

Método de iteración asintótica: átomo de hidrógeno, grafeno, modos cuasi normales

M. Jimenez^a, N. Y. López^b, O. Pedraza^a, y L. A. López^a

^aÁrea Académica de Matemáticas y Física, 42184, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México.
e-mails: ji318307@uaeh.edu.mx; omarp@uaeh.edu.mx; lalopez@uaeh.edu.mx

^bÁrea Académica de Ciencias de la Tierra y Materiales, 42184, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México.
e-mail: lo264098@uaeh.edu.mx

Received 3 June 2024; accepted 29 June 2024

En este trabajo se muestra como el método de iteración asintótica puede ser empleado para obtener eigenvalores y eigenfunciones en diferentes campos de la física. Partiendo de la ecuación de Schrödinger en cada caso, se pueden calcular las energías y las funciones de onda del átomo de hidrógeno o los modos cuasi-normales en el caso de agujeros negros. El objetivo central, es mostrar como aplicar el asymptotic iteration method en algunas áreas de la Física.

Descriptores: AIM; átomo de hidrógeno; grafeno; modos cuasi-normales.

In this work, we show how the asymptotic iteration method can be used to obtain eigenvalues and eigenfunctions in different fields of physics. Starting from the Schrödinger equation in each case, the energies and wave functions of the hydrogen atom or the quasi-normal modes in the case of black holes can be calculated. The central objective is to show how to apply the asymptotic iteration method in some areas of Physics.

Keywords: AIM; hydrogen atom; graphene; quasi-normal modes.

DOI: <https://doi.org/10.31349/RevMexFis.22.020202>

1. Introducción

En muchas ocasiones, cuando uno requiere estudiar el comportamiento de un sistema físico o resolver un problema particular en algún área específica de la física, en general se reduce a resolver una ecuación diferencial homogénea de segundo orden en una dimensión, como la expresión (1). En este sentido, como hallar soluciones de ecuaciones diferenciales es de gran interés en la física para hallar los eigenvalores E y las eigenfunciones $\psi(x)$.

Aunque en general, el método más empleado para resolver (1) es el de series de Frobenius, también existen muchas otras técnicas que pueden ser empleadas y que proporcionan soluciones analíticas como fracciones continuas [1], el método de Nikoforov-Uvarov [2], métodos aproximados, o soluciones numéricas como diferencias finitas [3], Runge-Kutta [4], entre otros.

Aunado a los métodos mencionados en el párrafo anterior, existe otra técnica que puede ser útil para encontrar soluciones de la Ec. (1), el método de iteración asintótica (AIM por sus siglas en inglés) propuesto por Ciftci, Hall y Saad [5], es una de las varias técnicas que permiten resolver (1). Este método ha sido muy útil en muchas aplicaciones de la física, como por ejemplo, ha sido empleado en la solución de ecuaciones de Schrödinger [6,7], de Dirac [8,9], de Klein-Gordon [10,11] y de Duffin-Kemmer-Petiau [12].

A diferencia de algunas otras técnicas en la solución de ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden, que permiten obtener solo soluciones analíticas o solo soluciones

numéricas, el AIM, permite obtener soluciones exactas y en su versión mejorada puede proporcionar soluciones numéricas.

De las ideas expresadas en los párrafos anteriores, el propósito principal de este trabajo es mostrar como aplicar el AIM en tres ejemplos particulares: El átomo de hidrógeno, el grafeno y modos cuasi-normales. Para ello, en la Sec. 2 se realiza una breve descripción del AIM, mientras que en la Sec. 4 se aborda la solución de la parte radial del átomo de hidrógeno. En la Sec. 5, se proporciona una breve descripción de la ecuación de Dirac-Weyl y se estudian las soluciones de los estados ligados en el grafeno en presencia de un campo magnético externo que posee una simetría traslacional. En la Sec. 6, se inicia con un pequeño preámbulo referente a los modos cuasi-normales y posteriormente se calculan las frecuencias de los modos cuasi-normales para un agujero negro de Schwarzschild rodeado de quintaesencia para perturbaciones escalares. Finalmente, en la Sec. 7 se enfoca en la discusión de los resultados.

2. Método de iteración asintótica

En esta sección se muestra brevemente la estructura del AIM presentado en Ref. [5].

Como punto de partida es posible considerar la ecuación de Schrödinger en una dimensión

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x). \quad (1)$$

Para implementar el AIM en la Ec. (1), es necesario realizar la siguiente redefinición

$$\psi(x) = f(x)\chi(x). \quad (2)$$

Insertando (2) en (1) se obtiene la ecuación diferencial homogénea lineal de segundo orden

$$\frac{d^2\chi(x)}{dx^2} = \lambda_0(x)\frac{d\chi(x)}{dx} + s_0(x)\chi(x), \quad (3)$$

donde

$$\lambda_0(x) = -2\frac{df(x)}{f(x)}, \quad (4)$$

$$s_0(x) = E - V(x) - \frac{d^2f(x)}{f(x)}. \quad (5)$$

Usualmente se analizan los comportamientos asintóticos de la ecuación diferencial (1) para hallar a la función $f(x)$ requerida en Ec. (2), y así poder aplicar el AIM. Cabe mencionar que las funciones $\lambda_0(x)$ ($\lambda_0(x) \neq 0$) y $s_0(x)$ son funciones $C_\infty(a, b)$.

Para hallar una solución a la ecuación diferencial (3), se aprovecha la estructura simétrica del lado derecho de dicha ecuación diferencial. Derivando (3) respecto de x , se tiene

$$\frac{d^3\chi(x)}{dx^3} = \lambda_1(x)\frac{d\chi(x)}{dx} + s_1(x)\chi(x), \quad (6)$$

con

$$\lambda_1(x) = \frac{d\lambda_0(x)}{dx} + s_0(x) + [\lambda_0(x)]^2, \quad (7)$$

$$s_1(x) = \frac{ds_0(x)}{dx} + s_0(x)\lambda_0(x). \quad (8)$$

Iterativamente, para la derivada de orden $n + 1$ y de orden $n + 2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), se tiene

$$\chi^{(n+1)}(x) = \lambda_{n-1}(x)\chi'(x) + s_{n-1}(x)\chi(x), \quad (9)$$

$$\chi^{(n+2)}(x) = \lambda_n(x)\chi'(x) + s_n(x)\chi(x), \quad (10)$$

donde las funciones $\lambda_n(x)$ y $s_n(x)$ se definen de la siguiente forma

$$\lambda_n(x) = \lambda'_{n-1}(x) + s_{n-1}(x) + \lambda_0(x)\lambda_{n-1}, \quad (11)$$

$$s_n(x) = s'_{n-1}(x) + s_0(x)\lambda_{n-1}(x), \quad (12)$$

aquí la tilde ' y los super índices $(n + 1)$ y $(n + 2)$ indican derivada respecto de x .

Tomando el cociente de (9) y (10)

$$\frac{d}{dx} \ln(\chi^{n+1}) = \frac{\chi^{n+2}}{\chi^{n+1}} = \frac{\lambda_n \left(\chi' + \frac{s_n}{\lambda_n} \right)}{\lambda_{n-1} \left(\chi' + \frac{s_{n-1}}{\lambda_{n-1}} \right)}, \quad (13)$$

y haciendo uso del comportamiento asintótico del método, el cual indica que para una n suficientemente grande, se debe satisfacer la siguiente relación

$$\frac{s_n}{\lambda_n} = \frac{s_{n-1}}{\lambda_{n-1}} \equiv \tilde{\alpha}(x). \quad (14)$$

Ahora, considerando (14) en (13), se tiene la siguiente expresión

$$\frac{d}{dx} \ln(\chi^{n+1}) = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}. \quad (15)$$

Cuya solución es

$$\chi^{n+1}(x) = C_1 \exp \left[\int^x \frac{\lambda_n(t)}{\lambda_{n-1}(t)} dt \right]. \quad (16)$$

Siendo C_1 una constante de integración. Nuevamente empleando (14) y (11) en (16), se puede expresar a $\chi^{n+1}(x)$ como

$$\chi^{n+1}(x) = C_1 \lambda_{n-1}(x) \exp \left[\int^x \{ \tilde{\alpha}(t) + \lambda_0(t) \} dt \right]. \quad (17)$$

El siguiente paso es sustituir (17) en (9), con el fin de obtener

$$\begin{aligned} \chi'(x) + \alpha(x)\chi(x) &= C_1 \lambda_{n-1}(x) \\ &\times \exp \left[\int^x \{ \tilde{\alpha}(t) + \lambda_0(t) \} dt \right], \end{aligned} \quad (18)$$

la cual admite la solución de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \chi(x) &= \exp \left[- \int^x \tilde{\alpha}(t) dt \right] \left\{ C_2 \right. \\ &\left. + C_1 \int^x \exp \left(\int^\tau [\lambda_0(t) + 2\tilde{\alpha}(t)] dt \right) d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

donde nuevamente C_2 es una constante. Las constantes de integración C_1 y C_2 pueden ser determinadas al aplicar las condiciones de frontera correspondientes a cada situación física. Generalmente, si uno requiere de soluciones exactas, entonces se debe de considerar $C_1 = 0$.

