Education in Physics Revista Mexicana de Física E **21** 020216 1–6 JULY–DECEMBER 2024

Aspectos básicos de supergravedad $N = 1$ ($D = 4$)

J. L. Díaz Cruz, P. Ortega-Ruiz y J. Reyes Pérez
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,
Av. San Claudio y 18 Sur, C.U. 72570 Puebla, México,
e-mails: jldiaz@fcfm.buap.mx; pablo.ortegar@alumno.buap.mx; jonathan.reyesper@alumno.buap.mx

Received 6 February 2024; accepted 20 February 2024

En este trabajo revisamos brevemente supergravedad $N = 1$ en cuatro dimensiones ($D = 4$), también llamada supergravedad pura, donde la acción es invariante bajo transformaciones de norma y de supersimetría global. Nuestro propósito es alentar a los estudiantes de licenciatura a estudiar la teoría de supergravedad, en particular presentando la demostración explícita de estas invarianzas.

Descriptores: Einstein-Hilbert; Rarita-Schwinger; supergravedad; supersimetría global.

In this work we briefly review $N = 1$ supergravity in four dimensions ($D = 4$), also known as pure supergravity, where the action is invariant under gauge and global supersymmetry transformations. Our purpose is to encourage undergraduate students to study the theory of supergravity, in particular by presenting the explicit demonstrations of these invariances.

Keywords: Einstein-Hilbert; Rarita-Schwinger; supergravity; global supersymmetry.

DOI: https://doi.org/10.31349/RevMexFis.21.020216

1. Introducción

Uno de los problemas abiertos en la física fundamental es tratar de hacer compatibles la mecánica cuántica y la relatividad general. Casi un siglo de investigación nos ha mostrado lo difícil que es lograrlo, por ello todos los intentos por encontrar algún avance son valiosos. Así, el formular la relatividad general como una teoría cuántica de campos es un primer paso que nos deja importantes lecciones que sería deseable las pudiera aprender un estudiante de licenciatura. En particular, un caso de una teoría cuántica de la gravedad es supergravedad, que incorpora supersimetría, una nueva simetría que intercambia bosones y fermiones. En este artículo se propone discutir la teoría mas sencilla de supergravedad, llamada $N = 1$, formulada en el espacio-tiempo $D = 4$, con el objetivo de introducir a estudiantes de licenciatura a este tema. Para ello presentamos primero un breve repaso de relatividad general, teoría cuántica de campos y supersimetría.

En el año 1907, dos años después de haber publicado “On the Electrodynamics of Moving Bodies”, Albert Einstein observó que la teoría de la gravitación newtoniana era incompatible con la relatividad especial, por lo que propone el llamado principio de equivalencia, el cual supone la equivalencia entre un campo gravitacional y un sistema de referencia acelerado. La nueva teoría relativista sería una generalización de la relatividad especial, construida sobre el principio de equivalencia. Fue hasta el año de 1916 que Albert Einstein anunciaría su famosa teoría de la Relatividad General, la cual describe el espacio-tiempo mediante una elegante estructura matemática que conecta la curvatura de dicho espacio-tiempo con la gravedad [1]. De forma independiente, D. Hilbert llegaría a las mismas ecuaciones de campo a partir de un único principio variacional un año antes que Einstein, hoy en día a la acción que describe el campo gravitacional se le conoce como la acción de Einstein-Hilbert.

Tiempo después, con el surgimiento de la mecánica cuántica, se propone hacerla compatible con la relatividad especial, entonces nace lo que se conoce como Teoría Cuántica de Campos (QFT, por sus siglas en inglés), como su nombre lo dice es la cuantización de los campos clásicos como el campo electromagnético. En teoría cuántica de campos los grados de libertad son operadores y funciones del espacio-tiempo, los cuales actúan en un espacio de Hilbert, mientras que la imagen de las interacciones es que son mediadas por partículas. Así como en electromagnetismo el mediador es el fotón, la partícula mediadora de la fuerza gravitacional se llama *Gravitón*, el cual es un bosón de espín 2 [2].

En 1939, Fierz y Pauli proponen una teoría general para partículas de un espín arbitrario, en esta teoría las partículas de espín entero son descritas por tensores del rango adecuado y las de espín semi-entero son descritas por espinores de orden múltiple [3]. Posteriormente en 1941, J. Schwinger presenta un método alternativo al formalismo de Fierz y Pauli para partículas de espín semi-entero, así se desarrolla la teoría de espín $3/2$, conocida hoy en día como la teoría de Rarita-Schwinger [4].

En la década de los 70’s, nuevas simetrías estaban siendo estudiadas en modelos con campos de dos dimensiones conocidas entonces como transformaciones de supernorma, luego en 1974, Julius Wess y Bruno Zumino propusieron un modelo para campos en cuatro dimensiones, que mezclaba fermiones y bosones, hoy en día esta simetría es conocida como *Supersimetría* (SUSY, por sus siglas en inglés) [5].

Supersimetría es un formalismo que une partículas de diferentes espínes, con masas iguales, en un multiplete simétrico lo que tiene implicaciones teóricas importantes. Uno de ellos es que provee una solución para el *problema de jerarquías*, el cual se refiere al hecho de que la masa del Higgs recibe correcciones enormes a orden de lazos (loops diagrams), a este problema también se le conoce en la literatura como problema de naturalidad o *fine-tuning problem* [6]. En general, SUSY hace que las correciones bosónicas y fermiónicas a orden de un lazo para las masas de las partículas, se cancelen exactamente. Por lo tanto, se encontró que es posible construir teorías cuánticas de campos con mejor comportamiento en el ultra-violeta (UV): las teorías supersimétricas.

