude of the physical process $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ at the tree level in the high energy or ultra-relativistic limit are shown as an example of motivation for study this method. The objective is to introduce particle physics students to the new calculation techniques that are developed from the amplitude program.

Keywords: Amplitudes, little group, helicity, Weyl spinors

DOI: https://doi.org/10.31349/RevMexFisE.22.010203

1. Introducción

La teoría cuántica de campos (QFT, por sus siglas en inglés) es el lenguaje matemático que nos permite describir las partículas elementales y sus interacciones [1]. Un ingrediente importante de este lenguaje son los espinores que son objetos matemáticos que se transforman bajo el grupo de Lorentz [2]. Históricamente, los espinores fueron creados por E. Cartan en 1913 [3]. Posteriormente personajes como P. Dirac y E. Majorana introdujeron los espinores a la física teórica [4, 5], así como H. Weyl y B. L. van der Waerden hicieron contribuciones matemáticas importantes que permitieron el desarrollo del análisis espinorial. Por su parte, B.L. van der Waerden fue el primero en introducir la notación de índices punteados y no punteados para las representaciones irreducibles del grupo de Lorentz. Actualmente a estas representaciones se les conocen como *espinores de Weyl-van der Waerden* [6, 7].

Otro ingrediente importante en teoría cuántica de campos es la matriz S, el cual es el objeto definido en el espacio de momentos que contiene toda la información física de un proceso de colisión o decaimiento. En un experimento de dispersión de partículas el observable a medir es la sección eficaz σ, el cual está en términos de energías y momentos de las partículas involucradas [8]. Teorías como el modelo estándar fueron desarrolladas de esta manera cuyos descubrimientos como el bosón de Higgs están en la literatura [9].

A nivel árbol, un proceso de dos partículas en el estado inicial y dos partículas en el final ($p_1 + p_2 \to p_3 + p_4$), el método estándar para calcular su sección eficaz requiere del uso de los diagramas de Feynman que involucra calcular el elemento de matriz S o amplitud mediante las reglas de Feynman, posteriormente elevar al cuadrado el elemento de matriz, promediar sobre los estados de espín y después hacer el desarrollo de las trazas de productos de matrices γ^μ de cuatro componentes [10]. Sin embargo, si agregamos más partículas en el estado final, implica un incremento en el número de diagramas de Feynman, por ejemplo, para un proceso donde tenemos dos gluones en el estado inicial y ocho gluones en el estado final, se requieren aproximadamente un millón de diagramas de Feynman, por lo que la técnica se vuelve impracticable. Una manera de hacer posible esto es mediante el formalismo de los espinores de helicidad o *método de amplitudes*, el cual es una técnica moderna que se aplica a nivel de árbol, la clave de este método se encuentra en el *little group* o grupo de Wigner el cual caracteriza los estados de las partículas, por ejemplo para partículas sin masa asociados a espinores de Weyl, el *little group* nos dice que solo se necesita conocer la helicidad para estudiar sus procesos de dispersión [11].

Los primeros desarrollos del método de amplitudes provienen de la década de 1980, cuando se encontró que se podían calcular de manera eficiente amplitudes de dispersión que involucraban partículas sin masa al re-parametrizar los cuadri-momentos en espinores, de este modo las amplitudes se reescriben en términos de contracciones de espinores los cuales son invariantes de Lorentz [12]. En 1986, K. Hagiwara y D. Zeppenfeld presentaron un método para calcular las amplitudes de procesos que involucran fermiones externos y bosones vectoriales a nivel árbol en la base espinorial de Weyl [13]. En el mismo año, estas técnicas fueron extendidas por S. Parker y T. Taylor para calcular de manera más eficiente amplitudes de multi-jets a nivel árbol en Cromodinámica Cuántica (QCD, por sus siglas en inglés), ellos derivaron una fórmula general para describir el proceso de dispersión de dos gluones en el estado inicial a $n-2$ gluones en el estado final, conocida hoy en día como *fórmula de Parker-Taylor* [14].

Los libros de texto modernos en QFT incluyen capítulos sobre el método de amplitudes estudiando teorías como QED en el caso de M. Thomson [10] o QCD por M. D. Schwartz [15]. Una introducción pedagógica más extensa del método de amplitudes es dada por H. Elvang y Y. T. Huang donde se estudian teorías supersimétricas como $N=4$ SYM o Supergravedad $N=8$ [11]. El trabajo de H. K. Dreiner, H. E. Haber y S. P. Martín es una gran referencia donde se puede encontrar una discusión completa de los espinores de helicidad y un conjunto de reglas de Feynman en términos de espinores de dos componentes para calcular secciones eficaces, correcciones radiativas de teorías como el modelo estándar, así como supersimetría [16].

Si bien el método de amplitudes funciona de manera excelente a nivel árbol y considerando partículas sin masa, en la última década se han visto grandes avances por extender este formalismo a partículas de cualquier masa y espín [17], así como técnicas para calcular a orden de lazos mediante el método del corte unitario o Next-to-Leading Order (NLO) [18, 19], brindando así un abanico de nuevos métodos más poderosos en teoría cuántica de campos, los cuales son temas que están más allá de los propósitos de este artículo.

En este trabajo nos enfocamos en estudiar un proceso de dispersión que involucra partículas sin masa a nivel árbol en la teoría de QED, así como revisar las bases del método de amplitudes e ilustrar de manera detallada cómo se hace el cálculo de una amplitud a nivel árbol en este formalismo para beneficio de los estudiantes.

El contenido es el siguiente: la Sec. 2, basada en los textos de la Ref. [20], se hace una revisión de cómo los espinores se transforman bajo el grupo de Lorentz y se presenta el concepto de *little group*. La Sec. 3, basada en las Refs. [15, 21], se revisa la ecuación de Dirac y sus soluciones en la representación de Weyl, así como calcular el proceso $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ en el límite de altas energías en esta representación. Por último, en la Sec. 3.4 se muestra el formalismo con la notación moderna de brackets y se calcula el mismo proceso físico anterior usando la metodología para QED de la Ref. [22].

2. Grupo de Lorentz y Wigner

En teoría cuántica de campos podemos describir matemáticamente partículas con o sin masa mediante espinores, usualmente se ven tres tipos: el espinor de Dirac el cual es un vector renglón o columna de cuatro componentes que se transforma bajo el grupo de Lorentz y satisface la ecuación de Dirac, el espinor de Majorana que también es un vector de cuatro componentes muy utilizado para estudiar neutrinos ligeros en extensiones del modelo estándar [21], y los espinores de Weyl que son vectores de dos componentes comúnmente utilizados en teorías supersimétricas [23]. Por ejemplo el espinor de Dirac se puede escribir de la siguiente manera[i]:

$$\Psi_D = \Psi_L + \Psi_R, \tag{1}$$

con

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \lambda_a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\chi}^{\dot{a}} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

donde $a = 1, 2$ y $\dot{a} = \dot{1}, \dot{2}$. Estos índices no punteados y punteados se le conoce como *notación de van der Waerden*. Los espinores λ_a y $\tilde{\chi}^{\dot{a}}$ son de dos componentes, y se les conocen como *espinores de Weyl*, los cuales serán los protagonistas en la Sec. 3. En este trabajo solo nos interesan los espinores de Weyl, estos también reciben los nombres de espinores izquierdos o derechos, veremos a continuación cómo se transforman bajo el grupo de Lorentz.