Ahora bien, una forma alternativa de (14) es

$$\delta_k(x) = s_k(x)\lambda_{k-1}(x) - s_{k-1}(x)\lambda_k(x) = 0, \quad (20)$$

aquí k denota el número de iteraciones a realizar. Usualmente $\delta_k = 0$ se le suele llamar la *condición de cuantización* y su importancia radica en que sus raíces proporcionan los eigenvalores de (1).

3. Método de iteración asintótica mejorado

Como se muestra en el trabajo realizado por Ciftci, Hall y Saad [13], una característica poco atractiva de las relaciones de recursión (11) y (12), es que al realizar cada iteración, se debe tomar la derivada de los términos $s(x)$ y $\lambda(x)$ de la iteración anterior. Esto puede realentizar considerablemente la implementación numérica del AIM, lo cual puede provocar problemas con la precisión numérica. Para solventar dicha

problemática, se desarrolló una versión mejorada de la técnica, que evita la necesidad de tomar derivadas en cada paso, lo cual mejora significativamente la precisión, así como también la velocidad de convergencia del método.

La idea del método mejorado de iteración asintótica radica en tomar la serie de Taylor de las funciones $\lambda_n(x)$ y $s_n(x)$ alrededor de algún punto ξ en el que se implementa el método. Teniendo así

$$\lambda_n(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} c_n^i (x - \xi)^i, \quad (21)$$

$$s_n(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} d_n^i (x - \xi)^i, \quad (22)$$

con c_n^i y d_n^i los respectivos coeficientes de Taylor de las funciones $\lambda_n(\xi)$ y $s_n(\xi)$. Colocando (21) y (22) en las Ecs. (11) y (12), se obtienen las siguientes relaciones de recurrencia

$$c_n^i = (i+1)c_{n-1}^{i+1} + d_{n-1}^i + \sum_{j=0}^i c_0^j c_{n-1}^{i-j}, \quad (23)$$

$$d_n^i = (i+1)d_{n-1}^{i+1} + \sum_{j=0}^i d_0^j c_{n-1}^{i-j}. \quad (24)$$

Combinando las expresiones (21)-(24) en la condición de cuantización (20), se tiene la siguiente relación de recursión

$$d_n^0 c_{n-1}^0 - d_{n-1}^0 c_n^0 = 0. \quad (25)$$

Esta condición únicamente requiere tomar las primeras derivadas de λ_0 y s_0 para obtener los coeficientes c_0^i y d_0^i requeridos para emplear la relación de recurrencia y obtener los correspondientes eigenvalores de forma numérica.

Para ejemplificar como implementar el AIM y su versión mejorada, en las siguientes secciones se analizarán tres casos específicos: átomo de hidrógeno, grafeno y agujeros negros.

4. Átomo de hidrógeno

Uno de los problemas tradicionales que se abordan en los cursos de mecánica cuántica es el estudio del átomo de hidrógeno. En esta sección se muestra como implementar el AIM para resolver la ecuación radial del átomo de hidrógeno, y así hallar los eigenvalores (energías) y las eigenfunciones (funciones de onda) correspondientes.

La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para el átomo de Hidrógeno admite la siguiente forma

$$\mathbf{H}\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}), \quad \mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 - \frac{e^2}{r}, \quad (26)$$

donde μ es la masa reducida, \hbar la constante Planck y e la carga del electrón. Al considerar separación de variables en coordenadas esféricas $\Psi(\vec{r}) = g(\theta, \phi)R(r)$, implica que la

solución de la parte angular de la función de onda son los armónicos esféricos, es decir $g(\theta, \phi) = Y_l^m(\theta, \phi)$, mientras que la parte radial $R(r) = U(r)/r$, satisface la siguiente ecuación

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \bar{V}_l(x) \right] U(x) = 0, \quad (27)$$

$$\bar{V}_l(x) = -\frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{1}{\tilde{\lambda}x} - \frac{1}{4},$$

donde

$$\tilde{\lambda} = \sqrt{\frac{-E}{E_0}}, \quad E_0 = \frac{e^2}{2a_0}, \quad x = \frac{2\lambda r}{a_0}, \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}, \quad (28)$$

aquí a_0 es el radio de Bohr. Ahora, para implementar el AIM, es conveniente analizar el comportamiento asintótico de (27) para valores de x muy grandes, es decir, cuando $x \rightarrow \infty$, (27) toma la siguiente forma

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{4} \right] U(x) = 0. \quad (29)$$

La solución a esta ecuación es

$$U(x) \approx Ae^{-\frac{x}{2}} + Be^{\frac{x}{2}}. \quad (30)$$

Imponiendo la condición de frontera (que la función de onda sea cuadrado integrable) a (30), implica que $B = 0$.

Ahora bien, estudiando el comportamiento asintótico de (27) para valores de x muy pequeños ($x \rightarrow 0$), se tiene

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} \right] U(x) = 0. \quad (31)$$

Cuya solución es

$$U(x) \approx ax^{l+1} + bx^{-l}, \quad (32)$$

donde nuevamente, las condiciones de frontera en Ec. (32) implican que $b = 0$. De (30) y (32), la solución de (27) debe de ser

$$U(x) = f_1(x)\chi(x), \quad f_1(x) = e^{-\frac{x}{2}}x^{l+1}. \quad (33)$$

Aquí se puede ver que $U(x)$ tiene la forma de (2), por lo que es posible hacer uso de (4) y (5) introduciendo $f_1(x)$, se obtienen

$$\lambda_0(x) = \frac{x - 2(l+1)}{x}, \quad (34)$$

$$s_0(x) = \frac{\tilde{\lambda}(l+1) - 1}{x\tilde{\lambda}}, \quad (35)$$

donde se ha considerado a $V(x) = \bar{V}_l(x)$ y $E = 0$. De acuerdo a (11) y (12), es posible calcular las siguientes funciones auxiliares

$$\lambda_1(x) = 1 + \frac{2\tilde{\lambda}(2l+3)(l+1) - x[3\tilde{\lambda}(l+1) + 1]}{x^2\tilde{\lambda}}, \quad (36)$$

$$s_1(x) = -\frac{[\tilde{\lambda}(l+1) - 1](2l+3-x)}{x^2\tilde{\lambda}}, \quad (37)$$

$$\lambda_2(x) = \frac{2x^2(2\tilde{\lambda}[l+1] + 1) - 2x(2l+3)(2\tilde{\lambda}[l+1] + 1)}{x^3\tilde{\lambda}} + \frac{4\tilde{\lambda}(2l+3)(l+2)(l+1)}{x^3\tilde{\lambda}} - 1, \quad (38)$$

$$s_2(x) = \frac{x^2\tilde{\lambda} - x(\tilde{\lambda}[3l+4] + 1) + 2\tilde{\lambda}(2l+3)(l+2)}{x^3\tilde{\lambda}} (\tilde{\lambda}[l+1] - 1). \quad (39)$$

Incluyendo (34)-(39) en la condición de cuantización (20), se tiene

$$\delta_1(x) = \frac{[\tilde{\lambda}(l+1) - 1][\tilde{\lambda}(l+2) - 1]}{x^2\tilde{\lambda}^2}, \quad (40)$$

$$\delta_2(x) = \frac{[\tilde{\lambda}(l+1) - 1][\tilde{\lambda}(l+2) - 1][\tilde{\lambda}(l+3) - 1]}{x^3\tilde{\lambda}^3}. \quad (41)$$

Aquí los eigenvalores son obtenidos de las raíces de las expresiones (40) y (41). De forma general se tiene

$$\tilde{\lambda}_{\nu l} = \frac{1}{l + \nu}, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots, \quad (42)$$

aquí, $\tilde{\lambda}_{\nu l}$ no depende de ν y l por separado, si no más bien de su suma, $n = l + \nu$ y en combinación con (42) se tiene

$$\tilde{\lambda}_n = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (43)$$

por lo que de acuerdo a (28), los niveles de energía del átomo de hidrógeno están dados por

$$E_n = -\frac{E_1}{n^2} = -\frac{e^2}{2a_0 n^2} = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (44)$$

Antes de proseguir con el cálculo de las eigenfunciones $U(x)$, es importante analizar la relación $n = l + \nu$. Es evidente que para una n fija, l puede tomar varios valores, es decir, cuando ν tome su valor más pequeño $\nu_{\min} = 1$, l toma su máximo valor $l_{\max} = n - \nu_{\min} = n - 1$ y para cuando ν tome su valor más grande $\nu_{\max} = n$, l alcanza su valor mínimo, es decir, $l_{\min} = n - \nu_{\max} = 0$, en otras palabras, para un valor dado de n , l puede tomar valores entre 0 y $n - 1$ ($l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$).