En este punto, surge la idea natural de tratar de combinar teorías supersimétricas con la relatividad general, el resultado fue presentado por Freedman, van Nieuwenhuizen y Ferrara en 1976, quienes introdujeron lo que hoy se conoce como *Supergravedad* (SUGRA, por sus siglas en inglés) [7].

En la literatura científica se habla de la supergravedad como la unión de la relatividad general con la supersimetría [8–11]. Se propone que la supersimetría debe ser una simetría local (simetría de norma) ya que la mayoría de las simetrías en física de partículas se manifiestan como simetrías de norma, en este sentido se dice que supergravedad es una teoría de supersimetría local. Para construir la lagrangiana de SUGRA localmente supersimétrica, el primer paso es empezar por construir la lagrangiana de supergravedad libre globalmente supersimétrica cuyo multiplete contiene al *Gravitón* y su compañero supersimétrico el *Gravitino*, el cual es un fermión de espín $3/2$. El objetivo de este trabajo es mostrar a detalle este primer paso, supergravedad globalmente supersimétrico on-shell esperando motivar a los estudiantes de física para que se acerquen al tópico de supergravedad.

Como estudiantes de licenciatura, supersimetría resulta un tanto difícil de aprender, en parte por su notación de indices espinoriales, la referencia clásica sobre temas de SUSY y SUGRA es el texto de Wess and Bagger [10]. Sin embargo, hay libros de texto accesibles para aprender supersimetría, por ejemplo: Muller-Kirsten [12] presenta muchos desarrollos algebraicos en gran detalle. Otra de muy fácil lectura es de la serie DeMystified [13]. La principal referencia para temas de supergravedad en general es el texto de Freedman and van Proeyen [11]. En este trabajo, pretendemos hacer mas accesible los aspectos elementales de la teoría empleando el formalismo lagrangiano, el cuál es estudiado en etapas intermedias de la educación universitaria de una licenciatura en física. Con éste, se estudian muchos sistemas y también una variedad de teorías, desde electrodinámica, gravedad, teoría cuántica de campos y supersimetría. Supergravedad no es la excepción, de este modo, presentamos la acción de supergravedad global y demostramos explícitamente que es invariante ante transformaciones de norma y de SUSY, esperando que el estudiante interesado pueda continuar aprendiendo del tema por su cuenta con la bibliografía más especializada.

El trabajo esta organizado de la siguiente manera: la Sec. 2 trata un breve repaso de los conceptos básicos de supersimetría, la Sec. 3 incluye las definiciones principales de la teoría de la relatividad general. La Sec. 4 esta basada en las Refs. [9, 15]), y se presentan los desarrollos algebraicos explícitos de la invariancia de la lagrangiana de supergravedad $N = 1$ bajo las transformaciones de norma y de supersimetría global. Por último, en la Sec. 5 se presentan las consideraciones finales de este trabajo.

2. Supersimetría $N = 1$

Supersimetría es una simetría hipotética que relaciona fermiones (partículas constituyentes de la materia) con bosones (partículas mediadoras de las fuerzas), en otras palabras, existe un operador Q que lleva de un estado femiónico $|F\rangle$ a un estado bosónico $|B\rangle$ y viceversa

$$Q|F\rangle = |B\rangle, \quad Q|B\rangle = |F\rangle. \tag{1}$$

Esta simetría implica que todas las partículas de una teoría de campo supersimétrica posean compañeros supersimétricos (sparticles) los cuales son denotados por una tilde $\tilde{s}$; los multipletes supersimétricos consisten de partículas con masas iguales cuyos espínes difieren por un factor de $1/2$. Las teorías supersimétricas satisfacen un álgebra de Lie gradada, lo cual se refiere a que involucra tanto a relaciones de conmutación cuando ambos argumentos son bosónicos, como de anticonmutación en el caso de argumentos fermiónicos (Grassmann). Esta álgebra de Lie se le conoce como álgebra de super-Poincaré, la cuál es la extensión supersimétrica mas simple del grupo de Poincaré.

Como punto de partida, vamos a discutir los aspectos del álgebra de Poincaré. Una transformación de Poincaré P es una transformación de Lorentz propia Λ seguido de una traslación a. Las coordenadas del espacio tiempo se denotan por x^μ con $\mu = 0, 1, 2, 3$. Entonces una transformación de Poincaré sobre las coordenadas está dada por

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \tag{2}$$

donde Λ está restringido por $det(\Lambda) = +1$ y $\Lambda^0_0 > 1$, estas transformaciones están continuamente conectadas a la identidad y denotamos dichas transformaciones de Poincaré por $P = \Lambda, a$. Los generadores del grupo de Poincaré son los seis generadores $M^{\mu\nu}$ del grupo de Lorentz el cual es el tensor de momento angular, mas los cuatro generadores P^μ del grupo de las traslaciones el cual es el operador de energía momento. Dichos generadores están dados por

$$(P^\mu)_\nu = i\delta^\mu_\nu, \tag{3}$$

$$(M^{\mu\nu})_{\rho\sigma} = i(\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\rho), \tag{4}$$

los cuales satisfacen el álgebra de Poincaré

$$[P^\mu, P^\nu] = 0, \tag{5}$$

$$[M^{\mu\nu}, P^\lambda] = i(\eta^{\nu\lambda}P^\mu - \eta^{\mu\lambda}P^\nu), \tag{6}$$

$$\begin{aligned}[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= i(\eta^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} \\ &\quad - \eta^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}),\end{aligned} \tag{7}$$

donde $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$.

