

Teorías de gauge (norma) en los mercados financieros, una revisión histórica

A. Raya^{a,b}, M. B. Flores Romero^c, and J. López-Chacón^d

^a*Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Edificio C-3, Ciudad Universitaria, Francisco J. Mújica s/n. Col. Felicitas del Río. 58040 Morelia, Michoacán, México.*

^b*Centro de Ciencias Exactas, Universidad del Bío-Bío. Avda. Andrés Bello 720, Casilla 447, 3800708, Chillán, Chile.*

^c*Facultad de Contaduría y Ciencias Administrativas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Edificio R, Ciudad Universitaria. 58040, Morelia, Michoacán, México.*

^d*Facultad de Biología, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Edificio R, Ciudad Universitaria. 58040, Morelia, Michoacán, México.*

Received 14 February 2024; accepted 22 May 2024

En el presente trabajo hacemos una revisión histórica de estudios económicos, en particular, del mercado financiero, en los que se emplean las herramientas y conceptos desarrollados en el contexto de las teorías de gauge o de norma, que constituyen la piedra angular del desarrollo de la física fundamental. Esta visión permite entender al mercado financiero como un material dieléctrico que, mediante el reacomodo de cargas, se polariza para auto-regularse y equilibrarse cuando se presentan oportunidades de arbitraje.

Descriptores: Economía; teorías de gauge o de norma.

In this paper, we make a historical review of economic studies, in particular, of the financial market, in which the tools and concepts developed in the context of gauge theories are used, which constitute the cornerstone of the development of fundamental physics. This vision allows us to understand the financial market as a dielectric material that, through the rearrangement of charges, polarizes itself to self-regulate and balance itself when arbitrage opportunities arise.

Keywords: Economy; gauge or gauge theories.

DOI: <https://doi.org/10.31349/RevMexFis.22.010302>

1. Introducción

La física y la economía son dos disciplinas con objetos de estudio y herramientas propias que, sin embargo, han cruzado sus caminos en distintas ocasiones intercambiando precisamente conceptos y técnicas que han permitido en avance en ambas ciencias. El ejemplo paradigmático en este contexto es el movimiento browniano, que fue primeramente introducido por Louis Bachelier para entender al mercado en términos de procesos estocásticos [1] antes de que Einstein lo propusiera para explicar el movimiento de granos de polen en agua [2]. En este sentido, resulta natural entender que el estudio de sistemas estocásticos sea un aspecto donde ambas disciplinas conviven y se han retroalimentado generosamente. No se puede dejar de lado también la introducción del modelado matemático de los sistemas financieros como herramienta para entender y hacer predicciones sobre los comportamientos de distintos sistemas económicos. La interrelación de estas disciplinas ha generado una nueva rama de estudio denominada, simplemente, econofísica (ver, por ejemplo, Ref. [3] y los trabajos ahí para una revisión reciente del campo).

Las teorías de norma son un pilar fundamental en nuestra comprensión del universo a nivel subatómico, describiendo cómo las partículas fundamentales interactúan entre sí (ver, por ejemplo, la Ref. [4]). Estas teorías explican tres de las cuatro interacciones fundamentales conocidas: el electromagnetismo, la fuerza nuclear débil y la fuerza nuclear fuerte.

El electromagnetismo es probablemente el más familiar, responsable de fenómenos desde la luz visible hasta las fuerzas eléctricas y magnéticas que experimentamos en la vida cotidiana. La fuerza nuclear débil y la fuerza nuclear fuerte, por otro lado, operan a escalas mucho más pequeñas, dentro del núcleo atómico. La fuerza débil juega un papel crucial en procesos radiactivos, como la desintegración beta, mientras que la fuerza fuerte es esencial para mantener unidos los núcleos atómicos, evitando que los protones, que se repelen entre sí, los desintegren. La interacción gravitacional tal como la conocemos posee una naturaleza completamente distinta y no se ha podido formular como el resto de las interacciones. Las teorías de norma, mediante el uso de campos y partículas mediadoras, no solo han permitido explicar y unificar estas interacciones, sino que también han abierto caminos para avances tecnológicos en campos como la medicina mediante técnicas de imagen y tratamientos de cáncer, así como en la generación de energía nuclear.