Para calcular las eigenfunciones $U(x)$ del átomo de hidrógeno, es necesario calcular primero las funciones $\tilde{\alpha}(x)$ de (14). Para $n = 1$ ($l = 0$) y de acuerdo a (14), se tiene

$$\tilde{\alpha}_{10}(x) = \frac{s_0}{\lambda_0} \Big|_{\lambda=\lambda_1} = -\frac{l}{2l-x+2} \Big|_{l=0} = 0, \quad (45)$$

donde el primer subíndice denota $n = 1$ y el segundo $l = 0$. De forma análoga, para $n = 2$ ($l = 0, 1$) y de acuerdo a (14), se tiene

$$\tilde{\alpha}_{2l}(x) = \frac{s_1}{\lambda_1} \Big|_{\lambda=\lambda_2} = -\frac{(l-1)(2l+3-x)}{x^2-x(3l+5)+2l(2l+5)+6}, \quad (46)$$

Considerando los valores de $l = 0, 1$ en (46), se obtiene

$$\tilde{\alpha}_{20}(x) = -\frac{1}{x-2}, \quad (47)$$

$$\tilde{\alpha}_{21}(x) = 0. \quad (48)$$

Empleando (45) y (19) es posible obtener la eigenfunción para el estado base

$$\chi_{10}(x) = c_{10} \exp \left[-\int \tilde{\alpha}_{00} dx \right] = c_{10}. \quad (49)$$

Procediendo de forma similar, las eigenfunciones para el primer estado excitado son

$$\begin{aligned}\chi_{20}(x) &= c_{20} \exp \left[- \int \tilde{\alpha}_{01} dx \right] \\ &= c_{20} \exp \left[\int \frac{dx}{x-2} \right] = c_{20} (x-2). \quad (50)\end{aligned}$$

$$\chi_{21}(x) = c_{21} \exp \left[- \int \tilde{\alpha}_{01} dx \right] = c_{21}. \quad (51)$$

Los polinomios (49)-(51), son los polinomios asociados de Laguerre $L_{n+l}^{2l+1}(x)$ no normalizados y en cada caso habrá que calcular las constantes de normalización, por consiguiente, se tiene que $\chi_{nl}(x) = L_{n+l}^{2l+1}(x)$. Para finalizar el análisis del átomo de hidrógeno, usando (28), (33), (43) y las expresiones (49)-(51), la solución de la parte radial del átomo de hidrógeno es

$$R_{nl}(r) = \left(\frac{2r}{a_0 n} \right)^l \exp \left(- \frac{r}{a_0 n} \right) L_{n+l}^{2l+1} \left(\frac{2r}{a_0 n} \right). \quad (52)$$

Cabe mencionar que este resultado se obtiene tradicionalmente usando el método de Frobenius, sin embargo, el AIM proporciona una forma alterna de obtener el mismo resultado.

5. Grafeno (Ecuación de Dirac-Weyl)

Como otro ejemplo de implementación del Método de Iteración Asintótica, en esta sección se estudiarán los estados ligados de un electrón de Dirac en una placa de grafeno bajo la influencia de un campo magnético perpendicular a ella, considerando interacciones magnéticas invariantes bajo traslaciones.

La importancia del grafeno, radica en que el confinamiento de electrones de Dirac en presencia de campos magnéticos, es crucial para el diseño de dispositivos electrónicos. Particularmente el lector puede consultar [14], donde se tratan algunos otros perfiles de campo magnético usando el método de la factorización.

En el grafeno, el Hamiltoniano efectivo alrededor de un punto de Dirac para un electrón de Dirac posee la siguiente forma

$$\mathbf{H} = v_F \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}, \quad (53)$$

donde $v_F \approx c/300 = 10^6 m/s$, con c la velocidad de la luz en el vacío, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y)$ son las matrices de Pauli y $\mathbf{p} = -i\hbar(\partial_x, \partial_y)$ es el operador de momento en dos dimensiones.

De esta forma, a bajas energías, el espectro de energías es descrito por la ecuación de Dirac-Weyl

$$\mathbf{H}\Phi(x, y, t) = v_F (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \Phi(x, y, t) = i\hbar \frac{\partial \Phi(x, y, t)}{\partial t}. \quad (54)$$

Para estados estacionarios, la función de onda admite la siguiente forma $\Phi(x, y, t) = \Psi(x, y)e^{-iEt/\hbar}$, por ello la ecuación de Dirac-Weyl independiente del tiempo se puede expresar como

$$\begin{aligned}v_F (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \Psi(x, y) &= E\Psi(x, y), \\ \Psi(x, y) &= \begin{pmatrix} \psi_+(x, y) \\ \psi_-(x, y) \end{pmatrix}, \quad (55)\end{aligned}$$

con $\Psi(x, y)$ la función de onda de dos componentes, siendo ψ_{\pm} las componentes del vector columna.

Si el electrón de Dirac interactúa con un campo magnético externo $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ perpendicular al plano del grafeno, entonces, de acuerdo a la regla de acoplamiento mínimo, el operador de momento \mathbf{p} puede ser reemplazado por $\mathbf{p} + e\mathbf{A}/c$, con $-e$ la carga del electrón y el vector potencial es dado por $\mathbf{A} = (A_x, A_y, 0)$. De esta forma (55) se puede expresar como

$$v_F \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right] \Psi(x, y) = E\Psi(x, y). \quad (56)$$

Si el campo magnético externo posee simetría traslacional en una dirección particular, entonces, sin pérdida de generalidad se puede fijar el eje de simetría en la dirección y , además empleando la norma de Landau, uno puede expresar al vector potencial como

$$\mathbf{A} = (0, A_y(x), 0), \quad \mathbf{B} = \left(0, 0, \frac{dA_y}{dx} \right). \quad (57)$$

La implementación de (57), implica que la expresión (56) es independiente de la coordenada y , permitiendo parametrizar la función de onda $\Psi(x, y)$ de la siguiente forma

$$\Psi(x, y) = e^{iky} (\psi_+(x), i\psi_-(x))^T, \quad (58)$$

donde k es el número de onda en la dirección y y T denota la transpuesta del vector columna. Incorporando (58) en (56) se tienen dos ecuaciones desacopladas

$$\left[\frac{d}{dx} + k + \frac{e}{c\hbar} A_y \right] \psi_-(x) = \mathcal{E} \psi_+(x), \quad (59)$$

$$\left[-\frac{d}{dx} + k + \frac{e}{c\hbar} A_y \right] \psi_+(x) = \mathcal{E} \psi_-(x), \quad (60)$$

donde $\mathcal{E} = E/(\hbar v_F)$. Combinando (59) y (60), es posible obtener una ecuación tipo Schrödinger para cada función ψ_+ y ψ_- . Así se tiene que las funciones ψ_+ y ψ_- satisfacen

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V_{\pm}(x) \right] \psi_{\pm} = \epsilon \psi_{\pm}(x), \quad (61)$$

donde

$$\epsilon = E^2/(\hbar^2 v_F^2), \quad (62)$$

$$V_{\pm}(x) = \left(k + \frac{e}{c\hbar} A_y(x) \right)^2 \pm \frac{e}{c\hbar} \frac{dA_y(x)}{dx}. \quad (63)$$

