

Ley de enfriamiento de Newton con temperatura variable

P. E. Moreira Galván

Universidad Anáhuac Querétaro

Cto. Universidades I, Fracción 2, 76246 Qro.

Tecnológico Nacional de México Campus Querétaro,

Av Tecnológico S/N, Centro Histórico, Centro, 76000 Santiago de Querétaro, Qro.

O. Ortega Ruíz

Universidad Anáhuac Querétaro,

Cto. Universidades I, Fracción 2, 76246 Qro.

Received 17 November 2023; accepted 16 May 2024

Este trabajo presenta un estudio teórico-experimental sobre la aplicabilidad de la ley de enfriamiento de Newton en lapsos de tiempo prolongados, considerando una temperatura ambiente variable senoidal. En el estudio teórico, se resolvió una ecuación diferencial ordinaria lineal que describe la transferencia de calor entre un objeto y su entorno. La solución de esta ecuación permite calcular la temperatura del objeto a lo largo del tiempo, considerando una temperatura ambiente variable. En la parte experimental, se construyeron dos modelos experimentales para evaluar la ley de enfriamiento de Newton. Se utilizó un modelo senoidal para representar la temperatura ambiente, lo cual representa una condición inicial no tradicional. Los resultados experimentales se compararon con la solución teórica obtenida en la primera parte del estudio, considerando 22 y 52 horas. El objetivo de este trabajo es evaluar la validez de la ley de enfriamiento de Newton en situaciones que no se han explorado a fondo anteriormente. La incorporación de una temperatura senoidal como condición inicial aporta una nueva perspectiva al estudio de este fenómeno y abre la puerta a la modificación de modelos de temperatura y otros análogos en el ámbito de las ecuaciones diferenciales ordinarias y sus aplicaciones.

Descriptor: Ley de enfriamiento de Newton; modelación; ecuaciones diferenciales.

This work presents a theoretical-experimental study on the applicability of Newton's cooling law in prolonged time periods, considering a sinusoidal variable ambient temperature. In the theoretical study, a linear ordinary differential equation that describes the heat transfer between an object and its environment was solved. The solution of this equation allows calculating the object's temperature over time, considering a variable ambient temperature. In the experimental part, two experimental models were built to evaluate Newton's cooling law. A sinusoidal model was used to represent the ambient temperature, which represents a non-traditional initial condition. The experimental results were compared with the theoretical solution obtained in the first part of the study, considering 22 and 52 hours. The objective of this work is to evaluate the validity of Newton's cooling law in situations that have not been explored in depth previously. The incorporation of a sinusoidal temperature as an initial condition provides a new perspective on the study of this phenomenon and opens the door to the modification of temperature models and other analogous models in the field of ordinary differential equations and their applications.

Keywords: Newton's cooling law; modelling; differential equations.

DOI: <https://doi.org/10.31349/RevMexFis.22.010218>

1. Introducción

La búsqueda de estrategias que combinen, en el aprendizaje de las matemáticas, los contenidos y sus aplicaciones brindan oportunidades a los alumnos de reconocer la utilidad de esta asignatura y otras afines en contextos propios de su vida cotidiana o de su desarrollo profesional como ingenieros, como se muestra en las Refs. [1–5], donde se observó un aprendizaje significativo por parte de los estudiantes.

El experimento surgió a razón de los cuestionamientos de los estudiantes que notaron que la temperatura constante que modela el sistema (como propuesto tradicionalmente en la asignatura y los libros de texto) no coincidía de forma exacta con las pruebas experimentales, por lo cual, se propuso un modelo con temperatura variable, cuya solución modela más adecuadamente el fenómeno físico. Este proceso de reflexión del alumno y el acompañamiento que brinda el docente es

importante, pues el estudiante logra notar la inconsistencia del modelo tradicional con temperatura constante y propone un nuevo modelo, considerando incluir más variables al sistema para describir la dinámica de un proceso físico; que le permitió analizar el fenómeno y predecir su comportamiento. Con ello, el alumno desarrolla la habilidad para modelar situaciones cotidianas en su entorno tal como se señala en las Refs. [2, 7].