Por otro lado, desde el punto de vista de la física, existen muchas razones para proponer que el comportamiento del mercado financiero se asemeja al de un sistema termodinámico, por lo que han surgido propuestas para describirlo en términos de las leyes de la termodinámica [5-8], de la física estadística [9,10] y, recientemente, incluso, de la geometrotermodinámica [11]. En todos ellos, la analogía de un sistema financiero con un sistema que evoluciona térmicamente entre estados de equilibrio permite desentrañar algu-

nas peculiaridades de los mercados financieros en términos de cantidades macroscópicas medibles.

En este trabajo nos referimos a una visión distinta del mercado financiero, en particular, FOREX, en la cual se visualiza el intercambio de divisas o productos como un sistema electrodinámico, cuyas fuentes, densidades de carga y corrientes, surgen de la dinámica estocástica con la que los *traders* realizan sus operaciones de compra y venta. En este sentido, el mercado es visto como un dieléctrico en el que el reacomodo de cargas que da lugar a la polarización del material se presenta de forma análoga a la manera en la que las oportunidades de arbitraje se muestran en el mercado financiero para que éste se vuelva su estado de equilibrio. La libertad de los bancos centrales o los mismos gobiernos de redefinir los precios de su moneda o su producto insignia en el mercado sin alterar la dinámica del mismo, surge en analogía con la simetría de gauge o de norma que se estudia ampliamente en la física de partículas elementales, en particular las leyes del electromagnetismo.

Las ecuaciones de movimiento que describen al mercado financiero desde este punto de vista son análogas a las ecuaciones de Maxwell de la electrodinámica, con más o menos detalles de la dinámica real de FOREX. Su estudio se remonta a los años 90s del siglo pasado, por lo que hacer un recuento histórico de las contribuciones que se han hecho en esta línea resulta necesario. El resto de este trabajo pretende dar cuenta de dichas contribuciones, lo cuál se discute en la Sec. 2. Presentamos algunos comentarios finales a manera de conclusión en la Sec. 3.

2. Teoría de norma en la economía

La idea de tratar el mercado de divisas desde un punto de vista de simetrías y de la teoría de gauge se presenta por primera vez en la tesis doctoral de Malaney, “*The index number problem: a differential geometric approach*”, en 1996. En este trabajo de investigación, se demuestra que las simetrías y la teoría de gauge pueden ser usadas en la economía. Esto con base en parte en el trabajo conjunto con Weinstein [12].

Para el año de 1997, Ilinski y Kalinin [13] se enfocan en utilizar la teoría de gauge de arbitraje en la fijación de los precios de derivados. Para ello, realizaron un análisis de Black-Scholes para demostrar cómo esta ecuación se obtiene a partir de la teoría de gauge. Además, derivan la corrección de la ecuación de Black-Scholes debido a un arbitraje virtual y la reacción de los especuladores. Todos los resultados mostrados en dicho artículo fueron obtenidos de forma analítica. Sin embargo, hacen mención al hecho de que cualquier desarrollo posterior a sus resultados crearía cálculos complejos que tendrían que ser tratados de forma numérica. Este hecho ya ha sido tratado en artículos de investigación recientes, como se abordará posteriormente.

Al siguiente año, Didier Sornette publica el artículo “*Gauge theory of Finance?*” [14], en el cual habla sobre la propuesta de Ilinski y Kalinin. Dentro de sus conclusiones,

realizó la observación sobre cómo la distribución logarítmica normal y las ecuaciones de Black-Scholes no son prueba de la corrección de la teoría ni de su relevancia. También sugiere que la existencia de incertidumbre es responsable de las oportunidades de arbitraje “virtuales”, pero en el caso de un mercado completo, las variables aleatorias tienen las propiedades de una caminata aleatoria de Markov, lo que implica la inexistencia de oportunidades de arbitraje.

Ilinski, siguiendo la línea de investigación sobre la teoría de gauge aplicada a la economía, en el artículo “*Gauge Physics of Finance: simple introduction*” [15], establece los principios fundamentales del enfoque del uso de la teoría de norma para la economía financiera y muestra las diferentes opciones de aplicación de la misma. Ilinski consideró el modelado de procesos de fijación de precios reales para un índice de mercado S&P500, además de analizar los precios derivados y la teoría de la cartera. Concluye con un algoritmo para construir un modelo de fijación de precios de un instrumento concreto en el marco del enfoque de la teoría de gauge.