Ahora, para proseguir con el estudio del grafeno se considerará el siguiente perfil de campo magnético

$$\mathbf{A} = (0, B_0 \tan(\alpha x), 0), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \alpha x \leq \frac{\pi}{2}, \quad (64)$$

$$\mathbf{B} = (0, 0, \alpha B_0 \sec^2(\alpha x)). \quad (65)$$

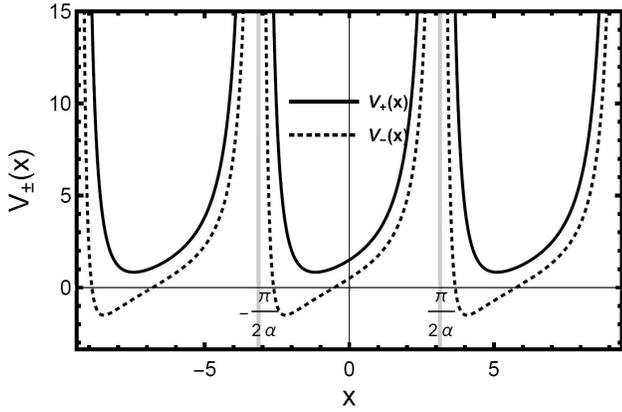


FIGURE 1. Gráfica de los potenciales $V_{\pm}(x)$, dado por (66). Con $D = 1$, $k = 1$ y $\alpha = 0.5$.

Colocando (64) en (63), los potenciales son

$$V_{\pm}(x) = k^2 - D^2 + D(D \pm \alpha) \sec^2(\alpha x) + 2Dk \tan(\alpha x). \quad (66)$$

con $D = eB_0/c\hbar$. La gráfica de los potenciales (66), se muestran en la Fig. 1.

Añadiendo (66) en (61), se tiene

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + k^2 - D^2 + D(D \pm \alpha) \sec^2(\alpha x) + 2Dk \tan(\alpha x) \right] \psi_{\pm}(x) = \epsilon \psi_{\pm}(x). \quad (67)$$

Para resolver la Ec. (67), es conveniente redefinir la función ψ_{\pm} y aplicar el siguiente cambio de variable

$$\psi_{\pm}(z) = \frac{\phi_{\pm}(z)}{\sqrt{i\alpha[1-z^2]}}, \quad z = i \tan(\alpha x). \quad (68)$$

Evaluando (68) en (67) se obtiene la siguiente ecuación tipo Schrödinger

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \bar{V}_{\pm}(z) \right] \phi_{\pm}(z) = 0, \quad (69)$$

con

$$\bar{V}_{\pm}(z) = -\frac{D(D \pm \alpha)z^2 + 2iDkz \mp \alpha(D \pm \alpha) - k^2 + \epsilon}{\alpha^2(z^2 - 1)^2}, \quad (70)$$

El siguiente paso es estudiar los comportamientos asintóticos de (69) cuando $z \rightarrow \pm 1$. Cuando $z \rightarrow 1$, se tiene

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{\alpha^2 - (D + ik)^2 - \epsilon}{4\alpha^2(z-1)^2} \right] \phi_{\pm}(z) = 0. \quad (71)$$

Esta ecuación posee las siguiente solución

$$\phi_{\pm}(z) = A_1(z-1)^{\frac{1}{2} + \frac{\beta_1}{2\alpha}} + B_1(z-1)^{\frac{1}{2} - \frac{\beta_1}{2\alpha}}, \quad (72)$$

donde β_1 se define como

$$\beta_1 = \sqrt{(D + ik)^2 + \epsilon}. \quad (73)$$

La condición de frontera (cuadrado integrable) implica que $B_1 = 0$. Por otra parte cuando $z \rightarrow -1$, se tiene

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{\alpha^2 - (D - ik)^2 - \epsilon}{4\alpha^2(z+1)^2} \right] \phi_{\pm}(z) = 0, \quad (74)$$

cuya solución es

$$\phi_{\pm}(z) = A_2(z+1)^{\frac{1}{2} + \frac{\beta_2}{2\alpha}} + B_2(z+1)^{\frac{1}{2} - \frac{\beta_2}{2\alpha}}, \quad (75)$$

donde

$$\beta_2 = \sqrt{(D - ik)^2 + \epsilon}. \quad (76)$$

Aquí la condición de frontera implica que $B_2 = 0$.

De este modo, la función $\phi_{\pm}(z)$ puede escribirse como

$$\phi_{\pm}(z) = f_2(z)\chi_{\pm}(z), \quad (77)$$

$$f_2(z) = (z-1)^{\frac{1}{2} + \frac{\beta_1}{2\alpha}}(z+1)^{\frac{1}{2} + \frac{\beta_2}{2\alpha}}.$$

Colocando a $f_2(z)$ en (4) y (5), se pueden hallar las siguientes relaciones

$$\lambda_{0\pm} = \frac{-(2\alpha + \beta_+)z + \beta_-}{\alpha(z^2 - 1)}, \quad (78)$$

$$s_{0\pm} = \frac{\Delta}{2\alpha^2(z^2 - 1)}, \quad (79)$$

$$\beta_+ = \beta_1 + \beta_2, \quad \beta_- = \beta_2 - \beta_1, \quad (80)$$

$$\Delta = D(D \pm 2\alpha) + k^2 - \epsilon - \beta_1\beta_2 - \alpha\beta_+, \quad (81)$$

donde se ha tomado $V = \bar{V}_{\pm}(z)$, definida en la Ec. (70) y $E = 0$. Aquí $\chi_{\pm}(z)$ satisface la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2\chi_{\pm}(z)}{dz^2} = \lambda_{0\pm}(z)\frac{d\chi_{\pm}(z)}{dz} + s_{0\pm}(z)\chi_{\pm}(z). \quad (82)$$

Sin embargo, cabe mencionar que el análisis realizado a (69) cuando $z \rightarrow \pm 1$ para determinar a $f_2(z)$ no es suficiente para precisar los comportamientos asintóticos en dichos puntos. Para establecer el comportamiento asintótico de $\chi_{\pm}(z)$ cuando $z \rightarrow \pm 1$, se sugiere el siguiente *ansatz*

$$\chi_{\pm}(z) = (z^2 - 1)^q e^{-\mu \arctan(-iz)} f_{\pm}(z), \quad (83)$$

donde q y μ son constantes a determinar. Sin pérdida de generalidad, de aquí en adelante solo se prosigue con el análisis de las funciones con el subíndice más (debido a que el estudio de las funciones con subíndice menos conlleva un análisis similar).

Evaluando (83) en (82) se tiene

$$\frac{d^2 f_+(z)}{dz^2} = \tilde{\lambda}_{0+}(z)\frac{df_+(z)}{dz} + \tilde{s}_{0+}(z)f_+(z). \quad (84)$$

Con

$$\tilde{\lambda}_{0+} = \frac{-(2\alpha + \beta_+ + 4q\alpha)z + \beta_- + 2i\mu\alpha}{\alpha(z^2 - 1)}, \quad (85)$$

$$\tilde{s}_{0+} = \frac{\Delta_1 z^2 + \Delta_2 z + \Delta_3}{2\alpha^2(z^2 - 1)^2} + \frac{\Delta}{2\alpha^2(z^2 - 1)}, \quad (86)$$

$$\Delta_1 = -4\alpha q(2\alpha q + \alpha + \beta_+), \quad (87)$$

$$\Delta_2 = 2i\alpha(4\alpha\mu q + \mu\beta_+ - 2iq\beta_-), \quad (88)$$

$$\Delta_3 = 2\alpha(\alpha\mu^2 + 2\alpha q - i\mu\beta_-). \quad (89)$$

Para aplicar el AIM, se debe de imponer las siguientes condiciones

$$\Delta_1 = -\Delta_3, \quad \Delta_2 = 0. \quad (90)$$

Lo cual conduce a

$$q = -\frac{\beta_+}{2\alpha}, \quad (91)$$

$$\mu = \frac{i\beta_-}{\alpha}. \quad (92)$$

Bajo esta elección de μ y q dados en las Eqs. (91) y (92), entonces $\tilde{\lambda}_{0+}(z)$ y $\tilde{s}_{0+}(z)$ pueden escribirse como