2.1. Rotaciones y boost

Se tienen dos tipos de transformaciones que conforman el grupo de Lorentz: rotaciones y boost. Por un lado, alrededor de cada eje se tiene asociada una rotación, lo denotamos como $R^x(\theta^x)$, $R^y(\theta^y)$ y $R^z(\theta^z)$. Las formas explicitas de los generadores de las rotaciones $\mathbf{J^i}$, con $\mathbf{i} = \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, son las siguientes:

$$\mathbf{J^x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J^y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J^z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Similarmente, por cada eje se tiene asociado un boost representado por $B^x(\phi^x)$, $B^y(\phi^y)$ y $B^z(\phi^z)$. Las formas explicitas de sus generadores $\mathbf{K^i}$ son:

$$\mathbf{K^x} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K^y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K^z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

El conjunto de generadores (3) y (4) satisfacen las siguientes relaciones de conmutación:

$$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk}J^k, \quad [J^i, K^j] = i\epsilon^{ijk}K^k,$$
$$[K^i, K^j] = -i\epsilon^{ijk}J^k. \tag{5}$$

Se puede ver que, bajo la conmutación, las rotaciones tienen un álgebra de Lie cerrada, en el caso de los boost no, ya que nos da una rotación. Para resolver esto, se definen las siguientes combinaciones lineales de generadores:

$$A^i = \frac{1}{2}(J^i + iK^i), \quad B^i = \frac{1}{2}(J^i - iK^i), \tag{6}$$

estas expresiones satisfacen las relaciones de conmutación siguientes:

$$[A^i, A^j] = i\epsilon^{ijk}A^k,$$
$$[B^i, B^j] = i\epsilon^{ijk}B^k, \quad [A^i, B^j] = 0, \tag{7}$$

tanto A como B generan un grupo $SU(2)$. El grupo de Lorentz es esencialmente $SU(2) \times SU(2)$. En otras palabras, una representación del grupo $SO(1,3)$ está caracterizado por el doblete (j, j'), donde j corresponde al $SU(2)$ generado por A y j' al generado por B.

2.2. Representaciones

La representación dada por $(j, j') = (0, 0)$ es la más pequeña del grupo de Lorentz el cual consiste de matrices de 1×1 que actúan sobre escalares. Esta describe objetos que no cambian bajo las transformaciones de Lorentz. La siguiente representación es la $(1/2, 0)$ conocida como representación *izquierda*, donde sólo se usan los generadores A^i, esto implica en (6) que $J^i = iK^i = (1/2)\sigma^i$. Ya que los generadores A^i son las representaciones $j = 1/2$ de SU(2); estos tienen que ser iguales a las matrices de Pauli. Los A^i ahora van a ser matrices de 2×2. Las transformaciones en esta representación son:

$$R(\theta) = e^{i\theta\cdot J} = e^{i\theta\cdot\frac{\sigma}{2}}, \quad B(\phi) = e^{i\phi\cdot K} = e^{i\phi\cdot\frac{\sigma}{2}}. \tag{8}$$

La siguiente es la representación $(0, 1/2)$ conocida como *derecha*. Ahora solo los generadores B^i son usados, lo que implica en la Ec. (6) que $J^i = (1/2)\sigma^i$ y $K^i = i(1/2)\sigma^i$. Las transformaciones en esta representación son:

$$R(\theta) = e^{i\theta\cdot J} = e^{i\theta\cdot\frac{\sigma}{2}}, \quad B(\phi) = e^{i\phi\cdot K} = e^{-\phi\cdot\frac{\sigma}{2}}. \tag{9}$$

Se puede ver en las Ecs. (8) y (9) que ambas representaciones son idénticas bajo rotaciones pero diferentes bajo boost[ii]. Debido a esto se tienen dos tipos diferentes de espinores, denominados como espinor izquierdo ($\psi_L = \lambda_a$), y espinor derecho ($\psi_R = \tilde{\chi}^{\dot{a}}$), los cuales son de dos componentes. Este tipo de representaciones se les conoce como *espinoriales*. Las representaciones izquierda y derecha están relacionadas entre sí, resulta que son conjugadas una de la otra, para ver esto se define $\overline{\psi}_L = i\sigma^2\psi_L^*$, con σ^2 como la segunda matriz de Pauli, entonces bajo las transformaciones de rotación (8) se tiene:

$$\overline{\psi}'_L = i\sigma^2(\psi'_L)^* = i\sigma^2(e^{i\frac{1}{2}\theta\cdot\sigma}\psi_L)^* \tag{10}$$
$$= ie^{i\frac{1}{2}\theta\cdot\sigma}\overline{\psi}_L, \tag{11}$$

y bajo las transformaciones de boost (8):

$$\overline{\psi}'_L = i\sigma^2(\psi'_L)^* = i\sigma^2(e^{i\frac{1}{2}\phi\cdot\sigma}\psi_L)^* \tag{12}$$
$$= e^{-\frac{1}{2}\phi\cdot\sigma}\overline{\psi}_L, \tag{13}$$

donde se han utilizado las identidades $(i\sigma^2)\sigma^*(-i\sigma^2) = -\sigma$ y $(-i\sigma^2)(i\sigma^2) = 1$. Vemos que $\overline{\psi}_L$ justamente se transforma en la representación derecha. Ahora, sea $\overline{\psi}_R = i\sigma^2\psi_R^*$, entonces bajo las transformaciones de rotación (9) se tiene:

$$\overline{\psi}'_R = i\sigma^2(\psi'_R)^* = i\sigma^2(e^{i\frac{1}{2}\theta\cdot\sigma}\psi_R)^* \tag{14}$$
$$= e^{i\frac{1}{2}\theta\cdot\sigma}\overline{\psi}_R, \tag{15}$$

y bajo las transformaciones de boost (9):

$$\overline{\psi}'_R = i\sigma^2(\psi'_R)^* = i\sigma^2(e^{-i\frac{1}{2}\phi\cdot\sigma}\psi_R)^* \tag{16}$$
$$= e^{\frac{1}{2}\phi\cdot\sigma}\overline{\psi}_R. \tag{17}$$

Vemos que $\overline{\psi}_R = i\sigma^2\psi_R^*$ se transforma en la representación izquierda, esto nos dice que $\psi_L = \overline{\psi}_R$ y $\overline{\psi}_L = \psi_R$. Podemos saber las propiedades que tiene $i\sigma^2$ utilizando la notación de Van der Wardeen, si escogemos superíndices no punteados al hacer rotaciones alrededor del eje x, siendo estas matrices de 2×2 se tiene:

$$(i\sigma^2)'^{ab} = (R_x)^a_c(R_x)^b_d(i\sigma^2)^{cd} = (i\sigma^2)^{ab}, \tag{18}$$

y bajo un boost se transforma como:

$$(i\sigma^2)'^{ab} = (B_x)^a_c(B_x)^b_d(i\sigma^2)^{cd} = (i\sigma^2)^{ab}, \tag{19}$$

resulta que $(i\sigma^2)^{ab}$ es un invariante bajo las transformaciones de Lorentz en la representación espinorial. Por esta razón $i\sigma^2$ suele llamarse el *espinor métrico*, de este modo podemos usarlos para bajar y subir índices espinoriales que se transforman bajo la representación espinorial de Lorentz. Más adelante usaremos la siguiente notación para:

$$(i\sigma^2)^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \epsilon^{ab}. \tag{20}$$

Debido a que $i\sigma^2$ es real, este objeto no cambia bajo conjugación compleja, entonces los valores punteados son iguales a los no punteados, por lo que

$$(i\sigma^2)^{ab} = (i\sigma^2)^{\dot{a}\dot{b}} = -(i\sigma^2)_{ab} = -(i\sigma^2)_{\dot{a}\dot{b}}. \tag{21}$$