Por otra parte, el álgebra de Lie para una teoría supersimétrica incluye al operador de supercarga Q. Para la teoría supersimetrica más simple, *supersimetría* $N = 1$ ([9], [10]), donde $N = 1$ se refiere al número de operadores de supercarga Q que contiene la teoría (los cuales pueden ser hasta $N = 8$), el álgebra de super-Poincaré está dada por

$$[Q, P^\mu] = 0, \quad [Q, M^{\mu\nu}] = \frac{i}{4}\epsilon(\sigma^\mu\sigma^\nu - \sigma^\nu\sigma^\mu)Q,$$
$$[Q, Q] = 0, \quad [Q, Q^\dagger] = 2\sigma^\mu P_\mu, \tag{8}$$

donde [...] es el paréntesis gradado, ϵ es un espinor de Weyl constante, el cuál es un parámetro supersimétrico análogo al ángulo θ de una transformación de rotación, P^μ es el operador de energía momento y generador de las traslaciones, y $M^{\mu\nu}$ corresponde a los generadores del grupo de Lorentz.

El álgebra supersimétrica $N = 1$ tiene representaciones del grupo de Lorentz que involucran partículas sin masa de espines $(s, s - 1/2)$ con $s = 1/2$, 1, $3/2, 2$, de este modo, supersimetría mezcla bosones de espín entero con fermiones de espín semi-entero.

En teoría cuántica de campos supersimétrica, resulta conveniente trabajar con supercampos (o supermultipletes), estos son objetos matemáticos que transforman bajo SUSY de manera bien definida. Para la construcción de modelos de partículas, como la extensión mínima supersimétrica del modelo estándar, el llamado MSSM, es suficiente considerar dos tipos de supercampos: quirales y vectoriales. Los supercampos quirales incluyen un campo escalar y un campo espinorial, esto es incluyen un campo de espín 0 y otro de espín $1/2$. En el caso de los supercampos vectoriales se incluye un campo espinorial (espín $1/2$) y un campo vectorial (espín 1). Para construir los lagrangianos correspondientes puede ser conveniente trabajar en superespacios; los puntos del superespacio incluyen las coordenadas espacio-temporales (x^μ), así como variables de Grassmann (θ,$\bar{\theta}$) las cuales son espinores que anticonmutan, es decir, $z^\mu = (x^\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$.

3. Relatividad general

En los textos básicos, se avanza de forma gradual para estudiar las ecuaciones de campo de Einstein; sin embargo, una forma sencilla y práctica es utilizar métodos variacionales para deducirlas, es decir, partir de la acción y utilizar el principio de hamilton para obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange [9].

La acción para el campo gravitacional es la acción de Einstein-Hilbert

$$\mathcal{S}_{EH} = \int_{\mathcal{R}} R\sqrt{-g}d^4x, \tag{9}$$

mientras que las ecuaciones de campo en el vacío que corresponden a la acción de Einstein-Hilbert están dadas por

$$R_{\mu\nu} = 0, \tag{10}$$

esta ecuación nos indica que no hay materia ni campo gravitacional presente en el espacio-tiempo; las soluciones a esta ecuación se conocen como soluciones en el vacío, que son un caso especial de las soluciones mas generales en relatividad general.

La acción (9) es invariante ante transformaciones locales de coordenadas, sin embargo, nuestro enfoque es presentar supergravedad global, y esto requiere en principio, que el lagrangiano en la acción de Einstein-Hilbert sea cuadrático en $g_{\mu\nu}$, para obtener este termino usamos la acción de Einstein-Hilbert linealizada, considerando una fluctuación alrededor de la métrica de Minkoswki, esto es, tomamos una pequeña perturbación $h_{\mu\nu}$ en la métrica,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \tag{11}$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski, $\kappa^2 = 8\pi G_N$, G_N es la constante gravitacional de Newton, y $h_{\mu\nu}$ se interpreta como el gravitón, mediador de las interacciones gravitacionales.

En la literatura se encuentra que realizando una expansión en la acción (9) hasta un orden lineal en $h_{\mu\nu}$, se obtiene la acción de Einstein-Hilbert linealizada

$$\mathcal{S}_{EH} = -\frac{1}{2}\int d^4x \left(R^L_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^L\right)h^{\mu\nu}, \tag{12}$$

y

$$R^L_{\mu\nu} = 0, \tag{13}$$

que corresponde a las ecuaciones de campo de Einstein linealizadas en el vacío [17], donde

$$R^L_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial^\lambda\partial_\mu h_{\lambda\nu} + \partial^\lambda\partial_\nu h_{\lambda\mu} - \Box h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h), \tag{14}$$

y

$$R^L \equiv \eta^{\mu\nu}R^L_{\mu\nu} = \partial^\mu\partial_\gamma h^\gamma{}_\mu - \Box h, \tag{15}$$

siendo $R^L_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci y R^L el escalar de Ricci linealizados.

4. Supergravedad $N = 1$

En esta sección revisamos brevemente supergravedad pura sin acoplamiento con campos de materia, mencionamos la importancia de que la teoría sea invariante ante transformaciones de norma y supersimetría global, y presentamos la demostración explícita de estas invarianzas.