$$\tilde{\lambda}_{0+} = \frac{-(2\alpha - \beta_+)z - \beta_-}{\alpha(z^2 - 1)}, \quad (93)$$

$$\tilde{s}_{0+} = \frac{\Delta}{2\alpha^2(z^2 - 1)}. \quad (94)$$

Usando las funciones (93) y (94) es posible obtener

$$\tilde{\lambda}_{1+} = \frac{z^2\Gamma_1 - 4\beta_-z[\beta_+ - 3\alpha] + \Gamma_2}{2\alpha^2(z^2 - 1)^2}, \quad (95)$$

$$\tilde{s}_{1+} = \frac{\Gamma_3[z(\beta_+ - 4\alpha) + \beta_-]}{2\alpha^3(z^2 - 1)^2}, \quad (96)$$

$$\Gamma_1 = 12\alpha^2 + 3\beta_1\beta_2 - 11\alpha\beta_+ - 3k^2 + 3\epsilon + D(5D + 2\alpha), \quad (97)$$

$$\Gamma_2 = 4\alpha^2 - 5k^2 + 5\epsilon - 5\beta_1\beta_2 - \alpha\beta_+ + D(3D - 2\alpha), \quad (98)$$

$$\Gamma_3 = D(D + 2\alpha) + k^2 - \epsilon - \beta_1\beta_2 - \alpha\beta_+. \quad (99)$$

Procediendo de forma análoga al átomo de hidrógeno, la implementación de la condición de cuantización proporciona la siguiente ecuación

$$\delta_1 = \frac{\Delta_1\Delta_2}{4\alpha^4(z^2 - 1)^2}, \quad (100)$$

$$\Delta_1 = D(D + 2\alpha) - \beta_1\beta_2 + \alpha(\beta_+ - 4\alpha) + k^2 - \epsilon, \quad (101)$$

$$\Delta_2 = D(D + 2\alpha) - \beta_1\beta_2 - \alpha\beta_+ + k^2 - \epsilon. \quad (102)$$

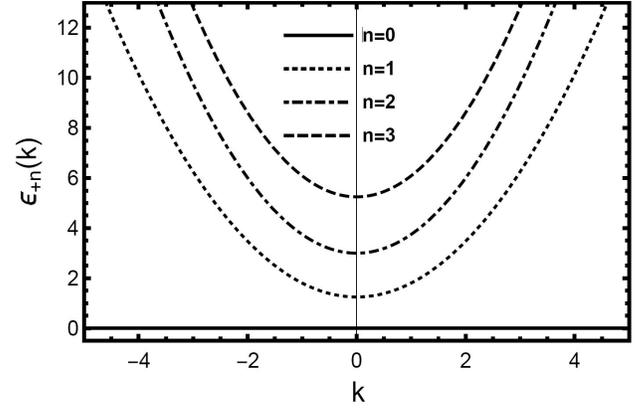


FIGURE 2. Gráfica de los primeros eigenvalores ϵ_n , dados en (106). Con $D = 1$, $k = 1$ y $\alpha = 0.5$.

Las únicas soluciones físicamente aceptables de (100) (se consideran únicamente eigenvalores positivos, los cuales conducen a energías reales) son

$$\epsilon_1 = 0, \quad (103)$$

$$\epsilon_2 = \frac{\alpha(2D + \alpha)(D^2 + 2D\alpha + \alpha^2 + k^2)}{(D + \alpha)^2}, \quad (104)$$

$$\epsilon_3 = \frac{4\alpha(D + \alpha)(D^2 + 4D\alpha + 4\alpha^2 + k^2)}{(D + 2\alpha)^2}. \quad (105)$$

En el caso general, los eigenvalores pueden escribirse como

$$\epsilon_n = k^2 - D^2 + (D + n\alpha)^2 - \frac{D^2k^2}{(D + n\alpha)^2}, \quad (106)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

La Fig. 2 muestra los primeros cuatro eigenvalores ϵ_n como función de k .

De acuerdo al resultado previo y con ayuda de (62), los niveles de energía para un electrón de Dirac en presencia de un campo magnético pueden expresarse como

$$E_{n\pm} = \pm \hbar v_F \sqrt{k^2 - D^2 + (D + n\alpha)^2 - \frac{D^2k^2}{(D + n\alpha)^2}}. \quad (107)$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$. Estos niveles de energía suelen llamarse *niveles de Landau*. La energía del estado base, $n = 0$ es igual cero e independiente de la presencia del campo magnético. Cabe mencionar que los niveles de energía positivos corresponden a la banda de conducción de grafeno, mientras que los niveles de energía negativos corresponden a la banda de valencia.

Para el cálculo de las eigenfunciones, es conveniente reescribir las funciones (93), (94), (95) y (96) colocando explícitamente el valor de ϵ dado en (106). Por consiguiente se tiene

$$\tilde{\lambda}_{0+} = -\frac{b-a-(a+b+2)z}{1-z^2}, \quad (108)$$

$$\tilde{s}_{0+} = -\frac{(n-1)(n-1+a+b+1)}{1-z^2}, \quad (109)$$

$$\tilde{\lambda}_{1+} = \frac{cz^2+dz+g}{z^2-1}, \quad (110)$$

$$\tilde{s}_{1+} = \frac{(n-1)(n+a+b)[z(a+b)+b-a]}{z^2-1}, \quad (111)$$

con

$$a = -\frac{D}{\alpha} - n + \frac{ikD}{\alpha(D+n\alpha)}, \quad (112)$$

$$b = -\frac{D}{\alpha} - n - \frac{ikD}{\alpha(D+n\alpha)}, \quad (113)$$

$$c = (a+b)^2 + n(a+b+n-1) + 2(2a+2b+3), \quad (114)$$

$$d = 2(a+b+3)(a-b), \quad (115)$$

$$g = (a-b)^2 - n(a+b+n-1) + 2(a+b+1). \quad (116)$$

De acuerdo a las definiciones de $\tilde{\lambda}_{0+}$ y \tilde{s}_{0+} , $n=0$ queda excluido debido a la solución no satisface las condiciones de frontera, es decir, las eigenfunciones $\psi_+(x)$ no incluyen el eigenvalor cero. Ahora bien, se puede calcular las funciones $\tilde{\alpha}(z)$. Para $n=1$, la ecuación (14) conduce a

$$\tilde{\alpha}_1(z) = \left. \frac{\tilde{s}_{1+}(z)}{\tilde{\lambda}_{1+}(z)} \right|_{n=1} = 0. \quad (117)$$

Mientras que para $n=2$, se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_2(z) &= \left. \frac{\tilde{s}_{2+}(z)}{\tilde{\lambda}_{2+}(z)} \right|_{n=2}, \\ &= \frac{(D+\alpha)(D+2\alpha)}{-z(D+\alpha)(D+2\alpha)+Dki}. \end{aligned} \quad (118)$$

De acuerdo a los resultados (117) y (118), las eigenfunciones para el estado base y el primer estado excitado son

$$f_{1+}(z) = c_1 \exp \left[-\int \tilde{\alpha}_1(z) dz \right] = c_1, \quad (119)$$

$$f_{2+}(z) = c_2 \exp \left[-\int \tilde{\alpha}_2(z) dz \right], \quad (120)$$

$$= c_2 [Dki - (D+\alpha)(D+2\alpha)z], \quad (121)$$

$$= c_2 [(a+b+2)(z-1) + 2(a+1)] \Big|_{n=2}. \quad (122)$$

Calculando las constantes de normalización c_1 y c_2 , se tiene que las funciones $f_{n+}(z) = P_{n-1}^{(a,b)}(z)$, con $n=1, 2, 3, \dots$ y donde $P_n^{(a,b)}(z)$ son los polinomios de Jacobi.

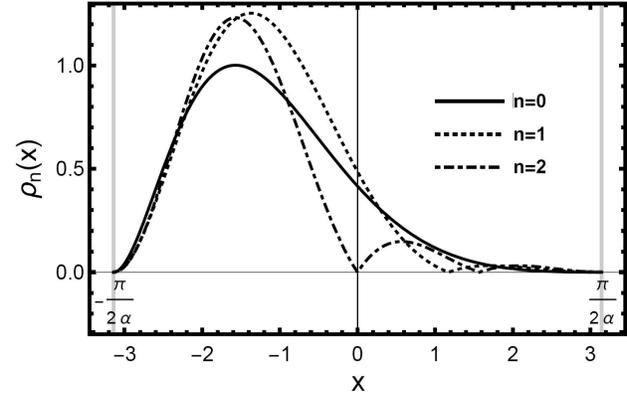


FIGURE 3. Gráfica de la densidad de estados $\rho_n(x)$. Con $D=1$, $k=1$ y $\alpha=0.5$.