Ecuaciones diferenciales es una de las asignaturas más importantes de los programas académicos de ingeniería debido que permiten modelar diferentes sistemas físicos que evolucionan con el tiempo, sistemas que aparecen de manera frecuente en diferentes materias. La ley de enfriamiento de Newton, es un problema usual de resolver en la materia de ecuaciones diferenciales y para facilitar el tratamiento de este en la mayoría de los libros se considera que la temperatura

del ambiente es constante, aunque esto es una buena aproximación para un periodo corto de tiempo, para un largo plazo no lo es. Lo anterior brinda una buena oportunidad para notar que la solución, no consistente con los datos experimentales en un periodo largo de tiempo, puede mejorarse al incluir temperatura variable en el modelado, y por consecuente se obtiene una solución más aproximada a la realidad.

Este trabajo busca el uso de las tecnologías, pues actúan como catalizadoras del proceso de aprendizaje como se indica en las Refs. [3–6, 10] donde se hace énfasis en el uso de herramientas tecnológicas y la necesidad de replantear la clase tradicional a lápiz y papel. En el desarrollo del presente trabajo se utilizó el software Mathematica y Matlab para solucionar la ecuación diferencial, proceso que sería complejo de realizar de la forma tradicional, esto permite que el estudiante pueda construir su aprendizaje a partir de la experiencia práctica.

2. Teoría

La ley de enfriamiento de Newton establece lo siguiente:

“La tasa de cambio de temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y su entorno”.

Cuya forma matemática es:

$$\frac{dT(t)}{dt} = k(T(t) - T_{am}) \text{ sujeto a } T(0) = T_0, \quad (1)$$

donde $T(t)$, T_{am} , y k representan la función temperatura, la función de temperatura ambiente y constante de proporcionalidad, respectivamente.

De manera usual se considera la temperatura T_{am} como constante, pero en nuestro estudio se considero como una función senoidal pues se observo que la temperatura ambiente exterior seguía un comportamiento de estas características al graficar los datos durante 48 horas como se muestra en la Fig. 1 y se propone en libros como en la Ref. [11]. Se utilizó el software MATLAB para ajustar un modelo de Fourier, dando origen a la siguiente función: $T_{am}(t) = 20.4637 + 6.02658 \sin(0.2695t - 1.12296)$, que se adapta de manera adecuada a los datos obtenidos.

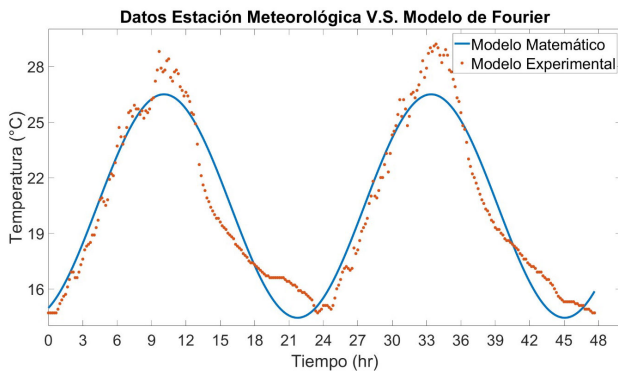


FIGURE 1. Temperatura ambiente: Datos de la estación meteorológica.