En 1999, K. Young en su artículo “*Foreign exchange market as a lattice gauge theory*” [16] sugiere una analogía entre un modelo sencillo para describir el mercado de divisas y la teoría de gauge. En este trabajo de investigación, Young propone que los tipos de cambio corresponden a los exponenciales de los potenciales de gauge definidos en enlaces espaciales, mientras que las tasas de interés están relacionadas con los potenciales de gauge en enlaces temporales. Young considera que las oportunidades de arbitraje están dadas a través de los valores distintos de cero del tensor de campo de gauge invariante o bien por la curvatura definida en bucles cerrados. Para el caso de arbitraje donde se involucran cambios cruzados en un instante, el tiempo se relaciona como análogo con “campos magnéticos” mientras que el arbitraje para mercado de futuros se relacionan con “campos eléctricos”. En este primer trabajo se ofrece una perspectiva distinta para analizar el mercado de divisas. Aunque es un modelo sencillo que no refleja el verdadero comportamiento de un mercado financiero, se rescata el hecho de tener un modelo simplificado el cual permite centrarse en conceptos base para construir modelos de mayor complejidad y que permitan posteriormente describir casos reales.

“*Gauge Geometry of Financial Markets*” [17] es otro trabajo de Ilinski publicado en el 2000. En dicho artículo, Ilinski demuestra que los mercados financieros cuentan con una estructura geométrica subyacente, es decir, una geometría de haz fibrado. Al contar con esta estructura, en el trabajo se formula una simetría de gauge local de reescalamiento de unidades de activos en términos geométricos. Al considerar esto durante la construcción del modelo, proporciona a la economía financiera una metodología física, lo cual es un aporte valioso para el área.

Kholodnyi, al igual que Ilinski, ha sido uno de los autores que han hecho aportaciones de gran relevancia en el área. En el caso de Kholodnyi entre 2002 y 2003 publicó los artículos “*Valuation and Dynamic Replication of Contingent Claims in a General Market Environment based on the*

Beliefs-Preferences Gauge Symmetry” [18], “*Valuation and Dynamic Replication of Contingent Claims in the Framework of the Beliefs-Preferences Gauge Symmetry*” [18] y “*Beliefs-Preferences Gauge Symmetry and Dynamic Replication of Contingent Claims in a General Market Environment*” [19]. Como principal aporte, se tiene una perspectiva de la simetría de gauge desde un tipo creencias-preferencias. Otro aporte importante de Kholodnyi es la fijación de precios de opciones europeas para mercados generales, cuya dinámica de precios no está necesariamente descrita por los procesos de Markov.

“*Time and symmetry in models of economic markets*” [20] discute diferentes temas económicos de una forma alternativa, con la finalidad de analizar el modelado de mercados económicos. Para ello, Smolin comienza describiendo el modelo básico de equilibrio de Arrow-Debreu. En este apartado se centran en el tratamiento del tiempo y la contingencia. Posteriormente se discute el concepto de “simetría”; una vez desarrollado este concepto, el autor llega a la conclusión de que lo que se necesita es una teoría dinámica y de no equilibrio de los mercados económicos por medio del modelo de Debreu. Dando una analogía con el protagonismo de la mecánica estadística en la física, se sugiere que esto podría llamarse “economía estadística”. Para esto propone abordar la economía desde una perspectiva de la teoría de norma, tal como lo propusieron originalmente Malaney y Weinstein [12].

Samuel E. Vázquez y Simone Farinelli, en el trabajo “*Gauge Invariance, Geometry and Arbitrage*” [21], identifican la medida más general de arbitraje para cualquier modelo de mercado regido por procesos de *Itô*, es decir, procesos que pueden ser una función de la variable estocástica y el tiempo. En dicho artículo, se demuestra que la medida de arbitraje propuesta es invariante bajo cambios de *numéraire* y medida de probabilidad equivalente. Esta medida tiene una interpretación geométrica como conexión de gauge. Samuel y Simon resaltan que la conexión tiene curvatura cero sí y solo sí no existe arbitraje, además de demostrar una generalización simple del teorema clásico de valoración de activos para considerar la presencia de arbitraje. Sumado a esta primera parte, los autores presentan un algoritmo básico para medir la curvatura del mercado utilizando datos financieros. Gracias a este algoritmo encontraron evidencia de fluctuaciones en la curvatura distintas de cero en datos de alta frecuencia relacionados con índices bursátiles e índices de futuros.