Con toda esta información, resulta que tenemos cuatro tipos diferentes de espinores con superíndices y subíndices, punteados y no punteados, esto es:

$$\psi_L = \psi_a, \psi_L^* = \psi_{\dot{a}}, \psi_R = \psi^{\dot{a}}, \psi_R^* = \psi^a. \tag{22}$$

Por último, tenemos la representación $(1/2, 1/2)$. Debido a que A y B conmutan, el estado tiene dos índices: uno punteado indicando que se transforma bajo la representación derecha y uno no punteado que se transforma bajo la representación izquierda de $SU(2)$. El estado en esta representación va a estar caracterizado por $P_{\dot{a}b}$, el cual tiene un total de cuatro componentes que se interpreta como una matriz compleja hermitiana de 2×2, también se puede escribir en términos de las matrices de Pauli de la siguiente manera:

$$P_{\dot{a}b} = p_\mu(\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{a}b} = \begin{pmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{pmatrix}, \tag{23}$$

cuyo determinante resulta ser

$$\det(P_{\dot{a}b}) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2, \tag{24}$$

con $\bar{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\vec{\sigma}^i) = (\mathbf{1}, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3)^{iii}$ y el vector $p_\mu = (t, x, y, z)$. Más adelante veremos que la expresión (23) nos permitirá re-parametrizar el momento de cualquier partícula sin masa como el producto de dos espinores de Weyl, esta descripción es clave en el método de amplitudes. Por otro lado, si tomamos la transpuesta de (23), se tiene que $(P_{\dot{a}b})^T = P_{b\dot{a}} = (P_{\dot{a}b})^*$. Vemos que la conjugación compleja tiene el efecto de cambiar índices punteados y no punteados. Considerando una transformación de Lorentz sobre (23) a primer orden utilizando (9) para las transformaciones derechas (punteadas) y (8) para las transformaciones izquierdas (no punteado), lo que da lugar a lo siguiente:

$$\begin{aligned} P'_{\dot{c}d} &= (e^{\frac{i}{2}\theta\cdot\sigma - \frac{1}{2}\phi\cdot\sigma})^{\dot{a}}_{\dot{c}}(e^{\frac{i}{2}\theta\cdot\sigma + \frac{1}{2}\phi\cdot\sigma})^{b}_{d}P_{\dot{a}b} \\ &= \left(\mathbf{1} + \frac{i}{2}\theta\cdot\sigma - \frac{1}{2}\phi\cdot\sigma\right)^{\dot{a}}_{\dot{c}}(P_{\dot{a}b}) \\ &\times \left(\mathbf{1} + \frac{i}{2}\theta\cdot\sigma + \frac{1}{2}\phi\cdot\sigma\right)^{b}_{d}. \end{aligned} \tag{25}$$

Entonces $(1/2, 1/2)$ es la representación vectorial fundamental del grupo de Lorentz $SO(1,3)$. Las transformaciones en (25) dejan invariante el determinante de $P_{\dot{a}b}$.

2.3. Little group o grupo pequeño de Wigner

Hasta ahora hemos hablado de que los espinores describen matemáticamente a partículas con y sin masa, también como estos se transforman bajo el grupo de Lorentz. Sin embargo, la clave del porqué el método de amplitudes ha tenido un gran progreso en los últimos años radica en entender qué define a una partícula, la respuesta está en el *little group*^{iv}, el cual es el conjunto de transformaciones de Lorentz L que dejan invariante al momento p^μ de una partícula, esto es

$$\mathbf{Lp} = \mathbf{p}. \tag{26}$$

Una transformación general de Lorentz tiene la forma :

$$L = e^{i(\mathbf{J}\cdot\theta + \mathbf{K}\cdot\phi)} \tag{27}$$

$$\approx 1 + i(\mathbf{J}\cdot\theta + \mathbf{K}\cdot\phi) = 1 + iW, \tag{28}$$

con $\mathbf{J} = (J^x, J^y, J^z)$ y $\mathbf{K} = (K^x, K^y, K^z)$, desarrollando la matriz W usando los generadores (3) y (4) se obtiene la siguiente forma:

$$W = \mathbf{J}\cdot\theta + \mathbf{K}\cdot\phi = i\begin{pmatrix} 0 & \phi^x & \phi^y & \phi^z \\ \phi^x & 0 & -\theta^z & \theta^y \\ \phi^y & \theta^z & 0 & -\theta^x \\ \phi^z & -\theta^y & \theta^x & 0 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Aquí se toma una transformación de Lorentz infinitesimal $L = 1 + iW$, donde W está dada por (29). En el caso de partículas masivas, $m^2 > 0$, al tomar $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$, la transformación de Lorentz L debe dejar invariante el momento p^μ, por lo que la siguiente condición se debe satisfacer:

$$\begin{pmatrix} 0 & \phi^x & \phi^y & \phi^z \\ \phi^x & 0 & -\theta^z & \theta^y \\ \phi^y & \theta^z & 0 & -\theta^x \\ \phi^z & -\theta^y & \theta^x & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Esto implica que $\phi^x = \phi^y = \phi^z = 0$ y $\theta^x = \theta^y = \theta^z \neq 0$. Nos queda la parte $J\cdot\theta$ con J^x, J^y, J^z los generadores de las rotaciones, por lo que para una partícula con masa el *little group* es SO(3) = SU(2), los estados están caracterizados por la masa m y el espín s. Casos conocidos de partículas con masa son: ($s = 0$, Higgs), ($s = 1/2$, q quarks y l leptones), ($s = 1$, bosones $W^\pm$ y Z^0). Ahora, para partículas sin masa $m^2 = 0$, se toma el momento $p^\mu = (m, 0, 0, m)$ y entonces se debe cumplir que

$$\begin{pmatrix} 0 & \phi^x & \phi^y & \phi^z \\ \phi^x & 0 & -\theta^z & \theta^y \\ \phi^y & \theta^z & 0 & -\theta^x \\ \phi^z & -\theta^y & \theta^x & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Esto implica que $\phi^z = 0$, $\phi^x = -\theta^y$, y $\phi^y = \theta^x$, donde θ^z es arbitrario y corresponde a la rotación alrededor del eje z. Desarrollando W dada por (29), se obtiene:

$$\begin{aligned} W &= J^x\theta^x + J^y\theta^y + J^z\theta^z + K^x\phi^x + K^y\phi^y \\ &= (J^x + K^y)\theta^x + (J^y - K^x)\theta^y + J^z\theta^z \\ &= E^1\theta^x + E^2\theta^y + J^z\theta^z. \end{aligned} \tag{32}$$

Resulta que E^1, E^2 y J^z satisfacen las siguientes relaciones de conmutación, las cuales definen el álgebra del grupo $E(2)$:

$$\begin{aligned} &[J^z, E^1] = iE^2, \\ &[J^z, E^2] = -iE^1, \quad [E^1, E^2] = 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Para las partículas sin masa, el *little group* es el grupo Euclidiano en dos dimensiones $E(2) = U(1)\times T(2)$. Los estados de las partículas están caracterizados por la *helicidad* h. La helicidad de una partícula se define como la proyección de su espín a lo largo de la dirección de su momento. Casos conocidos de partículas sin masa: ($h = \pm 1$, fotón, gluón), ($h = \pm 2$, gravitón). El operador helicidad es definido por $\mathbf{h} \equiv \vec{S}\cdot\vec{p}/|\vec{p}|$, el cual se puede escribir como una matriz de 4×4:

$$\mathbf{h} = \frac{1}{2p}\begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \end{pmatrix}, \tag{34}$$

esta definición satisface la ecuación de eigenvalores $\mathbf{h}\psi = h\psi$, donde ψ es un espinor de Dirac de cuatro componentes y h es el eigenvalor de helicidad. Para conocer el valor de h, primero reescribimos la ecuación de eigenvalores en términos de espinores de dos componentes mediante el operador (34), obteniendo:

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\psi_L = 2ph\psi_L, \tag{35}$$

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\psi_R = 2ph\psi_R. \tag{36}$$

Del álgebra vectorial se tiene la propiedad $(\vec{A}\cdot\vec{\sigma})(\vec{B}\cdot\vec{\sigma}) = \vec{A}\cdot\vec{B}\mathbf{1} + i(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{\sigma}$ y encontramos que $(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 = |\vec{p}|^2 = p^2$, entonces en (35) se tiene

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2\psi_L = 2ph(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\psi_L = 4p^2h^2\psi_L, \tag{37}$$

lo que implica que $p^2\psi_L = 4p^2h^2\psi_L$, resolviendo la ecuación para los eigenvalores se encuentra que la helicidad es $h = \pm 1/2$, los cuales son los dos posibles estados de helicidad para un fermión de espín semi entero. Por último, la forma explícita del operador helicidad como una matriz de 2×2 es

$$\mathbf{h} = \frac{1}{2p}(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\mathbf{1} = \frac{1}{2p}\begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Sí tomamos $\vec{p} = (p\sin\theta\cos\phi, p\sin\theta\sin\phi, p\cos\theta)$ como el momento vectorial de la partícula, el operador (38) queda en términos de coordenadas esféricas:

$$\mathbf{h} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{39}$$

En este punto, nos damos cuenta que describir procesos de dispersión donde se involucran partículas sin masa solamente se necesita la helicidad, y en el caso de partículas masivas solo se necesita conocer la masa y el espín.

3. Amplitudes de helicidad

3.1. Ecuación de Dirac y espinores de Weyl

En esta sección vamos a ver la relación que hay entre los espinores de helicidad y los espinores de Weyl, lo que nos va a permitir tener propiedades interesantes y hacer cálculos de procesos físicos eficientemente. Empecemos por ver algunos detalles de la ecuación de Dirac, cuando tenemos fermiones sin masa es conveniente usar la representación de Weyl o quiral, donde las matrices de Dirac tienen la siguiente forma:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix},$$
$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \tag{40}$$

del álgebra de Clifford se tiene que

$$\gamma^0\gamma^i = -\gamma^0\gamma_i = \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}. \tag{41}$$

La expresión que vamos a estudiar es:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0, \tag{42}$$

donde u es el espinor de Dirac de cuatro componentes en el espacio de momentos que describe a las partículas. El espinor v, también de cuatro componentes, describe a las antipartículas y satisface una ecuación similar. La forma explicita de estos espinores en la representación de Weyl es la siguiente [21]:

$$u(\vec{p}, s=\pm) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\lambda_\pm \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\lambda_\pm \end{pmatrix}, \tag{43}$$

$$v(\vec{p}, s=\pm) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\chi_\pm \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\chi_\pm \end{pmatrix}. \tag{44}$$

En coordenadas esféricas se tiene que

$$\lambda_+ = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi} \end{pmatrix}, \quad \lambda_- = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi} \end{pmatrix},$$
$$\chi_+ = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \chi_- = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \tag{45}$$

En la base de helicidades, los espinores u y v se convierten en espinores de helicidad:

$$u_\pm(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2}}\begin{pmatrix} \kappa_\pm\lambda_\pm \\ \kappa_\mp\lambda_\pm \end{pmatrix}; \tag{46}$$

$$v_\pm(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2}}\begin{pmatrix} \kappa_\mp\chi_\pm \\ -\kappa_\pm\chi_\pm \end{pmatrix}, \tag{47}$$

donde

$$\kappa_\pm = 1 \mp \frac{p}{E+m}, \tag{48}$$

con p la magnitud del tri-momento. Para el espinor $u = (u_L, u_R)^T$, la ecuación de Dirac en forma matricial bajo la representación de Weyl es:

$$\begin{pmatrix} -m\mathbf{1} & (E - \vec{p}\cdot\vec{\sigma}) \\ (E + \vec{p}\cdot\vec{\sigma}) & -m\mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_L \\ u_R \end{pmatrix} = 0, \tag{49}$$

desarrollando (49) explícitamente, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones acopladas

$$(E - \vec{p}\cdot\vec{\sigma})u_R = u_L \times m, \tag{50}$$

$$(E + \vec{p}\cdot\vec{\sigma})u_L = u_R \times m, \tag{51}$$

cuando $m = 0$, estas ecuaciones se desacoplan y tenemos las ecuaciones de Weyl. Para descomponer cualquier espinor de Dirac u de cuatro componentes en espinores de Weyl de dos componentes, se definen los operadores de proyección quirales P_L y P_R:

$$P_R = \frac{1}{2}(1+\gamma^5), \quad P_L = \frac{1}{2}(1-\gamma^5). \tag{52}$$

En el modelo estándar, la matriz γ^5 está relacionada con el concepto de *quiralidad*, los eigenestados de esta matriz se les conoce como estados de quiralidad. Al considerar el límite ultra-relativista ($E \gg m$), donde las energías de las partículas se consideran mucho más grandes que sus masas, y por lo tanto hacer $m = 0$, los espinores de helicidad $u_\pm$ y $v_\pm$ serán eigenestados de la matriz γ^5 y los eigenestados de quiralidad tendrán eigenvalor de helicidad. Por lo que podemos describir partículas fermiónicas sin masa y con helicidad mediante los espinores de Weyl. Por otro lado, los operadores de proyección satisfacen que $P_R + P_L = 1$, $P_R P_R = P_R$, $P_L P_L = P_L$ y $P_L P_R = 0$. Los estados de quiralidad bajo los operadores de proyección cumplen que

$$\begin{aligned}
&P_R u_R = u_R, \quad P_R u_L = 0, \\
&P_R v_R = 0, \quad P_R v_L = v_L, \\
&P_L u_R = 0, \quad P_L u_L = u_L, \\
&P_L v_R = v_R, \quad P_L v_L = 0.
\end{aligned} \tag{53}$$

Ya que los operadores (52) proyectan estados quirales, entonces cualquier espinor u se puede descomponer como

$$\begin{aligned}
u &= \begin{pmatrix} P_L u \\ P_R u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_L \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_R \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}(1-\gamma^5)u + \frac{1}{2}(1+\gamma^5)u,
\end{aligned} \tag{54}$$

lo que equivale a escribir $u = u_L + u_R$. Los eigenestados quirales u_L y u_R también son conocidos como *espinores de Weyl* o *campos de Weyl* de dos componentes. La relación que hay entre los espinores de helicidad y los espinores de Weyl se manifiesta cuando se descompone la forma general de los espinores de helicidad en sus componentes quirales. Por ejemplo, tomemos el espinor de helicidad derecho u_+, se puede reescribir como:

$$u_+(p) = N \begin{pmatrix} \kappa_+ \lambda_+ \\ \kappa_- \lambda_+ \end{pmatrix}, \tag{55}$$

donde $N = \sqrt{(E+m)/2}$, usando el efecto que tienen los operadores (52) sobre los espinores, se ve que

$$P_R u_+(p) = P_R u_R = \frac{1}{2}(1+\gamma^5) u_R, \tag{56}$$

usando la expresión (54) se tiene

$$\begin{aligned}
P_R u_R &= \frac{1}{2}(1+\gamma^5) N \begin{pmatrix} \kappa_+ \lambda_+ \\ \kappa_- \lambda_+ \end{pmatrix} \\
&= N \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa_- \lambda_+ \end{pmatrix} = u_R.
\end{aligned} \tag{57}$$

