

De la teoría al análisis de datos de ondas gravitacionales

J. M. Villa-Alatorre and C. Moreno

*Departamento de Física, CUCEI, Universidad de Guadalajara,
Av. Revolución 1500, 44430, Guadalajara, Jal., México.*

Received 2 December 2024; accepted 20 December 2024

En este artículo se introduce la teoría y el análisis de datos de ondas gravitacionales con el propósito de replicar, paso por paso, la detección y estimación de parámetros de la primera señal de onda gravitacional reportada por la colaboración LIGO. Para ello se presenta la teoría de Einstein linealizada, el desarrollo analítico de señales de sistemas binarios y las polarizaciones esperadas de una inspiral de objetos compactos. Posteriormente, se introducen las técnicas estadísticas básicas del análisis de estas señales y el método de detección. Finalmente, se analiza el evento GW150914, obtenido de la paquetería PyCBC, se filtra la señal para visualizarla y se realiza la estimación de las masas y la distancia. Con el propósito de facilitar la reproducción de este hito de la física relativista, se incluye el código para filtrar la señal y lograr su visualización y estimación de parámetros.

Descriptores: Ondas gravitacionales; procesamiento de datos; GW150914.

This article introduces gravitational wave theory and data analysis with the purpose of replicating, step by step, the detection and parameter estimation of the first gravitational wave signal reported by the LIGO collaboration. For this purpose, the linearized Einstein theory and the expected polarizations of a compact object inspiral are presented. Then, the basic statistical techniques for analyzing these signals and the detection method are introduced. Finally, the GW150914 event is analyzed, the signal is filtered for visualization, and the masses and distance are estimated. To facilitate the reproduction of this milestone in relativistic physics, the code for filtering the signal and achieving its visualization and parameter estimation is included.

Keywords: Gravitational waves; data analysis; GW150914.

DOI: <https://doi.org/10.31349/RevMexFis.22.020223>

1. Introducción

En los últimos años, el desarrollo de poderosos instrumentos para poder observar el universo, ha tenido un gran auge en temas de astrofísica y física relativista. Estos instrumentos están tomando grandes montos de datos, los cuales necesitan ser procesados para entender parámetros físicos de objetos astrofísicos. Para ello se necesitan técnicas de análisis de datos que nos permitan eliminar ruidos externos al objeto de estudio para su posterior caracterización y determinación del objeto observado. En astronomía, destacan proyectos como Gaia [1] y James Webb Space Telescope (JWST) [2]. En cosmología, experimentos como DESI (Dark Energy Spectroscopic Instrument) [3], BICEP3 [4], y South Pole Telescope (SPT-3G) [5] están aportando datos cruciales sobre la estructura y evolución del universo. En el campo de las ondas gravitacionales (OG), los detectores como LIGO [6], Virgo [7] y KAGRA [8] han abierto una nueva ventana para poner a prueba la teoría de la relatividad general (RG) en los eventos más extremos del cosmos [9]. De esto nace la necesidad de que las técnicas de análisis de datos sean accesibles, permitiendo aprovechar al máximo la gran cantidad de información disponible en múltiples frentes.

En la física relativista, particularmente en el campo de las OG, recientemente se ha encontrado evidencia de un fondo estocástico reportado por la colaboración NANOGrav [10]. Estas señales provienen de fenómenos astrofísicos masivos como la fusión de agujeros negros supermasivos y eventos

cataclísmicos en el universo temprano. Además, experimentos como LIGO y Virgo han detectado múltiples eventos de OG provenientes de la fusión de agujeros negros, estrellas de neutrones y, en casos raros, sistemas binarios mixtos de estos objetos [11].

En el futuro, se espera encontrar señales de eventos más exóticos, como la colisión de agujeros negros primordiales y otras fuentes aún no identificadas. Para ello, se están desarrollando nuevos detectores de mayor sensibilidad, como LISA (Laser Interferometer Space Antenna) [12] y Einstein Telescope [3], que mejorarán significativamente la capacidad de detección de ondas gravitacionales de baja frecuencia. Estos avances, combinados con los datos de otros experimentos, permitirán el estudio del universo a través de múltiples mensajeros, incluyendo ondas gravitacionales, neutrinos y fotones. Esto hace que sea un excelente momento para adentrarse en el análisis de datos en astrofísica relativista, donde se abre un campo multidisciplinario lleno de posibilidades.

El presente artículo está organizado de la siguiente manera: en la Sec. 2, se deduce la ecuación de OG de la teoría linealizada de Einstein, y se encuentra la señal esperada para la inspiral de una colisión de objetos compactos. En la Sec. 3 se presentan la detección y herramientas estadísticas del análisis de señales de OG. A manera de ejemplo, en la Sec. 4, se analiza la primera OG detectada, el evento GW150914, para inferir los parámetros de la coalescencia de agujeros negros. Finalmente, en la Sec. 5 se dan algunas conclusiones.

2. Ondas gravitacionales

2.1. Teoría linealizada

Para describir un universo sin preferencia por ningún marco de referencia, la RG está escrita en el lenguaje de tensores con cuya álgebra se asume cierta familiaridad. En este contexto, la geometría está descrita por el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ y las distancias infinitesimales por el diferencial de línea Ec. (1). Se adopta la convención de que los índices griegos van de 0 a 3.