Finalmente de (68) y (77), la función de onda para el grafeno es

$$\begin{aligned} \psi_{n+}[z(x)] &= A(z+1)^{\frac{1+b}{2}}(z-1)^{\frac{1+a}{2}} e^{i(a-b)\arctan(-iz)} \\ &\times P_{n-1}^{(a,b)}(z), \quad n=1, 2, 3, \dots, \\ &= A(z^2-1)^{\frac{1+\Re(a)}{2}} e^{-\Im(a)\alpha x} P_{n-1}^{(a,b)}(z). \end{aligned} \quad (123)$$

donde A es una constante de normalización, $\Re(a)$ y $\Im(a)$ es la parte real e imaginaria de a , respectivamente. Para el cálculo de las funciones $\psi_-(x)$, se procede de forma análoga a (123), sin embargo aquí $\psi_-(x) \sim P_n^{(a,b)}(z)$, con $n=0, 1, 2, \dots$ y estas funciones si consideran el eigenvalor $\epsilon_0=0$, a diferencia de $\psi_+(x)$. La Fig. 3, muestra la densidad de estados para los primeros tres niveles.

Es importante destacar que para el cálculo de las energías y funciones de onda para el grafeno, usualmente se emplean técnicas de mecánica cuántica supersimétrica, como se puede ver en la Ref. [14].

6. Modos cuasi-normales

Los agujeros negros presentes en nuestro universo, no pueden permanecer completamente aislados, ellos deben de interactuar con la materia y energía presentes alrededor de ellos, esta interacción puede perturbar al agujero negro. Cuando un agujero negro es perturbado, su comportamiento resultante puede ser descrito en tres etapas:

1. La primera etapa corresponde a la radiación debida a las condiciones iniciales de la perturbación.
2. La segunda etapa corresponde a oscilaciones amortiguadas con frecuencias complejas. Los modos de dichas oscilaciones se denominan *modos cuasi-normales*. Los modos cuasi-normales son una manifestación de las oscilaciones de resonancia del propio espacio-tiempo del agujero negro y dominan poco después de la etapa transitoria inicial.

Estas frecuencias son independientes de las condiciones iniciales y solo dependen de las propiedades del agujero negro.

3. La tercera etapa en general corresponde a una ley de potencia de decaimiento de los campos.

Cabe mencionar que el estudio de los modos cuasi normales es muy útil para caracterizar a los agujeros negros, debido a que estas frecuencias dependen únicamente de los parámetros que describen al agujero negro, es decir, pueden considerarse como la huella digital del agujero negro (ver Ref. [15]), por lo que el cálculo de las eigenfunciones en este caso es irrelevante.

El análisis de los modos cuasi-normales consiste en resolver una ecuación tipo Schrödinger con un potencial efectivo que depende de la función métrica que describe la solución de agujero negro. Si el agujero negro posee simetría esférica estática y es perturbado por un campo escalar, la ecuación que describe los modos cuasi-normales es

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + [\omega^2 - V(r)]\psi(x) = 0, \quad (124)$$

donde x es la coordenada tortuga, definida como

$$\frac{dx}{dr} = \frac{1}{f(r)}, \quad (125)$$

y el potencial efectivo $V(r)$ puede expresarse como

$$V(r) = f(r) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} \right], \quad (126)$$

siendo $f(r)$ la función métrica del agujero negro y l el índice del armónico esférico.

Los modos cuasi normales ω se definen como soluciones de (124) sujeto a las condiciones de frontera

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-i\omega x}, & x \rightarrow -\infty, \\ e^{i\omega x}, & x \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (127)$$

de dichas condiciones de frontera se obtienen un conjunto discreto de soluciones con frecuencias complejas

$$\omega = \omega_r + i\omega_i, \quad (128)$$

Aquí ω_r es la frecuencia de oscilación del agujero negro y ω_i describe la estabilidad del agujero negro (el lector puede consultar la Ref. [16] para más detalles). Es importante mencionar que de acuerdo al valor de ω_i , las siguientes situaciones, pueden ocurrir:

1. Si $\omega_i < 0$, se tiene una oscilación amortiguada, debido a que $\psi(x, t) \sim e^{-i\omega t}$ decrece conforme el tiempo avanza y eventualmente tiende a cero para tiempos muy grandes, por lo que la oscilación del agujero negro cesara, este comportamiento describe una solución estable.

2. Cuando $\omega_i > 0$, la función $\psi(x, t) \sim e^{-i\omega t}$ crece indefinidamente conforme el tiempo avanza, por lo que este comportamiento describe una solución inestable.

3. Mientras que si $\omega_i = 0$, la solución (124) describe los modos normales, es decir, el agujero negro permanecerá oscilando indefinidamente.

La materia de quintaesencia es uno de los varios mecanismos que permite proveer una fuente de presión negativa que permite contrarrestar a la interacción gravitacional y por lo tanto entender por que el universo se expande de forma acelerada.

La solución de un agujero negro rodeado por materia de quintaesencia fue discutida por Kiselev [17], esta permite obtener la función métrica de un agujero negro rodeado de quintaesencia al añadir el término de quintaesencia $-c/r^{3\omega_q+1}$ a la métrica del agujero negro.

Para el cálculo de los modos cuasi-normales, en este trabajo se elige al agujero negro de Schwarzschild rodeado de quintaesencia, cuyo elemento de línea es descrito por

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2, \quad (129)$$

donde la función métrica toma la siguiente forma

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{c}{r^{3\omega_q+1}}, \quad (130)$$

aquí M es la masa, c es un factor de normalización y ω_q es el parámetro de estado que debe de satisfacer la siguiente restricción $-1 < \omega_q < -1/3$. Particularmente, en este trabajo se considerará el caso específico de $\omega_q = -2/3$, por consiguiente (130) se puede expresar como

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - cr. \quad (131)$$

Para poder proseguir, es primordial determinar el rango de valores que los parámetros que describen el agujero negro deben de tomar, esto facilita el análisis de los horizontes.

Los horizontes se definen como las raíces positivas de la función métrica dada por (131), lo cual conlleva a

$$r - 2M - cr^2 = 0. \quad (132)$$

Esta ecuación posee dos raíces r_h y r_c

$$r_h = \frac{1 - \sqrt{1 - 8cM}}{2c}, \quad r_c = \frac{1 + \sqrt{1 - 8cM}}{2c}, \quad (133)$$

siendo r_h el horizonte de eventos y r_c el horizonte cosmológico o aparente ($r_h < r_c$). Ambos horizontes coinciden $r_h = r_c$ cuando M toma el valor de la masa crítica $M_* = 1/8c$ y se tiene dos horizontes cuando $M < M_*$. En este trabajo se emplearan valores de los parámetros M y c para el cual el agujero negro tendrá dos horizontes.

Para resolver (124), es más adecuado realizar el siguiente cambio de variable

$$\xi = \frac{1}{r}. \quad (134)$$

Por lo tanto, la función métrica $f(r)$ y el potencial $V(r)$ se pueden expresar en la nueva variable ξ como

$$f(\xi) = \frac{p(\xi)}{\xi^2}, \quad (135)$$

$$p(\xi) = \xi^2 - 2M\xi^3 - c\xi. \quad (136)$$

$$V(\xi) = p(\xi) \left[l(l+1) + \frac{2M\xi^2 - c}{\xi} \right]. \quad (137)$$

Colocando el potencial (137) en (124) y aplicando (134), se obtiene

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{p'}{p} \frac{d\psi}{d\xi} + \left\{ \frac{\omega^2}{p^2} - \frac{l(l+1)}{p} - \frac{2M\xi^2 - c}{\xi p} \right\} \psi = 0, \quad (138)$$

donde $p' = 2\xi - 6M\xi^2 - c$ (aquí la prima significa derivar a p respecto a ξ).