Para $P_L u_+(p) = P_L u_R = 0$, entonces solo tenemos componente derecha para el espinor de helicidad positiva. Ya que

$$\kappa_- = 1 + \frac{p}{E+m}, \tag{58}$$

al considerar que la masa tiende a cero, entonces $p = E$, por lo tanto $\kappa_- = 2$ y $N = \sqrt{E/2}$, dando como resultado que $N \times \kappa_- = \sqrt{2E}$. Desarrollando las mismas operaciones algebraicas al resto de espinores de helicidad y considerando que la masa tiende a cero, se tiene finalmente

$$\begin{aligned}
&u_R(p) = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_+ \end{pmatrix}, \quad u_L(p) = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \lambda_- \\ 0 \end{pmatrix}, \\
&v_R(p) = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \chi_+ \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_L(p) = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ -\chi_- \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{59}$$

Los eigenestados de helicidad van a ser equivalentes a los eigenestados quirales únicamente en el límite ultra-relativista, es decir, cuando la energía de las partículas es mucho mayor a la de sus masas, por lo que las expresiones definidas en (45) se les conoce con la etiqueta de espinores de Weyl, los cuales serán los protagonistas en el método de amplitudes.

3.2. ¿Hay una mejor manera para calcular amplitudes de dispersión?

A continuación, vamos a considerar el proceso de dispersión $e^+ e^- \to \mu^+ \mu^-$, electrón positrón a muón anti-muón, a nivel árbol cuyo elemento de matriz se va denotar de la siguiente manera:

$$i\mathcal{M}_{\bar{e}e \to \bar{\mu}\mu} = -i\frac{e^2}{s} \bar{u}(p_3)\gamma^\mu v(p_4) \cdot \bar{v}(p_2)\gamma_\mu u(p_1). \tag{60}$$

Para calcular la sección eficaz o razón de decaimiento de cualquier proceso es necesario obtener primero lo que es el elemento de matriz cuadrado o amplitud cuadrada, en este trabajo nos enfocamos en como obtener $|\mathcal{M}|^2$. Para evaluar el elemento de matriz (60) se necesita tener en cuenta todos los posibles estados de espín de las cuatro partículas. Cada una de ellas puede estar en alguna de las dos posibles helicidades que hay, entonces para el estado inicial que esta compuesto por el electrón (e) y el positrón ($\bar{e}$), vamos a tener cuatro posibles configuraciones de helicidades, esto es,

$$\bar{e}_R e_L,\ \bar{e}_L e_L,\ \bar{e}_R e_L,\ \bar{e}_R e_R, \tag{61}$$

donde los subíndices R y L se refieren al estado de helicidad que se encuentran R para la helicidad derecha y L para la helicidad izquierda. Del mismo modo tenemos cuatro posibles configuraciones para el estado final compuesto por el muón (μ) y el anti-muón ($\bar{\mu}$). Por ejemplo, si en el estado inicial escogemos la configuración $\bar{e}_R e_R$ entonces los elementos de matriz que tendremos son

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_{\bar{e}_R e_R \to \bar{\mu}_R \mu_R}, \quad \mathcal{M}_{\bar{e}_R e_R \to \bar{\mu}_R \mu_L}, \\
&\mathcal{M}_{\bar{e}_R e_R \to \bar{\mu}_L \mu_R}, \quad \mathcal{M}_{\bar{e}_R e_R \to \bar{\mu}_L \mu_L}.
\end{aligned} \tag{62}$$

Similarmente, tendremos cuatro elementos de matriz para otra configuración diferente de helicidades en el estado inicial. Entonces el proceso de dispersión como tal, consiste en 16 posibles estados de combinaciones de helicidades que son ortogonales y por lo tanto independientes entre sí. En general, el elemento de matriz de espín promediado o amplitud cuadrada promediada es dada por

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4}\sum_{\text{espín}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4}\big(|\mathcal{M}_{\bar{e}_R e_R}|^2 + |\mathcal{M}_{\bar{e}_R e_L}|^2 + |\mathcal{M}_{\bar{e}_L e_R}|^2 + |\mathcal{M}_{\bar{e}_L e_L}|^2\big), \tag{63}$$

donde el factor de $1/4$ representa el promedio sobre las cuatro posibles configuraciones de helicidades en el estado inicial. La primera configuración de helicidades en el estado inicial que vamos a calcular es $\bar{e}_R e_L$, por lo que tenemos dos amplitudes diferentes que van a contribuir, una es $\mathcal{M}_{\bar{e}_R e_L \to \bar{\mu}_R \mu_L}$. Desarrollando la amplitud se tiene:

$$i\mathcal{M}_{\bar{e}_R e_L \to \bar{\mu}_R \mu_L} = -\frac{ie^2}{s} u_L^\dagger(p_3)\gamma^0\gamma^\mu v_R(p_4) \times v_R^\dagger(p_2)\gamma^0\gamma_\mu u_L(p_1), \tag{64}$$

donde se va a usar la forma explicita de las matrices (40) y las expresiones (59), entonces,

$$i\mathcal{M}_{\bar{e}_R e_L \to \bar{\mu}_R \mu_L} = -\frac{ie^2 4E^2}{s}(\lambda_-^\dagger(3)\chi_+(4)\chi_+^\dagger(2)\lambda_-(1) + \lambda_-^\dagger(3)\sigma^i\chi_+(4)\chi_+^\dagger(2)\sigma^i\lambda_-(1)). \tag{65}$$

Notar que los momentos de las partículas p_1, p_2, p_3, p_4 se han cambiado por números $1, 2, 3, 4$ respectivamente, que están asociados a los espinores de Weyl. En el segundo término de (65) se aplica la identidad de Fierz:

$$(\chi^\dagger(4)\sigma^i\chi(3))(\chi^\dagger(2)\sigma^i\chi(1)) = 2(\chi^\dagger(4)\chi(1))(\chi^\dagger(2)\chi(3)) - (\chi^\dagger(4)\chi(3))(\chi^\dagger(2)\chi(1)). \tag{66}$$

Por lo que la amplitud tiene la siguiente forma:

$$i\mathcal{M}_{\bar{e}_R e_L \to \bar{\mu}_R \mu_L} = -\frac{ie^2 4E^2}{s} \times 2\lambda_-^\dagger(3)\lambda_-(1)\chi_+^\dagger(2)\chi_+(4). \tag{67}$$

En este punto debemos hacer uso de la cinemática, en el límite cuando la masa tiende a cero se tiene que

$$\begin{aligned} p_1 &= (E, 0, 0, E), \quad p_3 = (E, E\sin\theta, 0, E\cos\theta), \\ p_2 &= (E, 0, 0, -E), \\ p_4 &= (E, -E\sin\theta, 0, -E\cos\theta). \end{aligned} \tag{68}$$

Sin perdida de generalidad, podemos escoger los ángulos $\theta_1 = \pi, \phi_1 = \pi$ para el estado inicial del electrón; para el estado inicial del positrón se escogen los ángulos $\theta_2 = 0, \phi_2 = 0$, para μ los ángulos son $\theta_3 = \pi - \theta, \phi_3 = \pi$ y para $\bar{\mu}$ se tiene $\theta_4 = \theta, \phi_4 = 0$. Las siguiente identidades trigonométricas son muy útiles $\sin([\pi - \theta]/2) = \cos\theta/2$, $\cos([\pi - \theta]/2) = \sin\theta/2$, $e^{i\pi} = 1$. Con esta información, los espinores de Weyl (45) se convierten en

$$\begin{aligned} \lambda_-(1) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_-(3) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \\ \chi_+(2) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_+(4) = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{69}$$