3. Diferentes modelos para la ley de enfriamiento de Newton

3.1. Temperatura constante

Consideremos la T_{am} constante. Entonces la Ec. (1), se puede resolver por separación de variables,

$$\frac{dT}{T - T_{am}} = k dt, \quad (2)$$

$$\ln |T - T_{am}| = kt + c, \quad (3)$$

$$T(t) = ce^{kt} + T_{am}. \quad (4)$$

Ahora para determinar el valor de c , se usa la condición inicial $T(0) = T_0 = c + T_{am}$, con lo cual $c = T_0 - T_{am}$, y por último para determinar la constante de proporcionalidad k , usamos un dato experimental $T(t_1) = T_1$, y necesitamos despejar k de lo siguiente ecuación:

$$T_1 = (T_0 - T_{am})e^{kt_1} + T_{am},$$

llegando a:

$$k = \frac{\ln\left(\frac{T_1 - T_{am}}{T_0 - T_{am}}\right)}{t_1},$$

por lo cual la solución es

$$T(t) = (T_0 - T_{am})e^{kt} + T_{am}. \quad (5)$$

3.2. Temperatura senoidal

Ahora consideremos la temperatura variable como una función de la siguiente forma $T_{am}(t) = \alpha + \beta \sin(\gamma t)$, con α , β , y γ constantes, las cuales se explica más adelante como se determinan. Por tanto, la Ec. (1) tiene la siguiente forma:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - \alpha - \beta \sin(\gamma t)),$$

una manera de encontrar solución es multiplicarla por el factor integrante e^{-kt} para obtener

$$e^{-kt} \left(\frac{dT}{dt} - kT \right) = -ke^{-kt}(\alpha + \beta \sin(\gamma t)),$$

$$\frac{d(e^{-kt}T)}{dt} = -ke^{-kt}(\alpha + \beta \sin(\gamma t)),$$

$$e^{-kt}T(t) - T(0) = -k \int_0^t e^{-k\tau} (\alpha + \beta \sin(\gamma\tau)) d\tau.$$

integrando por partes, se tiene la solución

$$T(t) = \alpha + T(0)e^{kt} - \frac{\beta\gamma ke^{kt}}{\gamma^2 + k^2} + \frac{\beta k(k \sin(\gamma t) + \gamma \cos(\gamma t))}{\gamma^2 + k^2}. \quad (6)$$

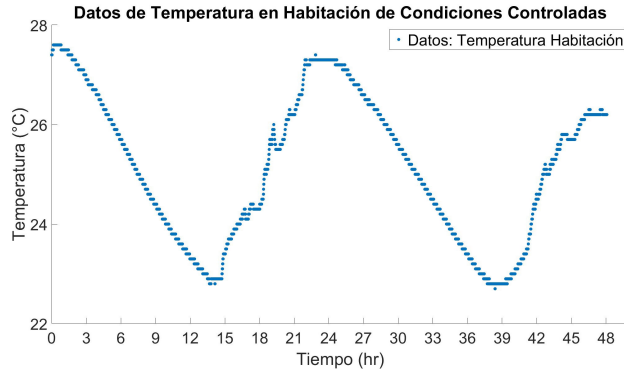


FIGURA 2. Temperatura en habitación de condiciones controladas.

Para determinar el valor de k , se usa el dato experimental $T(t_1) = T_1$ y se necesita resolver la ecuación:

$$T_1 = \alpha + T(0)e^{kt_1} - \frac{\beta\gamma ke^{kt_1}}{\gamma^2 + k^2} + \frac{\beta k(k \sin(\gamma t_1) + \gamma \cos(\gamma t_1))}{\gamma^2 + k^2}, \quad (7)$$

la cual se resolverá de manera numérica con ayuda de software.

4. Experimentación y comparación

Se realizó el experimento calentando agua (objeto sujeto a cambio de temperatura) y dejándola dentro de una hielera (ambiente controlado) en una habitación cuya temperatura máxima se alcanza alrededor de las 9 pm como se muestra en la Fig. 2. La variación de la temperatura se comporta de forma senoidal, y solo varía en un rango de 2 grados dentro de la hielera. La temperatura se midió con ayuda de un termómetro digital vinculado a un software de recolección de datos.

4.1. Ejemplo 1

Se realizó el experimento durante 22 horas, con una temperatura ambiente inicial de 23.9°C. La siguiente tabla muestra un condensado de los datos obtenidos del cambio de temperatura del agua; se utilizará como condición inicial para obtener las ecuaciones de temperatura correspondiente: $t_1 = 100$.