La acción de una teoría de supergravedad pura incluiría un término cinético cuadratico para el gravitino, el cual es convenientemente descrito por un vector espinorial sin masa Ψ^μ, y un término cinético cuadrático para el gravitón de espín-2 descrito por un tensor simétrico $g_{\mu\nu}$. Así, el supermultiplete del gravitón contiene los dos grados de libertad bosónicos y los dos grados de libertad fermiónicos de un vector espinorial de Weyl sin masa o equivalentemente un vector espinorial de Majorana sin masa.

Por tanto, el supermultiplete de supergravedad, $(2, 3/2)$, estaría compuesto por el Gravitón h (bosón de espín 2) descrito por la acción de Einstein-Hilbert (12), y su compañero supersimétrico el gravitino $\tilde{h}$ (fermión de espín $3/2$) descrito por la acción de Rarita-Schwinger

$$\mathcal{S}_{RS} = -\frac{1}{2}\int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\Psi}_\mu\gamma_5\gamma_\nu\partial_\rho\Psi_\sigma, \tag{16}$$

cuya ecuación de movimiento es

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_5\gamma_\nu\partial_\rho\Psi_\sigma = 0. \tag{17}$$

Por consiguiente, la acción supersimétrica global on-shell para el supermultiplete de supergravedad en $N = 1$ estaría dada de la siguiente forma

$$\mathcal{S}_{SUGRA} = \mathcal{S}_{RS} + \mathcal{S}_{EH}, \tag{18}$$

donde $\mathcal{S}_{RS}$ y $\mathcal{S}_{EH}$ incluyen a Ψ^μ y $h_{\mu\nu}$, respectivamente. Se dice que la formulación es "on-shell" porque toma en cuenta ecuaciones de movimiento asociadas a la acción de SUGRA, es decir, la Ec. (13) correspondiente al gravitón ($h_{\mu\nu}$) y la Ec. (17) del gravitino (Ψ^μ).

Por otro lado, un campo espinorial con índice vectorial extra pertenece a la representación del grupo homogéneo de Lorentz $[(1/2, 0) + (0, 1/2)] \times (1/2, 1/2)$. Para aislar la parte $(1, 1/2) + (1/2, 1)$ del campo libre, se deben imponer las siguientes condiciones de irreducibilidad [15]:

$$\gamma_\mu\Psi^\mu = 0, \tag{19}$$

$$\partial_\mu\Psi^\mu = 0, \tag{20}$$

y una ecuación de Dirac

$$\not{\partial}\Psi^\mu = \gamma^\nu\partial_\nu\Psi^\mu = 0. \tag{21}$$

Estas condiciones pueden derivarse de consideraciones del "little group", en particular, de construir los operadores de Pauli-Lubanski y momento, y a partir de ellos construir los proyectores en los diferentes subespacios con espín $3/2$ y espín $1/2$ [16].

4.1. Invarianza de supergravedad $N = 1$ ante difeomorfismos

En teoría cuántica de campos uno deriva las interacciones de la teoría mediante el uso de la invarianza ante transformaciones de norma, el llamado el principio de gauge, mientras que en gravitación el equivalente es la llamada invarianza ante difeomorfismos, la cuál consiste en la libertad para elegir el sistema de coordenadas, ésta invarianza se extiende naturalmente a supergravedad global. En esta subsección demostramos evidentemente que la acción $\mathcal{S}_{SUGRA}$ es invariante ante transformaciones de norma (difeomorfismos).

La transformación de norma correspondiente a la acción de Rarita-Schwinger es

$$\delta_\eta\Psi_\mu = \partial_\mu\eta, \tag{22}$$

donde η es un parámetro fermiónico, mientras que para la acción de Einstein-Hilbert se tiene la transformación

$$\delta_\epsilon h_{\mu\nu} = \partial_\mu\epsilon_\nu + \partial_\nu\epsilon_\mu. \tag{23}$$

siendo ϵ_μ un parámetro bosónico.

A continuación, se verifica que las transformaciones de norma (22) y (23), dejan invariantes la acción (16) y la acción (12), respectivamente.

La variación del lagrangiano de Rarita-Schwinger $\mathcal{L}_{RS}$ ante la transformación (22) es la siguiente:

$$\begin{aligned}\delta_\eta\mathcal{L}_{RS} &= -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_5\gamma_\nu(\partial_\rho\Psi_\sigma)(\delta_\eta\bar{\Psi}_\mu)\\ &\quad -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_5\gamma_\nu\bar{\Psi}_\mu(\partial_\rho\delta_\eta\Psi_\sigma)\\ &= -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_5\gamma_\nu\bar{\Psi}_\mu(\partial_\rho\partial_\sigma\eta)\\ &= -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_5\gamma_\nu\\ &\quad\times\Big\{\partial_\rho[\bar{\Psi}_\mu(\partial_\sigma\eta)] - (\partial_\rho\bar{\Psi}_\mu)(\partial_\sigma\eta)\Big\},\end{aligned} \tag{24}$$

donde en la segunda fila se utilizó la ecuación de campo (17), y en la última se aplicó la regla de Leibniz. Posteriormente notamos que

$$\begin{aligned}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_5\gamma_\nu(\partial_\rho\bar{\Psi}_\mu) &= \epsilon^{\sigma\nu\rho\mu}\gamma_5\gamma_\nu(\partial_\rho\bar{\Psi}_\sigma)\\ &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_5\gamma_\nu(\partial_\rho\bar{\Psi}_\sigma) = 0,\end{aligned} \tag{25}$$

donde al final se utiliza nuevamente (17).