En “*Toward a Geometric Formulation of Triangular Arbitrage - An Introduction to Gauge Theory of Arbitrage*” [22], Morisawa considera la cartera de bonos, acciones y opciones europeas. Por ello, introduce la dependencia temporal adecuada mediante precio del bono, el cual crece exponencialmente con un interés constante, así como el precio de las acciones que evoluciona según el movimiento browniano. Además, asume que, el precio de la opción es una función arbitraria la cual satisface una condición de contorno correspondiente al pago de la opción. Finalmente, incluye la dependencia del tiempo del campo de gauge y se determina como funcional, con ello se espera que se obtenga un precio de op-

ción razonable, como se obtiene mediante Black-Scholes.

Sokoloc y Melatos, en su artículo de 2010 “*A note on the theory of fast money flow dynamics*” [23], realizan una crítica a la teoría de la dinámica del flujo rápido de dinero, presentada por Didier Sornette [14]. En dicho trabajo, se demuestra que la elección de los parámetros de entrada utilizados por Ilinski, en “*Physics of finance: gauge modeling in non-equilibrium pricing*” [24] da como resultado oscilaciones sinusoidales del tipo de cambio. Con ello se crea un conflicto con los resultados presentados en el trabajo de Ilinski. Sokoloc y Melatos encontraron que la dinámica predicha por la teoría es generalmente inestable en la mayoría de las situaciones reales, con el tipo de cambio tendiendo a cero o infinito exponencialmente. La teoría de los flujos rápidos de dinero está basada en una forma particular del hamiltoniano, el cual describe el efecto del tipo de cambio. Los autores demuestran que esta forma no es consistente con la formulación de lattice de una teoría de gauge y diverge en el límite continuo.

Dentro de la misma propuesta de Ilinski “*Gauge Invariant Lattice Quantum Field Theory: Implications for Statistical Properties of High Frequency Financial Markets*” [25] se menciona que el uso de la teoría de gauge es muy importante para la dinámica del mercado. Sin embargo, este podría no ser el único principio de física que podría ser usado para el modelado del mercado. Particularmente, se podría implementar condiciones de contorno en el modelo de *lattice* [25]. Esta propuesta es interesante debido al potencial de hacer predicciones de futuras distribuciones de ganancias, pues aunque los precios a largo plazo no se pueden predecir, sí es posible trabajar sobre la evolución temporal de su distribución de probabilidad a corto plazo [25].

“*An Application of Symmetry Approach to Finance: Gauge Symmetry in Finance*” [26] es un trabajo de investigación en el que se analiza el modelo de fijación de precios de los derivados financieros en un mercado financiero mediante el uso de la simetría de norma. Para ello, los autores lo reescriben como una ecuación diferencial parcial en un haz fibrado en forma diferencial covariante para tener invariancia en la forma. Demostrando que la ecuación de precios puede mantenerse invariante bajo todas las transformaciones de numerarias locales, se revela esta simetría detrás de la ecuación de precios de los derivados. Shipeng Zhou y Liuqing Xiao concluyen con la relación existente entre geometrización del modelo de precios con la simetría de norma, la conexión, la curvatura y una forma más uniforme de la ecuación de precios, mencionando que la introducción a la economía de este enfoque es natural y su extensión potencial es posible.

Juan Maldacena publicó en 2015 el artículo titulado “*The symmetry and simplicity of the laws of physics and the Higgs boson*” [27]. En este trabajo, Maldacena describe las ideas teóricas, desarrolladas entre 1950 y 1970 que fueron usadas como base para la predicción del bosón de Higgs, partícula que fue descubierta en 2012. En dicho artículo, se explica que las fuerzas de la naturaleza están basadas en el principio de simetría de norma. Lo interesante de este trabajo es el hecho de hacer una analogía de estas simetrías con respec-

to al comportamiento del mercado de divisas, tomando como referentes los trabajos de Young. Además, agrega un apéndice matemático donde describe de una forma cuantitativa, la analogía entre la simetría y la economía.