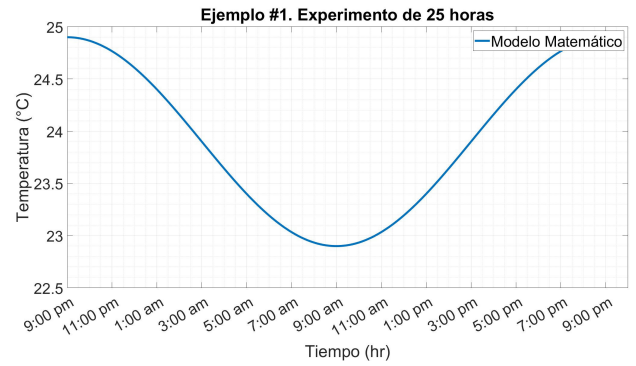


FIGURA 3. Función temperatura con máximo a las 9 pm.

TABLA I.

Tiempo (min)	Temperatura (°C)
0	78.6
50	60
100	49.1
200	37
300	31.1

Considerando la temperatura constante en la ecuación diferencial y sustituyendo los valores iniciales en la solución, se obtiene la siguiente ecuación de temperatura: T_c

$$T_c(t) = 23.9 + 54.7e^{-0.0077502t}. \quad (8)$$

Para la temperatura variable se plantea utilizar una función seno para modelar la temperatura ambiente, ya que esta función presenta una periodicidad y una variación de amplitud que se ajustan a las características de los datos que se presentan en la Fig. 3.

En este caso la variación fue de 2°C y un desplazamiento vertical de 23.9, por lo cual se plantea una función de la forma $T(t) = \alpha + \beta \sin(t + \varphi)$, donde la constante α es el desplazamiento vertical, β es la mitad de la variación de la temperatura y φ es la fase horizontal de la función seno. Teniendo esto en cuenta se obtiene la siguiente función temperatura $T_{am}(t) = 23.9 + \sin[(\pi t/720) + (\pi/2)] = 23.9 + \cos(\pi t/720)$, se agregó el término $\pi/2$ para desplazar la función horizontalmente de forma tal que el máximo se obtenga en $t = 0$ que es la temperatura máxima del cuarto, que es a la hora que se empezó el experimento.

Sustituyendo los valores en Ec. (6), se obtiene la siguiente función que modela la temperatura con temperatura ambiente variable:

$$T_v(t) = \left(\frac{-1.29082 \times 10^7 k^2 - 235.884}{518400.k^2 + \pi^2} + 78.6 \right) e^{-kt} + \frac{518400.k^2 \cos\left(\frac{\pi t}{720}\right) + 1.23898 \times 10^7 k^2 + 2261.95k}{518400.k^2 + \pi^2} + \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{720}\right) + 235.884}{518400.k^2 + \pi^2}.$$

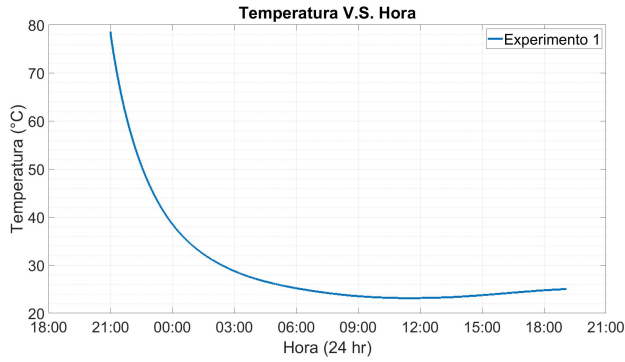


FIGURA 4. Datos experimentales.