Así pues, la variación del lagrangiano de Rarita-Schwinger ante transformaciones de norma es la siguiente:

$$\delta_\eta\mathcal{L}_{RS} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_5\gamma_\nu\partial_\rho[\bar{\Psi}_\mu(\partial_\sigma\eta)], \tag{26}$$

y siendo una derivada total implica que $\delta_\eta\mathcal{S}_{RS} = 0$.

Por otro lado, la variación del lagrangiano de Einstein-Hilbert $\mathcal{L}_{EH}$ ante la transformación (23) resulta

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon\mathcal{L}_{EH} &= -\frac{1}{2}\left(\delta_\epsilon R^L_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\delta_\epsilon R^L\right)h^{\mu\nu}\\ &\quad -\frac{1}{2}\left(R^L_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^L\right)(\delta_\epsilon h^{\mu\nu})\\ &= \frac{1}{4}h(\delta_\epsilon R^L) - \frac{1}{2}h^{\mu\nu}(\delta_\epsilon R^L_{\mu\nu}),\end{aligned} \tag{27}$$

donde usamos la ecuación de campo (13).

Es posible notar que

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon R^L &= \partial^\rho\partial^\sigma(\delta_\epsilon h_{\rho\sigma}) - \eta^{\alpha\beta}\partial^\epsilon\partial_\epsilon(\delta_\epsilon h_{\alpha\beta})\\ &= \partial^\rho\partial^\sigma(\partial_\rho\epsilon_\sigma + \partial_\sigma\epsilon_\rho)\\ &\quad - \eta^{\alpha\beta}\partial^\epsilon\partial_\epsilon(\partial_\alpha\epsilon_\beta + \partial_\beta\epsilon_\alpha) = 0,\end{aligned} \tag{28}$$

de igual forma,

$$
\begin{aligned}
\delta_\epsilon R^L_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}[\partial^\lambda\partial_\mu(\delta_\epsilon h_{\lambda\nu}) + \partial^\lambda\partial_\nu(\delta_\epsilon h_{\lambda\mu}) - \Box(\delta_\epsilon h_{\mu\nu}) - \partial_\mu\partial_\nu(\delta_\epsilon h)] \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\lambda\gamma}[\partial_\mu\partial_\gamma(\delta_\epsilon h_{\lambda\nu}) + \partial_\nu\partial_\gamma(\delta_\epsilon h_{\lambda\mu}) - \partial_\gamma\partial_\lambda(\delta_\epsilon h_{\mu\nu}) - \partial_\mu\partial_\nu(\delta_\epsilon h_{\gamma\lambda})] \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\lambda\gamma}[\partial_\mu\partial_\gamma(\partial_\lambda\epsilon_\nu + \partial_\nu\epsilon_\lambda) + \partial_\nu\partial_\gamma(\partial_\lambda\epsilon_\mu + \partial_\mu\epsilon_\lambda) - \partial_\gamma\partial_\lambda(\partial_\mu\epsilon_\nu + \partial_\nu\epsilon_\mu) - \partial_\mu\partial_\nu(\partial_\gamma\epsilon_\lambda + \partial_\lambda\epsilon_\gamma)] \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\lambda\gamma}[\partial_\nu\partial_\gamma\partial_\mu\epsilon_\lambda - \partial_\mu\partial_\nu\partial_\lambda\epsilon_\gamma] = 0,
\end{aligned} \tag{29}
$$

donde se utilizan la propiedad conmutativa de las parciales y $\eta^{\lambda\gamma} = \eta^{\gamma\lambda}$.

Por tanto, sustituyendo las dos ecuaciones anteriores en la variación del lagrangiano de Einstein-Hilbert (27), se tiene que la variación ante transformaciones de norma es nula:

$$\delta_\epsilon \mathcal{L}_{EH} = 0, \tag{30}$$

lo cual implica que $\delta_\epsilon \mathcal{S}_{EH} = 0$.

Dado (18), se prueba que el cambio en la acción de supergravedad global ante transformaciones de norma es nulo, es decir, la acción global de supergravedad es invariante ante difeomorfismos,

$$\delta_{\eta,\epsilon}\mathcal{S}_{SUGRA} = \delta_\eta\mathcal{S}_{RS} + \delta_\epsilon\mathcal{S}_{EH} = 0. \tag{31}$$

4.2. Invarianza de $\mathcal{S}_{SUGRA}$ ante SUSY global

Por otra parte, para verificar que la teoría es realmente una teoría supersimétrica, tenemos que verificar que las transformaciones que conectan los campos del gravitón $h_{\mu\nu}$ y del gravitino Ψ^μ dejen la acción de S_{SUGRA} (18) invariante. En esta subsección demostramos que la acción $\mathcal{S}_{SUGRA}$ global es invariante bajo transformaciones supersimétricas globales.

Para la acción de Rarita-Schwinger se tiene la siguiente transformación

$$\delta_\xi \Psi_\mu = -i\Sigma^{\rho\tau}\partial_\rho h_{\tau\mu}\xi, \tag{32}$$

donde ξ es un parámetro espinorial de Majorana y $\Sigma^{\rho\tau}$ esta dado por

$$\Sigma^{\rho\tau} \equiv \frac{i}{2}(\gamma^\rho\gamma^\tau - \gamma^\tau\gamma^\rho). \tag{33}$$

Mientras que la transformación correspondiente a la acción de Einstein-Hilbert está dada por

$$\delta_\xi h_{\mu\nu} = -\frac{i}{2}\bar{\xi}(\gamma_\mu\Psi_\nu + \gamma_\nu\Psi_\mu). \tag{34}$$

A continuación se verifica que las transformaciones de supergravedad (32) y (34), dejan invariante la acción (16) y (12), respectivamente.