En 2015, Simone Farinelli publicó su trabajo titulado “*Geometric Arbitrage Theory and Market Dynamics*” [28], en el cual integra la teoría clásica de las finanzas estocásticas dentro de un marco de geometría diferencial llamado “Teoría del Arbitraje Geométrico”. En la citada publicación, Farinelli demuestra que es posible parametrizar estrategias de arbitraje por su holonomía, así como dar al Teorema Fundamental de Valoración de Activos una caracterización homotópica diferencial. También, se toma la dinámica del mercado como la solución de las ecuaciones estocásticas de Euler-Lagrange para una elección del Lagrangiano. Esto permite expresar el principio de mínima acción de Hamilton como el principio de arbitraje mínimo esperado, es decir, una extensión del principio de no arbitraje. Con lo anterior mencionado, el autor proporciona soluciones explícitas de equilibrio y no equilibrio para un mercado cerrado.

“*Geometric Arbitrage Theory and Market Dynamics*” [29] y “*Geometric Arbitrage Theory and Market Dynamics*” [30] son dos trabajos de Giovanni Paolinelli y Gianni Arioli, en los cuales se destaca el hecho de mostrar un modelo para la dinámica a corto plazo de activos financieros basado en una aplicación a las finanzas de la teoría cuántica de gauge. Con base en las ideas publicadas por Ilinskiy, abonan al tema un algoritmo numérico para el cálculo de la distribución de probabilidad de precios, además de construir un modelo para la dinámica de los precios de las acciones basado en una integral de trayectoria no cuadrática, lo cual genera un modelo que se ajusta bien a algunas fluctuaciones de índices y precios de acciones.

Es necesario reconocer los trabajos de tesis que se han realizado en relación a este tema. A nivel licenciatura, se encuentra la tesis de Luis Alberto Ramos en la cual se analiza el arbitraje de divisas con una perspectiva de teoría de norma [35], en dicha tesis se concluye mediante tres modelos que si bien estos no ofrecen una predicción exacta de los datos del mercado real, debido a la teoría y la visión que se usa como base, ofrece una manera muy elegante de modelar el comportamiento del arbitraje de monedas y deja abierta la posibilidad de refinar estos modelos, este trabajo se desarrolló en la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.

Dentro de los trabajos de tesis de nivel maestría se encuentran la tesis de Nelson Rodrigues [31], donde hace una revisión sistemática de la literatura con respecto a la aplicación de la teoría de gauge en las finanzas, para ello el autor utilizó la base de datos Web of Science, en la cual realizó una búsqueda de palabras clave relacionadas tanto con la teoría de norma como con las finanzas, posteriormente usó los principios de exclusión e inclusión aplicados al conjunto total de artículos encontrados, con lo cual se obtuvieron 14 artículos que fueron analizados, esta tesis se presentó en la University of Algarve en la Facultad de Economía. En este mismo

nivel académico, Carlos Servín Ref. [32] estudia un modelo muy simple del mercado financiero, cuya construcción surge de primeros principios desde la teoría gauge del arbitraje de divisas, con este modelo obtiene una ecuación invariante de Gauge que describe la dinámica de los comerciantes en el mercado financiero cuando se presentan oportunidades de arbitraje, además en este trabajo se resuelve dicha ecuación de manera numérica proponiendo perfiles para las oportunidades de arbitraje, tanto en el caso unidimensional como para el caso bidimensional, este trabajo de tesis se presentó en la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en el Instituto de Física y Matemáticas.

En relación a las tesis de doctorado, Jennifer López-Chacón [33] se enfoca en la teoría de norma como base para la descripción en la dinámica del mercado para el arbitraje de divisas, para ello modela el comportamiento del mercado de divisas desde las leyes de la electrodinámica y la teoría de norma, en este modelo matemático, se analizó un conjunto de datos reales del tipo de cambio euro-dólar, después se calcularon las posibles ganancias realizando arbitraje en el tiempo, encontrando que la dinámica del mercado de divisas se puede modelar como un sistema físico. Esta tesis se presentó en el Instituto Iberoamericano de Desarrollo Empresarial en el doctorado de Ciencias Administrativas.