Redefiniendo la función de onda $\psi(\xi)$

$$\psi(\xi) = \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{p}}, \quad (139)$$

entonces (140) se formula como

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} + \bar{V}(\xi) \right] \varphi(\xi) = 0, \quad (140)$$

con

$$\bar{V}(\xi) = \frac{4M^2\xi^4 - 4l(l+1)p + c[2p' - c] + 4\omega^2}{4p^2}. \quad (141)$$

Para poder continuar con el cálculo de los modos cuasi-normales, es necesario expresar las condiciones de frontera (127) en términos de la variable ξ . Para ello se obtiene primero la coordenada tortuga

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{dr}{f(r)} = - \int \frac{d\xi}{p(\xi)} = \int \frac{d\xi}{2M\xi(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1)}, \\ &= \frac{\ln(\xi - \xi_1)}{2M\xi_1(\xi_0 - \xi_1)} \\ &\quad - \frac{\ln(\xi)}{2M\xi_1\xi_0} - \frac{\ln(\xi - \xi_0)}{2M\xi_0(\xi_0 - \xi_1)}, \end{aligned} \quad (142)$$

donde

$$\xi_0 = \frac{2c}{1 + \sqrt{1 - 8Mc}} = \frac{1}{r_c}, \quad (143)$$

$$\xi_1 = \frac{2c}{1 - \sqrt{1 - 8Mc}} = \frac{1}{r_h}. \quad (144)$$

Por otra parte, si se calcula la gravedad superficial para $\xi = 0$, $\xi = \xi_0$ y $\xi = \xi_1$ ($\xi_0 < \xi_1$), se obtienen entonces las siguientes expresiones

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{df}{dr} \Big|_{r \rightarrow r'} = - \frac{\xi^2}{2} \frac{df}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = -M\xi_0\xi_1, \quad (145)$$

$$\kappa_0 = - \frac{\xi^2}{2} \frac{df}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_0} = M\xi_0(\xi_0 - \xi_1), \quad (146)$$

$$\kappa_1 = - \frac{\xi^2}{2} \frac{df}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_1} = -M\xi_1(\xi_0 - \xi_1). \quad (147)$$

Las ecuaciones anteriores permiten expresar a la coordenada tortuga x en términos de ξ , de la siguiente forma

$$x = \ln(\xi)^{\frac{1}{2\kappa}} + \ln(\xi - \xi_0)^{\frac{1}{2\kappa_0}} + \ln(\xi - \xi_1)^{\frac{1}{2\kappa_1}}. \quad (148)$$

Insertando (148) en la condición de frontera de onda entrante (127), se tiene

$$e^{-i\omega x} = \xi^{-\frac{i\omega}{2\kappa}} (\xi - \xi_0)^{-\frac{i\omega}{2\kappa_0}} (\xi - \xi_1)^{-\frac{i\omega}{2\kappa_1}}, \quad (149)$$

Cabe mencionar que el término dominante en la expresión anterior cuando $x \rightarrow -\infty$ ($r \rightarrow r_h$ y $\xi \rightarrow \xi_1$), es el segundo término del lado derecho de (149), por ello, el escalamiento adecuado cerca del horizonte de eventos se puede formular como sigue

$$\psi_h \approx (\xi - \xi_1)^{-\frac{i\omega}{\kappa_1}}. \quad (150)$$

Por otra parte, cuando $x \rightarrow \infty$, la segunda condición de frontera de (127) ($r \rightarrow \infty$ y $\xi \rightarrow 0$) se puede formular como sigue

$$e^{i\omega x} = \xi^{\frac{i\omega}{2\kappa}} (\xi - \xi_0)^{\frac{i\omega}{2\kappa_0}} (\xi - \xi_1)^{\frac{i\omega}{2\kappa_1}}, \quad (151)$$

Aquí puede observarse que no hay un comportamiento dominante, como en (150), por lo que es más adecuado escalar el comportamiento divergente de (151) cuando $x \rightarrow +\infty$, como

$$\psi_\infty \approx e^{i\omega x} = e^{-i\omega \int \frac{d\xi}{p(\xi)}}. \quad (152)$$

Para implementar el AIM en (140), se puede considerar

$$\begin{aligned} \psi(\xi) &= f_2(\xi)\chi(\xi), \\ f_2(\xi) &= (\xi - \xi_1)^{-\frac{i\omega}{\kappa_1}} e^{-i\omega \int \frac{d\xi}{p(\xi)}}, \end{aligned} \quad (153)$$

Introduciendo f_2 en (4) y (5), donde $E = 0$, $V = \bar{V}(\xi)$, se obtiene la forma estándar

$$\frac{d^2\chi(\xi)}{d\xi^2} = \lambda_0(\xi) \frac{d\chi(\xi)}{d\xi} + s_0(\xi)\chi(\xi), \quad (154)$$

donde

$$\lambda_0(\xi) = \frac{2i\omega}{\kappa_1(\xi - \xi_1)} - \frac{p' - 2i\omega}{p}, \quad (155)$$

$$\begin{aligned} s_0(\xi) &= \frac{l(l+1)\xi^2 + 2M\xi^3 - c\xi}{\xi^2 p} \\ &\quad - \frac{i\omega(i\omega + \kappa_1)}{\kappa_1^2(\xi - \xi_1)^2} + \frac{i\omega(p' - 2i\omega)}{\kappa_1 p(\xi - \xi_1)}. \end{aligned} \quad (156)$$

A diferencia de los dos casos mostrados anteriormente en este trabajo, la solución de los modos cuasi-normales requiere de un proceso completamente numérico. Es por ello que se empleara el Método de Iteración Asintótico Mejorado.

TABLE I. Frecuencias de los modos cuasi-normales para un agujero negro de Schwarzschild rodeado de quintaesencia, para $M = 0.2$.

c ($l = 3$)	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
0.1	3.05551-0.42448 <i>i</i>	2.99338-1.28481 <i>i</i>	2.87824-2.17747 <i>i</i>
0.2	2.71143-0.36452 <i>i</i>	2.66079-1.10242 <i>i</i>	2.56626-1.86562 <i>i</i>
0.3	2.33573-0.30192 <i>i</i>	2.29682-0.91214 <i>i</i>	2.22349-1.54074 <i>i</i>
c ($l = 4$)	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
0.1	3.92815-0.42377 <i>i</i>	3.87902-1.27827 <i>i</i>	3.78510-2.15308 <i>i</i>
0.2	3.48940-0.36373 <i>i</i>	3.44934-1.09661 <i>i</i>	3.37241-1.84534 <i>i</i>
0.3	3.00923-0.30116 <i>i</i>	2.97848-0.90735 <i>i</i>	2.91907-1.52495 <i>i</i>

TABLE II. Valores de los modos cuasi-normales para un agujero negro de Schwarzschild rodeado de quintaesencia, para $c = 0.1$.

M ($l = 3$)	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
0.1	6.43724-0.90740 <i>i</i>	6.30162-2.74749 <i>i</i>	6.05110-4.65941 <i>i</i>
0.2	3.05551-0.42448 <i>i</i>	2.99338-1.28481 <i>i</i>	2.87824-2.17747 <i>i</i>
0.3	1.92450-0.26318 <i>i</i>	1.88690-0.79629 <i>i</i>	1.81697-1.34860 <i>i</i>
M ($l = 4$)	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
0.1	8.27166-0.90613 <i>i</i>	8.16446-2.73386 <i>i</i>	7.95991-4.60668 <i>i</i>
0.2	3.92815-0.42377 <i>i</i>	3.87902-1.27827 <i>i</i>	3.78510-2.15308 <i>i</i>
0.3	2.47539-0.26268 <i>i</i>	2.44564-0.79215 <i>i</i>	2.38865-1.33369 <i>i</i>

El siguiente paso, es tomar los desarrollos de Taylor de las funciones $\lambda_0(\xi)$ y $s_0(\xi)$ alrededor de un punto $\xi = \hat{\xi}$, para después insertar dichos coeficientes en (25), obteniendo una ecuación algebraica que permite calcular de forma numérica las frecuencias ω , para una elección adecuada de n . En este trabajo se empleo el software Mathematica para realizar todos estos cálculos numéricos, pero el lector puede consultar el código en Python en la Ref. [7].

Es importante mencionar que la elección del punto $\hat{\xi}$ debería de ser independiente del valor obtenido para ω , pero en la práctica hay variaciones muy pequeñas al cambiar el valor $\hat{\xi}$. Sin embargo, se ha encontrado que si $\hat{\xi}$ corresponde al valor donde el potencial (137) alcanza su máximo valor, entonces se obtienen mejores resultados para ω .