Sustituyendo estos espinores en (67), sin olvidar que en este caso $s = 4E^2$, el resultado final es

$$i\mathcal{M}_{\bar{e}_R e_L \to \bar{\mu}_R \mu_L} = -ie^2(1 + \cos\theta). \tag{70}$$

Ahora, la otra configuración de helicidades que contribuye es $\mathcal{M}_{\bar{e}_R e_L \to \bar{\mu}_L \mu_R}$, el elemento de matriz tiene la forma siguiente:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_{\bar{e}_R e_L \to \bar{\mu}_L \mu_R} &= -i\frac{e^2}{s}\bar{u}_R(p_3)\gamma^\mu v_L(p_4)\cdot\bar{v}_R(p_2)\gamma_\mu u_L(p_1) \\ &= -ie^2(1 - \cos\theta). \end{aligned} \tag{71}$$

donde los espinores de Weyl correspondientes son:

$$\begin{aligned} \lambda_-(1) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_+(3) = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \\ \chi_+(2) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_-(4) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{72}$$

En resumen, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\bar{e}_R e_L \to \bar{\mu}_R \mu_L} &= -e^2(1+\cos\theta) = \mathcal{M}_{\bar{e}_L e_R \to \bar{\mu}_L \mu_R} \\ \mathcal{M}_{\bar{e}_R e_L \to \bar{\mu}_L \mu_R} &= -e^2(1-\cos\theta) = \mathcal{M}_{\bar{e}_L e_R \to \bar{\mu}_R \mu_L}. \end{aligned} \tag{73}$$

Por otro lado, si consideramos en el estado inicial las siguientes configuraciones, $\bar{e}_L e_L$ y $\bar{e}_R e_R$, se tienen dos diferentes términos correspondiente al elemento de matriz (60), uno es $\bar{v}_L(p_2)\gamma_\mu u_L(p_1)$, el cual desarrollando explícitamente se tiene

$$\bar{v}_L\gamma_\mu u_L = 2E(0, \chi_-(2)) \times \begin{pmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_-(1) \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \tag{74}$$

Del mismo modo se concluye que el otro término es $\bar{v}_R(p_2)\gamma_\mu u_R(p_1) = 0$. Por lo tanto, las configuraciones de helicidades donde los elementos de matriz tienen todas las partículas de helicidad izquierda o todas las partículas de helicidad derecha:

$$\mathcal{M}_{\bar{e}_L e_L \to \bar{\mu}_L \mu_L}, \quad \mathcal{M}_{\bar{e}_R e_R \to \bar{\mu}_R \mu_R}, \tag{75}$$

van a ser nulas. También van a ser nulas aquellas donde hay tres partículas, ya sea de helicidad izquierda o helicidad derecha, por ejemplo

$$\mathcal{M}_{\bar{e}_L e_R \to \bar{\mu}_L \mu_L}, \quad \mathcal{M}_{\bar{e}_R e_R \to \bar{\mu}_L \mu_R}. \tag{76}$$

Debido a esta naturaleza que poseen los elementos de matriz, de las 16 posibles configuraciones de helicidades solamente sobreviven 4 de estas. Las cuatro amplitudes que quedan son las que se muestran en (73). Entonces la amplitud cuadrada promediada total es

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{1}{4}\{|\mathcal{M}_{\bar{e}_R e_L \to \bar{\mu}_R \mu_L}|^2 + |\mathcal{M}_{\bar{e}_L e_R \to \bar{\mu}_L \mu_R}|^2 \\ &+ |\mathcal{M}_{\bar{e}_R e_L \to \bar{\mu}_L \mu_R}|^2 + |\mathcal{M}_{\bar{e}_L e_R \to \bar{\mu}_R \mu_L}|^2\} \\ &= \left(\frac{1}{4}\right) \times 2e^4\{(1+\cos\theta)^2 + (1-\cos\theta)^2\} \\ &= e^4(1+\cos^2\theta). \end{aligned} \tag{77}$$

3.3. El formalismo de los espinores de helicidad

Este método moderno se utiliza para calcular amplitudes de procesos de dispersión o decaimientos a nivel árbol en el límite de altas energías y para modelos que involucran partículas sin masa. El objeto matemático que se definen son los *espinores de Weyl o de helicidad* en la notación de van der Waerden, en la Subsec. 2.2 se mostró que hay cuatro tipos de espinores (22), los cuales se van a denotar aquí como *ket* angulado $|\lambda\rangle$ para el que se transforma bajo la representación izquierda y un *ket* cuadrado $|\chi]$ para el que se transforma en la representación derecha. También vimos las propiedades del espinor métrico (20), y como nos relaciona los espinores de Weyl izquierdos y derechos con sus conjugados, el espinor ϵ^{ab} nos permite subir y bajar índices espinoriales, en notación de amplitudes vamos a tener por ejemplo:

$$|p\rangle^a = \epsilon^{ab}\langle p|_b, \quad [p|^{\dot{a}} = \epsilon^{\dot{a}\dot{b}}|p]_{\dot{b}}. \tag{78}$$

La contracción entre dos espinores se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\langle\lambda\chi\rangle &= \epsilon^{ab}\lambda_a\chi_b = -\langle\chi\lambda\rangle, \\ &= \epsilon_{\dot{a}\dot{b}}\tilde{\lambda}^{\dot{a}}\tilde{\chi}^{\dot{b}} = -[\chi\lambda]. \end{aligned} \tag{79}$$

En particular, $\langle\lambda\lambda\rangle = [\lambda\lambda] = 0$, y el conjugado es $\langle\lambda\chi\rangle = [\chi\lambda]^*$. Por otro lado, hemos visto que los espinores de Dirac pueden ser izquierdo o derechos, así que un estado físico puede ser uno de los dos, en términos de espinores de Weyl se definen como:

$$v_+(p) = u_-(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ |p]_{\dot{a}} \end{pmatrix} \equiv |p],$$

$$v_-(p) = u_+(p) = \begin{pmatrix} |p\rangle^a \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |p\rangle, \tag{80}$$

$$\bar{u}_-(p) = \bar{v}_+(p) = (\langle p|_a, 0) \equiv \langle p|,$$

$$\bar{u}_+(p) = \bar{v}_-(p) = (0, [p|^{\dot{a}}) \equiv [p|. \tag{81}$$

En el caso en el que los fermiones no tengan masa, las partículas y antipartículas son representadas por los mismos estados de espín. Como regla nemotecnia se tiene que para una partícula derecha $|p]$ esta asociada con una helicidad $h = +(1/2)$ y una partícula izquierda $|p\rangle$ es asociada con un helicidad $h = -(1/2)$. Observar que tienen cierta similitud con (59). En la práctica los espinores se van a escribir con números para representar sus momentos, por ejemplo: $|p_1] \to |1]$, $\langle p_3| \to \langle 3|$. Podemos re-parametrizar el momento p_μ de cualquier partícula como un bi-espinor usando las matrices de Pauli, esto es posible ya que cualquier matriz de 2×2 con determinante nulo puede ser escrita como el producto externo de dos vectores de dos componentes, denotado como $p_{\dot{a}b} = \tilde{\lambda}_{\dot{a}} \otimes \lambda_b \equiv \tilde{\lambda}_{\dot{a}}\lambda_b$. Se trabaja con una notación de *brackets* de Dirac: $\tilde{\lambda}_{\dot{a}} \to |p]_{\dot{a}}$ y $\lambda_b \to \langle p|_b$. Si escribimos el momento en coordenadas esféricas, $p_\mu = (E, E\sin\theta\cos\phi, E\sin\theta\sin\phi, E\cos\theta)$, tendremos soluciones explícitas para $|p]_{\dot{a}}$ y $\langle p|_b$ usando la matriz presentada en (23), se tiene:

$$p_{\dot{a}b} = \begin{pmatrix} 2E\cos^2\frac{\theta}{2} & 2E\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi} \\ 2E\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi} & 2E\sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \tag{82}$$