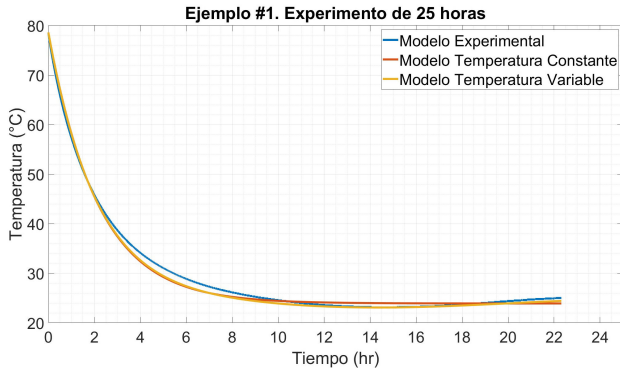


FIGURA 5. Ejemplo 1.

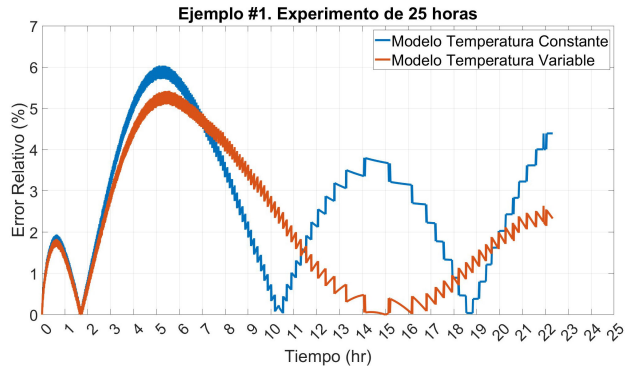


FIGURA 6. Ejemplo 1 - error relativo.

Para encontrar el valor de la constante k usamos el comando FindRoot y el correspondiente a la temperatura 49.1 de la siguiente manera en Mathematica,

```
FindRoot[T[100, k] == 49.1, {k, .01}]
{k -> 0.00796204}
```

La ecuación de la temperatura T_v es la siguiente,

$$T_v(t) = 23.9 + 53.931e^{-0.007962t} + 0.421448 \sin\left(\frac{\pi t}{720}\right) + 0.769039 \cos\left(\frac{\pi t}{720}\right). \quad (9)$$

Cuya gráfica se muestra en la Fig. 4.

Comparando los datos experimentales y los resultados obtenidos, de la temperatura constante y variable.

En la Fig. 6 se muestran los errores relativos, del experimento en los cuales se observa que el error disminuye usando el modelo de temperatura variable.

4.2. Ejemplo 2

En el segundo ejemplo, la experimentación se comenzó a las 6 pm con una temperatura ambiente inicial de 24.5°C, y ya que el proceso experimental fue mas prolongado se considero una variación de 3 grados, teniendo así la siguiente función temperatura ambiente $T_{am}(t) = 24 + 1.5 \sin([\pi t/720] + [\pi/4])$, se agrego el término de $\pi/4$, pues la temperatura máxima en el cuarto corresponde a las 9 pm, por lo cual 3 horas corresponden a desfazar $\pi/4$ la función seno.

En la Tabla II se muestran algunos valores experimentales, para encontrar el valor de la constante k , en este ejemplo se usó como condición de frontera, $t_1 = 100$.

Resolviendo la ecuación diferencial con temperatura constante se tiene la siguiente función

$$T_c(t) = 24.5 + 60.7e^{-0.00745568t}. \quad (10)$$

Mientras que se obtiene con la temperatura variable la siguiente función y resolviendo de manera análoga al ejemplo 1 con ayuda de Mathematica, se obtiene

$$T_v(t) = 24 + 60.8603e^{-0.0076t} + 1.12815 \sin\left(\frac{\pi t}{720} + \frac{\pi}{4}\right) - 0.647693 \cos\left(\frac{\pi t}{720} + \frac{\pi}{4}\right). \quad (11)$$

TABLA II.