Las Tablas I y II muestran los resultados obtenidos de los modos cuasi-normales para diferentes valores del parámetro de quintaesencia c y para el parámetro de masa M . Si c y M incrementan, la parte real e imaginaria de las frecuencias de los modos cuasi-normales disminuyen.

Como se menciono en los párrafos previos, la parte real de los modos cuasi-normales representan la frecuencia de oscilación, entonces se puede indicar que la presencia de quintaesencia suprime la oscilación del agujero negro y su amortiguamiento aumenta con forme aumenta la presencia de quintaesencia, es decir, aumenta el valor de c .

7. Conclusiones

En este trabajo se han estudiado tres casos específicos donde se ha mostrado como implementar el AIM para hallar las ei-

genfunciones y los eigenvalores a partir de la ecuación tipo Schrödinger asociada a cada caso. Como una alternativa a los métodos y técnicas de soluciones de ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden ya conocidos en la literatura.

Por otra parte, la elección de los ejemplos mostrados en este trabajo, tiene la intención de que el lector no experto tenga un primer acercamiento a los temas de mecánica cuántica y agujeros negros y también sirva de motivación para lectores más avanzados a adentrarse más a dichas temáticas.

Como primer caso, se estudio la ecuación radial del átomo de hidrógeno y se mostró que el AIM, proporciona los resultados ya conocidos en los libros de texto de mecánica cuántica. El objetivo para este ejemplo es mostrar otra forma alternativa de resolver la parte radial del átomo de hidrógeno.

En el segundo caso, se resolvió la ecuación de Dirac-Weyl para un perfil de campo magnético proporcional a una secante cuadrada. De los resultados obtenidos, se tiene que los estados ligados corresponden únicamente al movimiento de las cargas en la dirección x , donde los niveles de Landau presentan una dependencia explícita del numero de onda k . Por lo que la velocidad promedio en la dirección y de esos estados ligados pueden ser calculados al tomar la derivada respecto de k a los niveles de energía.

En el estudio de grafeno, usualmente se emplea la técnica de la factorización, y también se suele recurrir a definir variables complejas como (68). Referente a la ecuación (84), con la definición de $\tilde{\lambda}_{0+}$ y \tilde{s}_{0+} dados en (108) y (109), cabe mencionar que esta es la ecuación diferencial de jacobi, por lo que n no puede incluir al cero. Sin embargo en este trabajo se ha mostrado que AIM proporciona la misma solución.

El tercer caso abordado en este trabajo, se enfoca al cálculo de los modos cuasi-normales (eigenvalores) para un campo escalar en un agujero negro de Schwarzschild rodeado de quintaesencia. Como primer paso, se realizó el análisis de los horizontes y determinar la región de valores de los parámetros, para los cuales se tienen uno o dos horizontes.

Aquí vale la pena enfatizar que un factor fundamental para la implementación del AIM, es factorizar adecuadamente el comportamiento asintótico en los horizontes e infinito, tal como se muestra en (150) y (152) y dicho análisis en general dependerá de la solución de agujero negro que se estudie.

De los resultados obtenidos de las frecuencias de los modos cuasi-normales, se encontró que el agujero negro de Schwarzschild rodeado de quintaesencia, es estable para pertur-

baciones escalares cuando el factor de normalización aumenta.

Aunque los resultados mostrados en las Tablas I y II, se consideran los modos para algunos valores de n y $l > n$, el AIM es lo suficientemente robusto y funciona adecuadamente para valores de $l < n$, a diferencia de otros como WKB (Gregor Wentzel, Hendrik Kramers y Leon Brillouin) ver Ref. [18] para mayor referencia.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado parcialmente gracias al apoyo del SNII-CONAHCYT, México. N. Y. López agradece al CONAHCYT por la beca otorgada 822768.

1. E. W. Leaver. An analytic representation for the quasinormal modes of Kerr black holes. *Proc. R. Soc. London. A. Math. Phys. Sci.* **402** (1985) 285. <https://doi.org/10.1098/rspa.1985.0119>
2. M. Eshghi and H. Mehraban. Exact solution of the Dirac equation in graphene under electric and magnetic fields. *Comptes Rendus Physique*, **18** (2017) 47. Prizes of the French Academy of Sciences 2015 Prix de l'Académie des sciences 2015. <https://doi.org/10.1016/j.crhy.2016.06.002>
3. R. Arceo, L. M. Sandoval, O. Pedraza, L. A. López, G. León-Soto, and J. Martínez-Castro. Elastic scattering for $\pi + p$ using the Klein-Gordon equation. *Int. J. Mod. Phys. E*, **30** (2021) 2150048. <https://doi.org/10.1142/S0218301321500488>
4. E. Hairer, C. Lubich, and M. Roche. The Numerical Solution of Differential-Algebraic Systems by Runge-Kutta Methods. Lecture Notes in Mathematics. (Springer Berlin Heidelberg, 2006). <https://doi.org/10.1007/BFb0093947>
5. H. Ciftci, R. L. Hall, and N. Saad. Asymptotic iteration method for eigenvalue problems. *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003) 11807. <https://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/36/47/008>
6. O. Bayrak and I. Boztosun. Application of the asymptotic iteration method to the exponential cosine screened coulomb potential. *Int. J. Quantum Chem.*, **107** (2007) 1040. <https://doi.org/10.1002/qua.21240>
7. M. Karakoç, AimpY: A python code to solve Schrödinger-like equations with the asymptotic iteration method. *Int. J. Mod. Phys. C*, **32** (2021) 2150017. <https://doi.org/10.1142/S0129183121500170>
8. N. Y. López-Juárez, O. Pedraza-Ortega, L. A. López-Suarez, and R. Arceo-Reyes. Estados ligados en el grafeno en presencia de campo magnético. *Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, **11** (2023) 161. <https://doi.org/10.29057/icbi.v11iEspecial5.11716>
9. K. S. Alsadi. Bound state solutions of a Dirac particle undergoing a tensor interaction potentials via asymptotic iteration method. *J. Taibah Univ. Sci.*, **14** (2020) 1156. <https://doi.org/10.1080/16583655.2020.1807129>
10. M. Jiménez-Camargo, O. Pedraza-Ortega, and L. A. López-Suarez. Modos cuasi normales para un agujero negro Schwarzschild de Sitter rodeado de quintaesencia: Método de iteración asintótica. *Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, **10** (2022) 29. <https://doi.org/10.29057/icbi.v10iEspecial.8244>
11. H. T. Cho *et al.*, A New Approach to Black Hole Quasinormal Modes: A Review of the Asymptotic Iteration Method, *Adv. Math. Phys.* **2012** (2012) 281705, <https://doi.org/10.1155/2012/281705>
12. I. Boztosun, M. Karakoc, F. Yasuk, and A. Durmus. Asymptotic iteration method solutions to the relativistic Dirac-Kemmer-Petiau equation. *J. Math. Phys.* **47** (2006) 062301. <https://doi.org/10.1063/1.2203429>
13. H. Ciftci, R. L. Hall, and N. Saad. Perturbation theory in a framework of iteration methods. *Phys. Lett. A*, **340** (2005) 388. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2005.04.030>
14. S. Kuru, J. Negro, and L. M. Nieto. Exact analytic solutions for a Dirac electron moving in graphene under magnetic fields. *J. Phys.: Condens. Matter.*, **21** (2009) 455305. <https://dx.doi.org/10.1088/0953-8984/21/45/455305>
15. R. A. Konoplya and Alexander Zhidenko. Quasinormal modes of black holes: From astrophysics to string theory. *Rev. Mod. Phys.*, **83** (2011). 793 <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.83.793>
16. E. Berti, V. Cardoso, and A. O. Starinets, Quasinormal modes of black holes and black branes, *Class. Quantum Grav.* **26** (2009) 163001, <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/26/16/163001>.
17. V.V. Kiselev. Quintessence and black holes. *Class. Quant. Grav.* **20** (2003) 1187. <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/20/6/310>
18. G. Barrientos, O. Pedraza, L. A. López, and R. Arceo. Modos cuasi-normales de un agujero negro de Einstein-Gauss-Bonnet rodeado de quintaesencia: perturbaciones escalares y electromagnéticas. *Rev. Mex. Fis.*, **68** (2022) 050704. <https://doi.org/10.31349/RevMexFis.68.050704>