Para el *caso sin masa*, el $\det(p_{\dot{a}b}) = 0$ (rango $= 1$), entonces se tiene que $p_{\dot{a}b} = |p]_{\dot{a}}\langle p|_b$, donde

$$\begin{aligned}|p]_{\dot{a}} &= \sqrt{2E}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi} \end{pmatrix} = \sqrt{2E}\lambda_+, \\ \langle p|_b &= \sqrt{2E}\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\right). \end{aligned} \tag{83}$$

Del mismo modo para $p^{a\dot{b}} = |p\rangle^a[p|^{\dot{b}}$ donde:

$$\begin{aligned}|p\rangle^a &= \sqrt{2E}\begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi} \end{pmatrix} = \sqrt{2E}\lambda_-, \\ [p|^{\dot{b}} &= \sqrt{2E}\left(\sin\frac{\theta}{2}, -\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\right). \end{aligned} \tag{84}$$

Notar las similitudes con las expresiones presentadas en la sección anterior dadas por (59) y (45). Las expresiones (83) y (84) satisfacen las ecuaciones de Weyl sin masa:

$$\begin{aligned}p^{a\dot{b}}|p]_{\dot{b}} = 0, &\quad p_{\dot{a}b}|p\rangle^b = 0, \\ [p|^{\dot{b}}p_{\dot{b}a} = 0, &\quad \langle p|_b p^{b\dot{a}} = 0, \end{aligned} \tag{85}$$

este conjunto de ecuaciones equivalen a (50) y (51) cuando $m = 0$. Por otro lado, los espinores de helicidad tienen las siguientes propiedades y definiciones:

$$\begin{aligned}[p|\gamma^\mu|q\rangle = \langle p|\gamma^\mu|q] &= [p|\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho|q] \\ &= \langle p|\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho|q\rangle = 0, \end{aligned} \tag{86}$$

$$\langle p|\gamma^\mu|q] = [q|\gamma^\mu|p\rangle, \tag{87}$$

$$\langle p|\gamma_\mu|q]\langle r|\gamma^\mu|s] = 2\langle pr\rangle[sq], \tag{88}$$

$$\langle p|\not{k}|q] = \langle pk\rangle[kq]. \tag{89}$$

La Ec. (86) equivale al resultado que vimos en la Ec. (74), nos dice que cualquier número impar de γ^μ ensandwichado por espinores cuadrados o angulados resulta ser nula. La Ec. (88) se le conoce como la identidad de Fierz. A continuación, vamos a demostrar la identidad de Fierz utilizando la notación de amplitudes, partimos del lado derecho de la Ec. (88):

$$\begin{aligned}\langle p|\gamma_\mu|q]\langle r|\gamma^\mu|s] &= (\bar{u}_-(p)\gamma_\mu v_+(q)) \times (\bar{u}_-(r)\gamma^\mu v_+(s))\\ &= \langle p|_a(\sigma_\mu)^{a\dot{b}}|q]_{\dot{b}} \times \langle r|_c(\sigma^\mu)^{c\dot{d}}|s]_{\dot{d}}\\ &= \langle p|_a|q]_{\dot{b}}(\sigma_\mu)^{a\dot{b}}(\sigma^\mu)^{c\dot{d}}\langle r|_c|s]_{\dot{d}}\\ &= \langle p|_a|q]_{\dot{b}}(2\epsilon^{ac}\epsilon^{\dot{b}\dot{d}})\langle r|_c|s]_{\dot{d}}\\ &= 2\langle p|_a\epsilon^{ac}\langle r|_c\epsilon^{\dot{b}\dot{d}}|s]_{\dot{d}}|q]_{\dot{b}}\\ &= 2\langle p|_a|r\rangle^a[s|^{\dot{b}}|q]_{\dot{b}} = 2\langle pr\rangle[sq], \end{aligned} \tag{90}$$

en la primera igualdad hemos usados las definiciones (80), (81) y la matriz de Dirac (40), las etiquetas q, p, r, s representan los momentos de las partículas. Posteriormente usamos la identidad

$$(\sigma_\mu)^{a\dot{a}}(\sigma^\mu)^{b\dot{b}} = 2\epsilon^{ab}\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}, \tag{91}$$

luego subimos índices como en (78) con $|r\rangle^a = \epsilon^{ac}\langle r|_c$ y $[s|^{\dot{b}} = \epsilon^{\dot{b}\dot{d}}|s]_{\dot{d}}$. Las relaciones de completes y conservación de momento se escriben como:

$$\not{p} = |p\rangle[p| + |p]\langle p|, \quad \sum_j^n \langle ij\rangle[jk] = 0, \tag{92}$$

con todos los momentos entrantes ($p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$). La contracción entre dos vectores de momento se define de la siguiente manera:

$$q \cdot p = q^\mu p_\mu = \frac{1}{2}q_{\dot{a}a}p^{a\dot{a}} \equiv \frac{1}{2}Tr(|q]\langle qp\rangle[p|) = \frac{1}{2}\langle qp\rangle[pq],$$

lo que da lugar a re-definir las variables de Mandelstam como:

$$s_{ij} = (p_i + p_j)^2, \quad s_{ijk} = (p_i + p_j + p_k)^2, \quad etc. \tag{93}$$

En particular, se tiene que $s = s_{12}, t = s_{13}, u = s_{14}$ son las variables de Mandelstam estándar para procesos de dos a dos partículas. En términos de espinores cuadrados y angulados estos son:

$$\begin{aligned} s &= \langle 12\rangle[21] = \langle 34\rangle[43],\\ u &= \langle 14\rangle[41] = \langle 23\rangle[32],\\ t &= \langle 13\rangle[31] = \langle 24\rangle[42]. \end{aligned} \tag{94}$$

3.4. El método de amplitudes en electrodinámica cuántica

Un elemento de matriz o amplitud ahora se va a denotar como $\mathcal{M}(1^{h_1}, 2^{h_2}, 3^{h_3}, 4^{h_4})$, donde h_i representa las helicidades de las partículas involucradas, por simplicidad las helicidades aparecerán como superíndices $\pm$. Los números 1 y 2 se refieren a las partículas en el estado inicial, 3 y 4 las partículas en el estado final. Retomando el proceso $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ se procede a calcular sus amplitudes con este formalismo.