Tiempo (min)	Temperatura (°C)
0	85.2
50	65.4
100	53.3
200	39.3
300	32.5

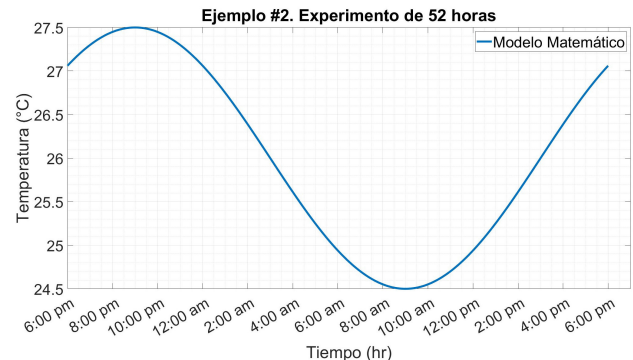


FIGURA 7. Función temperatura con máximo a las 9 pm.

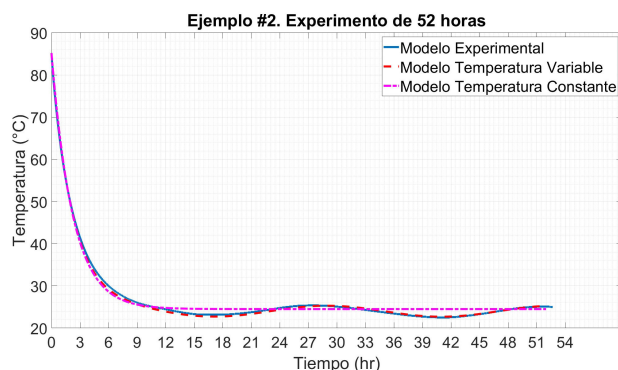


FIGURA 8. Comparación modelo experimental y modelos con temperatura constante y variable.

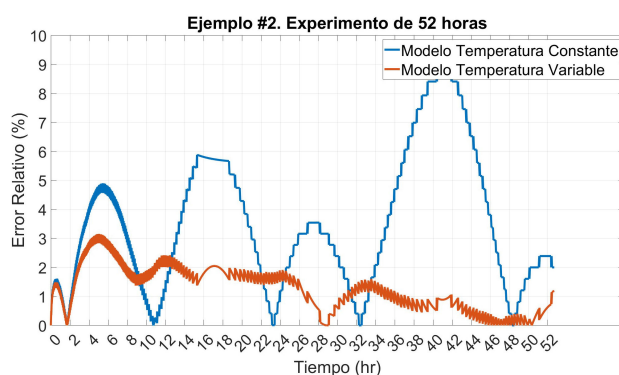


FIGURA 9. Error relativo.

Como se muestra en la siguiente gráfica el error es mucho menor considerando la temperatura variable.

Una mejora es considerar los modelos (10) y (11) y examinar problemas en los cuales se busca determinar el tiempo al cual el líquido llega a una temperatura determinada, por ejemplo, $\lim_{t \rightarrow \infty} 24.5 + 60.7e^{-0.00745568t} = 24.5$, es decir, la temperatura ambiente nunca se alcanza, mientras que con la Ec. (11) y ayuda de Matlab la temperatura ambiente se alcanza en los siguientes minutos 648.75, 1469.78 y 2009.03. Además que, temperaturas por debajo del ambiente no se alcanzarían con el modelo constante, pero sí para el modelo variable.

Conclusión

La implementación de este experimento fue gracias a las observaciones de los mismos estudiantes quienes no consideraban adecuada la formulación de temperatura constante, llevando el estudio a considerar temperatura variable, con esta adecuación se obtuvo una respuesta que se adapta significativamente mejor al modelo experimental (como puede observarse en las gráficas de error relativo), pues el modelo obtenido en la Ec. (6), en tiempos largos se comporta de manera senoidal. Con ayuda de software, la resolución de las ecuaciones diferenciales es más simple y rápida, dando la oportunidad de que el proceso de modelización matemática sea comprobado, quitando la limitante de resolver ecuaciones complejas, ayudando al aprendizaje y comprensión de las ecuaciones diferenciales, que de manera tradicional sería muy difícil o imposible de resolver en clase.