Comenzamos con la variación del lagrangiano de Rarita-Schwinger (16), ante la transformación de supergravedad (32):

$$
\begin{aligned}
\delta_\xi\mathcal{L}_{RS} &= -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_5\gamma_\nu(\partial_\rho\Psi_\sigma)(\delta_\xi\bar{\Psi}_\mu) \\
&\quad - \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_5\gamma_\nu\bar{\Psi}_\mu\partial_\rho(\delta_\xi\Psi_\sigma) \\
&= \frac{i}{2}\Sigma^{\lambda\tau}\xi\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_5\gamma_\nu\bar{\Psi}_\mu(\partial_\rho\partial_\lambda h_{\tau\sigma}),
\end{aligned} \tag{35}
$$

donde en el primer renglón se eliminó el primer término con la ecuación de campo (17). Posteriormente, usando la siguiente identidad:

$$i\epsilon^{\rho\sigma\mu\nu}\gamma_5\gamma_\nu = \gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu - \eta^{\rho\sigma}\gamma^\mu - \eta^{\sigma\mu}\gamma^\rho + \eta^{\rho\mu}\gamma^\sigma, \tag{36}$$

y que $\epsilon^{\rho\sigma\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, podemos reescribir la ecuación anterior, obteniendo

$$
\begin{aligned}
\delta_\xi\mathcal{L}_{RS} &= \frac{1}{2}\Sigma^{\lambda\tau}\xi(\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu - \eta^{\rho\sigma}\gamma^\mu \\
&\quad - \eta^{\sigma\mu}\gamma^\rho + \eta^{\rho\mu}\gamma^\sigma)\bar{\Psi}_\mu(\partial_\rho\partial_\lambda h_{\tau\sigma}) && (37) \\
&= \frac{1}{2}\Sigma^{\lambda\tau}\xi\left(\gamma^\sigma\bar{\Psi}^\rho\partial_\rho\partial_\lambda h_{\tau\sigma} - \gamma^\rho\bar{\Psi}^\sigma\partial_\rho\partial_\lambda h_{\tau\sigma}\right) && (38) \\
&= \frac{1}{2}\Sigma^{\lambda\tau}\xi\big\{\gamma^\sigma\partial_\rho(\bar{\Psi}^\rho\partial_\lambda h_{\tau\sigma}) \\
&\quad - \gamma^\rho\partial_\rho(\bar{\Psi}^\sigma\partial_\lambda h_{\tau\sigma})\big\}, && (39)
\end{aligned}
$$

donde se utilizó la regla de Leibniz para derivadas y la condición de reducibilidad (20).

Finalmente, la variación del lagrangiano de Rarita-Schwinger ante transformaciones de supergravedad es la siguiente:

$$\delta_\xi\mathcal{L}_{RS} = \frac{1}{2}\Sigma^{\lambda\tau}\xi\partial^\rho\left\{(\gamma^\sigma\bar{\Psi}_\rho - \gamma_\rho\bar{\Psi}^\sigma)\partial_\lambda h_{\tau\sigma}\right\}, \tag{40}$$

es decir, es una derivada total, por tanto $\delta_\xi\mathcal{S}_{RS} = 0$.

A continuación verificamos que la transformación de supersimetría (34) correspondiente al gravitón, deja invariante la acción (12):

$$
\begin{aligned}
\delta_\xi\mathcal{L}_{EH} &= \delta_\xi\left\{-\frac{1}{2}(R^L_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^L)h^{\mu\nu}\right\} \\
&= \frac{1}{4}\delta_\xi\left(hR^L\right) - \frac{1}{2}\delta_\xi\left(h^{\mu\nu}R^L_{\mu\nu}\right).
\end{aligned} \tag{41}
$$

Procedemos a calcular los términos de forma independiente:

$$\delta_\xi \left(hR^L\right) = (\delta_\xi h)R^L + h(\delta_\xi R^L) = h[\partial^\mu\partial_\gamma(\delta_\xi h^\gamma{}_\mu) - \Box(\delta_\xi h)] = 0, \tag{42}$$

donde es evidente que $R^L = 0$ es una consecuencia de la ecuación de campo (13), y que cualquier término del tipo $\partial_\gamma(\delta_\xi h^\gamma{}_\nu)$ se elimina, ya que contraemos el índice de la parcial con $\delta_\xi h^\mu{}_\nu$, y esto lleva a las condiciones de irreducibilidad (20) y (21), las cuales son cero.

Ahora calculamos el otro término en (41),

$$\begin{aligned}\delta_\xi \left(h^{\mu\nu}R^L_{\mu\nu}\right) &= \frac{1}{2}\delta_\xi[h^{\mu\nu}(\partial_\mu\partial_\gamma h^\gamma{}_\nu + \partial_\nu\partial_\gamma h^\gamma{}_\mu - \partial_\mu\partial_\nu h - \Box h_{\mu\nu})]\\ &= \frac{1}{2}(\delta_\xi h^{\mu\nu})(\partial_\mu\partial_\gamma h^\gamma{}_\nu + \partial_\nu\partial_\gamma h^\gamma{}_\mu - \partial_\mu\partial_\nu h - \Box h_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}h^{\mu\nu}\Box(\delta_\xi h_{\mu\nu})\\ &= \frac{1}{2}(\delta_\xi h^{\mu\nu})\partial_\mu(2\partial_\gamma h^\gamma{}_\nu - \partial_\nu h) - \frac{1}{2}(\delta_\xi h^{\mu\nu})\Box h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h^{\mu\nu}\Box(\delta_\xi h_{\mu\nu})\\ &= \partial_\mu\big\{(\delta_\xi h^{\mu\nu})(\partial_\gamma h^\gamma{}_\nu - \frac{1}{2}\partial_\nu h)\big\} - \frac{1}{2}(\delta_\xi h^{\mu\nu})\Box h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h^{\mu\nu}\Box(\delta_\xi h_{\mu\nu}),\end{aligned} \tag{43}$$