Con respecto a libros publicados del tema se tiene el libro de Jakob Schwichtenberg “*Physics of Finance: A gentle introduction to gauge theories, fundamental interactions and fiber bundles*” [34] el cual muestra de forma sencilla la conexión existente entre las finanzas y la física, en el libro se utiliza un “toy model” del mercado financiero para explicar modelos fundamentales de la naturaleza como la relatividad general o la electrodinámica. El autor rescata el avance que se ha realizado entre la relación de la teoría de gauge y los mercados financieros, citando los trabajos de Ilinski, K. Young y de Juan Maldacena.

3. Conclusiones

En este trabajo hemos presentado una revisión histórica de la literatura referente a la aplicación de las ideas de la teoría de gauge o de norma en la descripción del mercado financiero. Aunque es claro que dichas ideas demandan aún mayor estudio y refinamiento para realizar las predicciones anheladas en el campo de la econofísica, ofrecen una visión fresca y novedosa al estudio de los mercados financieros y otras formas de comercio socialmente sustentables, como el trueque. Aunque el recorrido por la literatura ha sido amplio, de antemano ofrecemos las disculpas requeridas a aquellos autores cuyos trabajos involuntariamente han sido omitidos en el presente trabajo.

AR agradece financiamiento del Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología de México por apoyo financiero bajo el proyecto FORDECYT PRONACES/61533/2020 así como al Consejo de la Investigación Científica (UMSNH, México) bajo el proyecto 18371.