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1)$$

Cuando la gravedad es débil, y asumiendo una perturbación para el tensor métrico, la geometría es cercana a la de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, excepto por una perturbación $h_{\mu\nu}$ cuyo cuadrado es despreciable y quedándonos un análisis a primer orden,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + O(h^2), \quad (2)$$

con $\eta_{\mu\nu} = \text{diagonal}(-c^2, 1, 1, 1)$. Las ecuaciones de Einstein obtenidas de la métrica Ec. (2) se llaman ecuaciones linealizadas. De ahora en adelante se ignoran los términos cuadráticos de $h_{\mu\nu}$ por lo que sus índices se suben con el tensor $\eta^{\mu\nu}$. Después de determinar la métrica, necesitamos el tensor de conexión de Christoffel, el cual está determinado por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} \eta^{\sigma\lambda} \left(\frac{\partial h_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial h_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right) + O(h^2), \quad (3)$$

y a partir de esta conexión, es posible calcular el tensor de Riemann, notar que los términos con doble conexión $\Gamma\Gamma$ no se incluyen por ser de orden cuadrático:

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2 h_{\nu\rho}}{\partial x^\mu \partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 h_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu \partial x^\rho} + \frac{\partial^2 h_{\mu\rho}}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 h_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \right) + O(h^2), \quad (4)$$

contrayendo índices para el tensor de Riemann, $R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\lambda\nu}^\lambda$, se encuentra el tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2 h}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 h_\nu^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 h_\mu^\lambda}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} - \eta^{\lambda\epsilon} \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\epsilon} \right) + O(h^2), \quad (5)$$

para la ecuación anterior, se considera que $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} + O(h^2)$. Contrayendo los índices del tensor de Riemann, encontramos el escalar de curvatura:

$$R = \frac{\partial^2 h^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 h}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + O(h^2). \quad (6)$$

Finalmente, para el tensor de Einstein $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - (1/2)g_{\mu\nu}R$ [14] tenemos (nótese que el término $h_{\mu\nu}R$ es de orden cuadrático):

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2 h}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 h_\nu^\lambda}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 h_\mu^\lambda}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} - \eta^{\lambda\epsilon} \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\epsilon} - \eta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 h^{\lambda\epsilon}}{\partial x^\lambda \partial x^\epsilon} - \eta^{\lambda\epsilon} \frac{\partial^2 h}{\partial x^\lambda \partial x^\epsilon} \right) \right) + O(h^2), \quad (7)$$

este tensor es bastante complicado, para simplificarlo se introduce la perturbación $\bar{h}_{\mu\nu}$ cuya traza tiene el signo opuesto,

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h, \quad (8)$$

en términos de esta perturbación, el tensor de Einstein toma una forma más simple:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{h}_\nu^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 \bar{h}_\mu^\lambda}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} - \eta_{\mu\nu} \frac{\partial^2 \bar{h}^{\lambda\epsilon}}{\partial x^\lambda \partial x^\epsilon} - \eta^{\lambda\epsilon} \frac{\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\epsilon} \right) + O(h^2), \quad (9)$$

donde los primeros tres términos involucran sumatorias similares a la divergencia que no aparecen en la ecuación de onda buscada (la cual nos permitirá representar una OG), por lo que no son deseados. Se busca ahora un sistema de referencia conveniente que los elimine, para ello se propone el siguiente desplazamiento pequeño de coordenadas:

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{\xi}, \quad (10)$$

donde el vector $\vec{\xi}$ es de orden $O(h)$. A partir de la transformación del tensor $g_{\mu\nu}$, determinada por el hecho de que la cantidad en la Ec. (1) debe ser invariante, es posible redefinir la métrica para este nuevo sistema de referencia:

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x_\nu} + O(h^2), \quad (11)$$

considerando que la nueva métrica $g'_{\mu\nu}$ mantiene la misma forma anterior en la Ec. (2), $g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}$, es posible obtener para la perturbación:

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x_\nu} + O(h^2), \quad (12)$$

donde la perturbación con traza invertida en la Ec. (8) toma la forma:

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x_\nu} + \eta^{\lambda\epsilon} \eta_{\mu\nu} \frac{\partial \xi_\epsilon}{\partial x^\lambda} + O(h^2), \quad (13)$$

Ahora, es posible elegir ξ de modo que $\partial \bar{h}'^{\mu\nu} / \partial x^\mu = 0$. Esta elección es similar al Gauge de Lorenz de electromagnetismo ($\partial A^\mu / \partial x^\mu = 0$) y por lo tanto adopta su nombre. Finalmente, encontramos la ecuación de onda obtenida a través de las ecuaciones de Einstein linealizadas:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (14)$$