3.4.1. Proceso de dispersión: $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

Se escoge el electrón como derecho o helicidad $h_1 = +$, denotado por $|1]$, el positrón debe ser izquierdo o helicidad $h_2 = -$, debido a la propiedad (86), el muón se toma como $\langle 3|$ por lo que el anti-muón es $|4]$. Entonces la amplitud (60) se convierte en

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}(1^+, 2^-, 3^-, 4^+) &= \frac{i^2e^2}{s}\langle 2|\gamma^\mu|1](-ig^{\mu\nu})\langle 3|\gamma_\nu|4]\\ &= 2\frac{ie^2}{s}\langle 23\rangle[41], \end{aligned} \tag{95}$$

en la segunda igualdad se utilizó la identidad de Fierz (88) y que $\langle\lambda\chi\rangle = [\chi\lambda]^*$. Se toma el cuadrado de esta amplitud dando como resultado

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}(1^+, 2^-, 3^-, 4^+)|^2 &= \frac{4e^4}{s^2}\langle 23\rangle[41][32]\langle 14\rangle\\ &= \frac{4e^4}{s^2}u^2. \end{aligned} \tag{96}$$

En la última igualdad se han usado las variables (94). Las amplitudes son invariantes bajo paridad, al cambiar el signo de la helicidad $h_i \to -h_i$ se obtiene el mismo resultado para la amplitud $\mathcal{M}(1^-, 2^+, 3^+, 4^-)$ que en (96). Las otras amplitudes que contribuyen son

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}(1^+, 2^-, 3^+, 4^-)|^2 &= |\mathcal{M}(1^-, 2^+, 3^-, 4^+)|^2\\ &= \frac{4e^4}{s^2}t^2. \end{aligned} \tag{97}$$

Entonces, la amplitud cuadrada promediada dada por (77) es

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4\left(\frac{t^2 + u^2}{s^2}\right) = e^4(1 + \cos^2\theta), \tag{98}$$

donde se han usado las variables s, u, t con respecto al centro de masa, para procesos donde las masas son despreciables [9]:

$$s = 4E, \quad t = -\frac{s}{2}(1 - \cos\theta), \quad u = -\frac{s}{2}(1 + \cos\theta). \tag{99}$$

4. Conclusiones

En este artículo revisamos el proceso de dispersión $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ a nivel árbol como ejemplo de cálculo de una amplitud para ilustrar el formalismo de los espinores de Weyl. Observamos en (98) y (77) resultados más directos en comparación con el método tradicional de Feynman de cuatro componentes donde se usa la tecnología de las trazas [8]. Las amplitudes cuyas configuraciones de helicidades tengan a lo más dos helicidades positivas o dos negativas como en (97), son nombradas *Maximum Helicity Violating* (*MHV*, por sus siglas en inglés) [25]. Estas son las únicas amplitudes que contribuyen en los procesos. Con este trabajo espero cumplir el objetivo de motivar a los estudiantes de explorar las nuevas tendencias que hay en teoría cuántica de campos.

Agradecimientos

Agradezco al referí y los doctores Olga Guadalupe Félix Beltrán, J. Lorenzo Díaz Cruz, Moisés Zeleny Mora, Gerardo Hernández Tomé por sus valiosos comentarios, y discusiones sobre el manuscrito. También agradezco al CONAHCYT por otorgarme la beca *Becas Nacional (Tradicional) 2022 - 1* sin la cual no sería posible estudiar mi posgrado.

---

i. Se denota en mayúscula Ψ a un espinor de cuatro componentes y en minúscula ψ a un espinor de dos componentes.

ii. Estas representaciones ahora son matrices de 2×2 que actúan sobre un vector de dos componentes llamado *espinor*.

iii. De aquí en adelante usaremos la notación **1**, para referirnos a la matriz identidad de 2×2, también tomamos el tensor métrico de Minkowski con signatura -2, es decir, $g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$.

iv. Es un subgrupo del grupo del Lorentz, para mayores detalles ver [25–27].

1. L. H. Ryder, Quantum Field Theory, Cambridge University Press, 1996, `https://doi.org/10.1017/CBO9780511813900`.
2. A. M. Steane, An introduction to spinors, [arXiv:1312.3824 [math-ph]].
3. E. Cartan, *Bull. Math. France* **41** (1913) 53. Lectures on the theory of spinors. I: Spinors of three-dimensional space, *Actual. Sci. Ind.* **643** (1938) 1-98
4. P. A. M. Dirac, The quantum theory of the electron, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **117** (1928) 610-624 `https://doi.org/10.1098/rspa.1928.0023`.
5. E. Majorana, Teoria simmetrica dell'elettrone e del positrone, *Nuovo Cim.* **14** (1937) 171-184 `https://doi.org/10.1007/BF02961314`.
6. B. L. Van Der Waerden, Nachrichten Akad. Wiss. Gottingen, Math.-Physik- K1- (1929) 100.
7. H. Weyl, Quantenmechanik und Gruppentheorie, Zeitschrift für Physik **46** (1927) 1, `https://doi.org/10.1007/BF02055756`
8. M. E. Peskin and D. V. Schroeder, An Introduction to quantum field theory (Addison-Wesley, USA, 1995).
9. G. Kane, Modern elementary particle physics, (Cambridge University Press, second edition).
10. M. Thomson, Modern Particle Physics, (Cambridge University Press, Cambridge, 2013), `https://doi.org/10.1017/CBO9781139525367`
11. H. Elvang and Y.-T. Huang, Scattering Amplitudes in Gauge Theory and Gravity, (Cambridge University Press, 2015). `https://doi.org/10.1017/CBO9781107706620`
12. F. Berends *et al*., Single bremsstrahlung processes in gauge theories, *Phys. Lett. B* **103** (1981) 124, `https://doi.org/10.1016/0370-2693(81)90685-7`
13. K. Hagiwara and D. Zeppenfeld, Helicity amplitudes for heavy lepton production in e^+e^- annihilation, *Nucl. Phys. B* **274** (1986) 1, `https://doi.org/10.1016/0550-3213(86)90615-2`
14. S. J. Parke and T. R. Taylor, An Amplitude for n Gluon Scattering, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 2459, `https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.56.2459`.
15. M. D. Schwartz, Quantum Field Theory and the Standard Model, Cambridge University Press, 2014).
16. H. K. Dreiner, H. E. Haber and S. P. Martin, Two-component spinor techniques and Feynman rules for quantum field theory and supersymmetry, *Phys. Rept*. **494** (2010) 1, `https://doi.org/10.1016/j.physrep.2010.05.002`.
17. N. Arkani-Hamed, T. C. Huang and Y. t. Huang, Scattering amplitudes for all masses and spins, *JHEP* **2021** (2021) 70, `https://doi.org/10.1007/JHEP11(2021)070`.
18. R. K. Ellis, Z. Kunszt, K. Melnikov and G. Zanderighi, One-loop calculations in quantum field theory: from Feynman diagrams to unitarity cuts, *Phys. Rept*. **518** (2012) 141-250 `https://doi.org/10.1016/j.physrep.2012.01.008`.
19. W. J. Torres Bobadilla *et al*. May the four be with you: Novel IR-subtraction methods to tackle NNLO calculations, *Eur. Phys. J. C* **81** (2021) 250 `https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-021-08996-y`.
20. V. Radovanovic, Problem book in Quantum Field Theory, (Springer, 2006), pp. 74-75.
21. M. Robinson, Symmetry and the Standard Model, (Springer, 2011), pp. 116- 136.
22. P. Langacker, The standard model and beyond, 2nd ed. (CRC Press, 2017). `https://doi.org/10.1201/b22175`.
23. J. Díaz Cruz, B. Larios, O. Meza Aldama, and J. Reyes Pérez, Espinores de Weyl y el formalismo de helicidad, *Rev. Mex. Fis. E*, **61** (2015) 104-112.
24. D. Bailin and A. Love, Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory (CRC Press, 1994), `https://doi.org/10.1201/9780367805807`.
25. E. P. Wigner, On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group *Ann. Math. 40* (1939) 149, `https://doi.org/10.2307/1968551`
26. Y. S. Kim and E. P. Wigner, Space-time Geometry of Relativistic Particles, *J. Math. Phys.* **31** (1990) 55, `https://doi.org/10.1063/1.528827`
27. S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields, vol. I, (Cambridge University Press, 2005) pp. 609.
28. F. A. Berends and W. T. Giele, Recursive Calculations for Processes with n Gluons, *Nucl. Phys. B* **306** (1988) 759, `https://doi.org/10.1016/0550-3213(88)90442-7`.