Los resultados experimentales mostraron una buena concordancia con la solución teórica, lo que valida la aplicabilidad de la ley de enfriamiento de Newton en lapsos de tiempo prolongados, considerando una temperatura ambiente variable adecuada. Este estudio abre nuevas perspectivas para el estudio de la transferencia de calor en sistemas con condiciones iniciales no tradicionales y aporta valiosos datos para el desarrollo de modelos más precisos. En conclusión, este estudio demuestra la viabilidad de utilizar la ley de enfriamiento de Newton para modelar enfriamiento o calentamiento, con condiciones iniciales variables y lapsos de tiempo prolongados. Los resultados obtenidos amplían nuestra comprensión de este fenómeno y sientan las bases para futuras investigaciones en el ámbito de la transferencia de calor y las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Esperando que sean usados en clase, los datos de estos experimentos y futuros están disponibles en la siguiente liga <https://drive.google.com/drive/folders/1wSFwwGUssNMvlsGGUdDR-nBgDMS5uS3h?usp=sharing>,

Agradecimientos

El primer autor quiere agradecer al SNI por el apoyo dado con la beca 336528 y también a la Universidad Anáhuac Querétaro, por las facilidades dadas para hacer el artículo.

1. J. Escalante-Martínez, Análisis del coeficiente de amortiguamiento viscoso en un sistema masa-resorte-amortiguador utilizando PPLANE y GEOGEBRA, *Rev. Mex. Fis. E*, **62** (2016) 66.
2. R. Rodríguez y S. Quiroz, El rol de la experimentación en la modelación matemática. *Educacion Matematica* **28** (2016) 91-110, <https://doi.org/10.24844/EM2803.04>
3. E. Lozada, C. Guerrero, A. Coronel, y R. Medina, Classroom Methodologies for teaching and learning differential equations: A systematic literature review and bibliometric analysis, *Mathematics* **9** (2021) 745, <https://doi.org/10.3390/math9070745>.
4. G. Ortigoza and R. I. Ponce de la Cruz Herrera, Resolviendo ecuaciones diferenciales ordinarias con Symbolic Math ToolboxTM (Matlab) y SymPy (Python), *Rev. Mex. Fis. E* **20** (2023) 020209, <https://doi.org/10.31349/RevMexFis.20.020209>
5. E. Pratidhina, F. R. Yuliani y W. S. B. Dwandaru, Relating sim-

- ple harmonic motion and uniform circular motion with Tracker, *Rev. Mex. Fis. E* **17** (2020) 141, <https://doi.org/10.31349/RevMexFisE.17.141>.
6. F. Zeynivandnezhad, Z. Ismail Z. y Y. M. Yusof, Teaching mathematical structures in differential equations using a computer algebra system to engineering students, IEEE 7th International Conference on Engineering Education (ICEED), (Kanazawa, Japan, 2015), pp. 10-15, <https://doi.org/10.1109/ICEED.2015.7451483>
 7. M. Artigue, The Future of Teaching and Learning Mathematics with Digital Technologies. In New ICMI Study Series (**13**, pp. 463-475). Springer. 2007. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_23
 8. C. García Castiblanco, Gestión de conocimiento desde el aprendizaje basado en realidades apoyado en la simulación: Casos de Aplicación, *Revista internacional de aprendizaje en ciencia, matemáticas y tecnología* **3** (2016) 55.
 9. F. Donado *et al.*, Estudio experimental de la viscosidad de un fluido magneto-reológico a base de magnetita mineral, *Rev. Mex. Fis E.* **53** (2007) 31.
 10. R. M. Zbiek *et al.*, Research on Technology in Mathematics Education. In Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 1169-1207), (2007)
 11. W.C. Xie, Differential Equations for Engineers. (Cambridge University Press, 2010). <https://doi.org/10.1017/CBO9780511761683>.