donde se utilizó que los terminos de tipo $\partial_\gamma(\delta_\xi h^\gamma{}_\nu)$ y $\delta_\xi h$ se anulan (dado que $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$, la variación de supersimetría aplicada a este escalar da como resultado una contracción como en (19), la cual es cero).

Sin embargo, notemos que,

$$\Box[h_{\mu\nu}(\delta_\xi h^{\mu\nu})] = \partial^\lambda[(\partial_\lambda h_{\mu\nu})(\delta_\xi h^{\mu\nu}) + h_{\mu\nu}(\partial_\lambda\delta_\xi h^{\mu\nu})] = (\delta_\xi h^{\mu\nu})\Box h_{\mu\nu} + 2(\partial_\lambda h_{\mu\nu})(\partial^\lambda\delta_\xi h^{\mu\nu}) + \Box(\delta_\xi h^{\mu\nu}), \tag{44}$$

luego, renombrando algunos índices y sustituyendo esta ecuación en la anterior podemos reescribir (43), obteniendo lo siguiente

$$\delta_\xi \left(h^{\mu\nu}R^L_{\mu\nu}\right) = \partial^\lambda\left\{(\delta_\xi h^\nu{}_\lambda)(\partial_\gamma h^\gamma{}_\nu - \frac{1}{2}\partial_\nu h) - \frac{1}{2}\partial_\lambda[h_{\mu\nu}(\delta_\xi h^{\mu\nu})]\right\} + (\partial_\lambda h_{\mu\nu})(\partial^\lambda\delta_\xi h^{\mu\nu}). \tag{45}$$

Ahora analizaremos el último término, aquel que no se encuentra en dentro de la derivada total en (45), procedemos de la siguiente forma, observemos que:

$$\begin{aligned}\partial^\lambda[(\delta_\xi h_{\mu\nu})(\partial_\lambda h^{\mu\nu})] &= (\partial^\lambda\delta_\xi h_{\mu\nu})(\partial_\lambda h^{\mu\nu}) + (\delta_\xi h_{\mu\nu})\Box h^{\mu\nu} = (\partial_\lambda h_{\mu\nu})(\partial^\lambda\delta_\xi h^{\mu\nu})\\ &\quad + (\delta_\xi h_{\mu\nu})(\partial^\mu\partial_\gamma h^{\gamma\nu} + \partial^\nu\partial_\gamma h^{\gamma\mu} - \partial^\mu\partial^\nu h),\end{aligned} \tag{46}$$

donde usamos la ecuación de campo (13), escrita de forma explícita. Sin embargo, notemos que

$$\partial^\nu[(\delta_\xi h_{\mu\nu})(\partial_\gamma h^{\gamma\nu})] = (\delta_\xi h_{\mu\nu})(\partial^\nu\partial_\gamma h^{\gamma\mu}), \tag{47}$$

$$\partial^\nu[(\delta_\xi h_{\mu\nu})(\partial^\mu h)] = (\delta_\xi h_{\mu\nu})(\partial^\mu\partial_\nu h), \tag{48}$$

donde se anulan los primeros términos en cada ecuación puesto que contienen factores del tipo $\partial^\nu\delta_\xi h_{\mu\nu}$. Con lo anterior reescribimos (46) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(\partial_\lambda h_{\mu\nu})(\partial^\lambda\delta_\xi h^{\mu\nu}) &= \partial^\lambda[(\delta_\xi h_{\mu\nu})(\partial_\lambda h^{\mu\nu})] - \partial^\mu[(\delta_\xi h_{\mu\nu})(2\partial_\gamma h^{\gamma\nu} - \partial^\nu h)] = \partial^\lambda[(\delta_\xi h_{\mu\nu})(\partial_\lambda h^{\mu\nu})\\ &\quad - (\delta_\xi h_{\lambda\nu})(2\partial_\gamma h^{\gamma\nu} - \partial^\nu h)].\end{aligned} \tag{49}$$

Finalmente, haciendo algunos cambios de índices y sustituyendo (49) en (45), obtenemos lo siguiente

$$\delta_\xi \left(h^{\mu\nu}R^L_{\mu\nu}\right) = \partial^\lambda\left\{(\delta_\xi h_{\lambda\nu})(\frac{1}{2}\partial^\nu h - \partial_\gamma h^{\gamma\nu}) + (\delta_\xi h_{\mu\nu})(\partial_\lambda h^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}\partial_\lambda[h_{\mu\nu}(\delta_\xi h^{\mu\nu})]\right\}. \tag{50}$$