1. L. Bachelier, Théorie de la spéculation, Phd thesis, Universidad de la Sorbona, Annales de l' Ecole Normal Supérieure (1900).
2. A. Einstein, Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen, *Ann. Phys.* **322** (1905) 549, <https://doi.org/10.1002/andp.19053220806>.
3. A. Chakraborti *et al.*, Editorial: From Physics to Econophysics and Back: Methods and Insights, *Front. Phys.* **10** (2022), <https://doi.org/10.3389/fphy.2022.969516>.
4. F. Halzen and A. D. Martin, Quarks & Leptons: An Introductory Course in modern Particle Physics (Wiley, 1984), ISBN:0-471-88741-2.
5. W. M. Saslow, An economic analogy to thermodynamics, *Am. J. Phys.* **67** (1999) 1239, <https://doi.org/10.1119/1.191110>.
6. Y. Feng, A Thermodynamic Picture of Financial Market and Model Risk (2019). <https://doi.org/10.48550/arXiv.1904.00151>
7. M. Gligor and M. Ignat, Econophysics: a new field for statistical physics?, *Interdiscip. Sci. Rev.* **26** (2001) 183, <https://doi.org/10.1179/030801801679449>.
8. H. Li *et al.*, Thermodynamic Analysis of Financial Markets: Measuring Order Book Dynamics with Temperature and Entropy, *Entropy* **26** (2024) 24, <https://doi.org/10.3390/e26010024>.
9. H. Quevedo and M. N. Quevedo, Statistical Thermodynamics of Economic Systems, *J. Thermodyn.* **2011** (2011) 676495, <https://doi.org/10.1155/2011/676495>
10. H. Li *et al.*, An Empirical Analysis on Financial Markets: Insights from the Application of Statistical Physics (2023). <https://doi.org/10.48550/arXiv.2308.14235>
11. H. Quevedo and M. N. Quevedo, Geometrothermodynamic approach in econophysics, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **20** (2023) 2350057, <https://doi.org/10.1142/S0219887823500573>.
12. P. Malaney, The Index Number Problem: A Differential Geometric Approach, Ph.D. thesis, Harvard University (1996)
13. K. Ilinski and G. Kalinin, Black-Scholes equation from Gauge Theory of Arbitrage (1997), <https://doi.org/10.48550/arXiv.hep-th/9712034>.
14. D. Sornette, Gauge theory of Finance?, *Int. J. Mod. Phys. C* **09** (1998) 505. <https://doi.org/10.1142/S0129183198000406>.
15. K. N. Ilinski, Gauge Physics of Finance: simple introduction (1998), <https://doi.org/10.48550/arXiv.cond-mat/9811197>.
16. K. Young, Foreign exchange market as a lattice gauge theory, *Am. J. Phys.* **67** (1999) 862, <https://doi.org/10.1119/1.19139>.
17. K. Ilinski, Gauge geometry of financial markets, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** (2000) L5. <https://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/33/1/102>.
18. V. Kholodnyi, Valuation and dynamic replication of contingent claims in the framework of the beliefs-preferences gauge symmetry, *Eur. Phys. J. B* **27** (2002) 229, <https://doi.org/10.1140/epjb/e20020148>.
19. V. Kholodnyi, Beliefs-Preferences Gauge Symmetry and Dynamic Replication in a General Market Environment, *Science Direct Working Paper* (2001) No S1574-0358(04)70743-1.
20. L. Smolin, Time and symmetry in models of economic markets, (2009) <https://doi.org/10.48550/arXiv.0902.4274>.
21. S. E. Vázquez and S. Farinelli, Gauge invariance, geometry and arbitrage, (2009), <https://doi.org/10.48550/arXiv.0908.3043>.
22. Y. Morisawa, Toward a Geometric Formulation of Triangular Arbitrage-An Introduction to Gauge Theory of Arbitrage-, *Progr. Theor. Phys. Suppl.* **179** (2009) 209, <https://doi.org/10.1143/PTPS.179.209>.
23. A. Sokolov, T. Kieu, and A. Melatos, A note on the theory of fast money flow dynamics, *Eur. Phys. J. B* **76** (2010) 637, <https://doi.org/10.1140/epjb/e2010-00223-2>.
24. K. Ilinski, Physics of Finance: Gauge Modelling in Non equilibrium Pricing. NY USA (Wiley, 2014)
25. B. Dupoyet, H. Fiebig, and D. Musgrove, Gauge invariant lattice quantum field theory: Implications for statistical properties of high frequency financial markets, *Physica A Stat. Mech. Appl.* **389** (2010) 107, <https://doi.org/10.1016/j.physa.2009.09.002>.
26. S. Zhou and L. Xiao, An application of symmetry approach to finance: Gauge symmetry in finance, *Symmetry* **2** (2010) 1763, <https://doi.org/10.3390/sym2041763>.
27. J. Maldacena, The symmetry and simplicity of the laws of physics and the Higgs boson, *Eur. J. Phys.* **37** (2015) 015802, <https://dx.doi.org/10.1088/0143-0807/37/1/015802>.
28. S. Farinelli, Geometric arbitrage theory and market dynamics, *Available at SSRN* **1113292** (2015) <https://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1113292>.
29. G. Paolinelli and G. Arioli, A path integral based model for stocks and order dynamics, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **510** (2018) 387, <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.07.007>.
30. G. Paolinelli and G. Arioli, A model for stocks dynamics based on a non-Gaussian path integral, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **517** (2019) 499, <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.11.044>.
31. L. A. Ramos-Llanos and A. Raya, Oportunidades de arbitraje desde la perspectiva de teorías de norma, *Tesis* (2022), https://bibliotecavirtual.dgb.umich.mx:8083/xmlui/handle/DGB_UMICH/12210.
32. N. D. Rodrigues, Application of gauge theory to finance: a systematic literature review, Master's thesis, Universidade do Algarve (2019), *PQDT-Global* (2019), <https://sapiencia.ualg.pt/handle/10400.1/13893>.

33. C. J. Servin-Tomas, A. Raya, and J. López-Chacón, Física y Finanzas, Tesis (2023), <https://bibliotecavirtual.dgb.umich.mx:8083/xmlui/handle/DGB-UMICH/16781>.
34. J. López-Chacón, A. Raya, and M. B. Flores-Romero, Teoría de Norma en el Mercado Financiero para el Arbitraje de Divisas en el Mercado Forex, Tesis (2022), https://www.inidem.edu.mx/assets/tesis_jennifer-lopez-chacon-teoria-de-norma-en-el-mercado-financiero-para-el-arbitraje-de-divisas-en-el-mercado-forex.pdf.
35. J. Schwichtenberg, Physics from Finance: A gentle introduction to gauge theories, fundamental interactions and fiber bundles (No-Nonsense Books, 2019).