Y para concluir, sustituyendo (42) y (50), en (41), se obtiene la siguiente expresión en la variación del lagrangiano de Einstein-Hilbert,

$$\begin{aligned}\delta_\xi\mathcal{L}_{EH} &= \partial^\lambda\left\{(\delta_\xi h_{\lambda\nu})\left(\frac{1}{2}\partial_\gamma h^{\gamma\nu} - \frac{1}{4}\partial^\nu h\right) + \frac{1}{4}\partial_\lambda[h_{\mu\nu}(\delta_\xi h^{\mu\nu})] - \frac{1}{2}(\delta_\xi h_{\mu\nu})(\partial_\lambda h^{\mu\nu})\right\}\\ &= \partial^\lambda\left\{(\delta_\xi h_{\lambda\nu})\left(\frac{1}{2}\partial_\gamma h^{\gamma\nu} - \frac{1}{4}\partial^\nu h\right) + \frac{1}{4}h^{\mu\nu}(\partial_\lambda\delta_\xi h_{\mu\nu}) - \frac{1}{4}(\partial_\lambda h^{\mu\nu})(\delta_\xi h_{\mu\nu})\right\}.\end{aligned} \tag{51}$$

Sustituyendo (34), en la Ec. (51), se obtiene que la variación del lagrangiano de Einstein-Hilbert ante transformaciones de supersimetría es equivalente a la derivada total:

$$\delta_\xi \mathcal{L}_{EH} = \frac{i}{4}\xi\partial^\lambda \Bigg\{ (\gamma_\lambda \Psi_\nu + \gamma_\nu \Psi_\lambda)\left(\frac{1}{2}\partial^\nu h - \partial_\gamma h^{\gamma\nu}\right) + \gamma_\mu \Psi_\nu \partial_\lambda h^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}\partial_\lambda \gamma_\mu \Psi_\nu \Bigg\}, \quad (52)$$

lo cuál implica que $\delta_\xi \mathcal{S}_{EH} = 0$.

Así pues, dado (18), se demuestra que el cambio en la acción de supergravedad global ante transformaciones de supersimetría es nulo, es decir, supergravedad es invariante bajo SUSY global,

$$\delta_\xi \mathcal{S}_{SUGRA} = \delta_\xi \mathcal{S}_{RS} + \delta_\xi \mathcal{S}_{EH} = 0. \quad (53)$$

5. Conclusiones

En este trabajo se presentaron los aspectos elementales de supergravedad global $N = 1$ de forma accesible utilizando el formalismo lagrangiano. En particular, se demostró que la acción de Rarita-Schwinger para el gravitino (ψ_μ), así como la de Einstein-Hilbert para el gravitón ($h_{\mu\nu}$), las cuales conforman supergravedad pura $N = 1$, son invariantes ante difeomorfismos y transformaciones supersimétricas globales.

Los cálculos realizados de manera explícita de estas invarianzas permiten que un estudiante o alguien interesado en supergravedad pueda verificarlo por sí mismo. Con esto en mente, este trabajo es una herramienta que invita a estudiantes en etapas intermedias de la licenciatura en física a introducirse a supergravedad, contando con los conocimientos básicos de mecánica analítica, el estudiante puede abordar por primera vez este tema.

1. A. Einstein, *Elektrodynamik bewegter körper*, Annalen der Physik, 17, (1905). *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, Annalen der Physik, 49, (1916). *Hamiltonsches Princip und allgemeine Relativitätstheorie*, Sitzungsberichte der Preussischen Akad. Wissenschaften, (1916).
2. W. Rindler, *Relativity: Special, General, and Cosmological*, (Oxford University Press, 2006)
3. M. Fierz and W. Pauli, *On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field*, Proc. Roy. Soc. **137** (1939) 211, `https://doi.org/10.1098/rspa.1939.0140`.
4. W. Rarita and J. Schwinger, *On a theory of particles with half-integral spin*, *Phys. Rev.* **60** (1941) 61, `https://doi.org/10.1103/PhysRev.60.61`
5. J. Wess and B. Zumino, *Supergauge transformations in four dimension*, Nuclear Physics B, **70** (1974) 39, `https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90355-1`
6. I. Aitchison, *Supersymmetry in Particle Physics: An elementary introduction*, (Cambridge University Press, 2007). `https://doi.org/10.1017/CBO9780511619250`
7. D. Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen and S. Ferrara, *Phys. Rev. D* **13** (1976) 3214, `https://doi.org/10.1103/PhysRevD.13.3214`
8. P. West, *Introduction to Supersymmetry and Supergravity*, (World Scientific, 1986). `https://doi.org/10.1142/1002`
9. D. Balin and A. Love, *Supersymmetric gauge field theory and string theory*, (Taylor and Francis, 1994), pp. 83-91. `https://doi.org/10.1201/9780367805807`
10. J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, (Princeton University Press, 1992).
11. D.Z. Freedman and A. van Proeyen, *Supergravity*, (Cambridge University Press, 2012). `https://doi.org/10.1017/CBO9781139026833`
12. H.J.W. Muller-Kirsten and A. Wiedemann, *Supersymmetry: An introduction with conceptual and calculational details*, (World Scientific, 1987).
13. P. Labelle, *Supersymmetry DeMystified: A self-teaching guide* , (Mc Graw Hill, 2010).
14. J. Mehra and K. Milton, *Climbing the Mountain: The Scientific Biography of Julian Schwinger* (Oxford University Press, 2003), `https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198527459.001.0001`
15. S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields: Volume III Supersymmetry*, (Cambridge University Press, 2005), pp. 333-335.
16. M. Napsuciale, M. Kirchbach and S. Rodriguez, *Spin* $3/2$ *beyond the Rarita-Schwinger framework*, Eur. Phys. J. A. **29** (2006) 289, `https://doi.org/10.1140/epja/i2005-10315-8`
17. S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, (Wiley, 1972).