Al estudiar la evolución de las ondas encontradas por la ecuación de onda, es común considerar que viajan en el vacío, es decir $T_{\mu\nu} = 0$. En esta situación, la solución a la ecuación Ec. (14) toma la forma:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = C_{\mu\nu} \exp(ik_\lambda x^\lambda), \quad (15)$$

donde k es el vector de onda y $C_{\mu\nu}$ es un tensor constante que nos representa la amplitud de la onda [15]. Un resultado importante que distingue a la RG de entre otras teorías alternativas es que el tensor $\bar{h}_{\mu\nu}$ solamente puede tener dos componentes independientes, llamadas polarizaciones, que en este caso se conocen como h_+ y h_\times . Escrito de esta forma, su traza es cero y solo tiene componentes perpendiculares a la dirección de propagación, por lo anterior se le conoce como tensor transverso sin traza $\bar{h}_{\mu\nu}^{TT}$:

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

En el caso no vacío, la siguiente ecuación expresa cómo esta perturbación métrica es generada por la distribución de energía y momento en el caso general con una fuente, representada por el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}(x')$,

$$h_{\mu\nu}(x) = 4G \int d^4x' \frac{T_{\mu\nu}(x')}{|x - x'|}. \quad (17)$$

Aquí, la integral sobre las cuatro dimensiones del espacio-tiempo (d^4x') indica que la influencia de cada punto x' en la distribución de materia y energía contribuye a la perturbación en el punto x . En esta ecuación, G es la constante gravitacional.

2.2. Señales de sistemas binarios

Existen diversas fuentes que producen ondas gravitacionales cualitativamente diferentes, desde sistemas binarios hasta objetos que rotan a altas velocidades. Las OG de órbitas binarias se generan debido a pares de objetos compactos muy masivos. Estos sistemas pueden estar conformados por enanas blancas, agujeros negros, estrellas de neutrones y sus combinaciones.

La coalescencia de estos objetos es un proceso de tres fases. En la fase inspiral, los objetos se orbitan, acercándose durante periodos de tiempo astronómicos debido a la pérdida de energía en forma de ondas gravitacionales. Durante la fusión, los dos objetos se acercan lo suficiente como para formar un único cuerpo, en el cual las ondas gravitacionales alcanzan su máxima intensidad. Finalmente, en el límite cercano o fase de anillo (*ringdown*), el cuerpo resultante se estabiliza, liberando las últimas ondas gravitacionales [16].

Una cantidad sumamente importante para el análisis de ondas gravitacionales es la *chirp mass*, o masa chirrido. Como veremos, es posible obtener este valor a partir de la señal,

y a partir de él estimar las masas que produjeron el evento. Para deducirla, consideramos un sistema binario de masas m_1 y m_2 que se aproximan a la coalescencia; también asumimos que las órbitas circulares Newtonianas son una buena aproximación, por lo que la energía orbital queda expresada como:

$$E = \frac{-Gm_1m_2}{2r}, \quad (18)$$

Esta energía no es constante, las OG se llevan parte de ella haciendo que la separación entre objetos, r , disminuya. Es posible demostrar que la generación de estas ondas está asociada al momento cuadrupolar de las masas, caso similar a la radiación del cuadrupolo de cargas en el electromagnetismo. Para el cambio de energía respecto al tiempo, Einstein encontró la siguiente expresión para las OG, la cual proviene de su teoría:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{32}{5} \frac{G}{c^5} \frac{(m_1m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} r^4. \quad (19)$$

El negativo de esta cantidad, que es la energía que se llevan las ondas, debe ser igual a la derivada temporal de la Ec. (18). Tras igualar y cancelar términos se obtiene:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{64}{5} \frac{m_1m_2}{c^5 (m_1 + m_2)^2} r^6, \quad (20)$$

la cual es una relación entre las masas y el comportamiento del radio de la órbita en el tiempo. De hecho, de la Tercera Ley de Kepler es posible relacionar el radio con el periodo, y consecuentemente con la frecuencia orbital f . Estas relaciones son:

$$r^3 = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2 f^2}, \quad (21a)$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{r}{f} \frac{df}{dt}. \quad (21b)$$

De esta forma, la expresión en la Ec. (20) queda expresada como [17]:

$$\left(\frac{df}{dt}\right)^3 = \left(\frac{96}{5}\right)^3 \frac{(2\pi)^8 (m_1m_2)^3}{c^{15} (m_1 + m_2)} G^5 f^{11}. \quad (22)$$

Por lo que se tiene una relación entre las masas del sistema binario y la frecuencia de su órbita, que cambia en el tiempo. Para simplificar y tener una cantidad \mathcal{M} con unidades de masa se define la masa chirrido como:

$$\mathcal{M} = \left(\frac{(m_1m_2)^3}{m_1 + m_2}\right)^{1/5}. \quad (23)$$

La señal de OG se recibe cada medio periodo, así que su frecuencia está relacionada con la orbital por $f_{OG} = 2f$. Por lo que es posible estimar la masa chirrido a partir de la frecuencia de la señal usando la Ec. (22). Habiendo encontrado esta cantidad, ahora se busca la forma de la señal de la OG, que se espera medir de la coalescencia de objetos compactos.

Escribiendo la Ec. (22) en términos de f_{OG} , e integrando se obtiene:

$$f_{OG}(t) = \frac{5^{3/8}}{8\pi} \left(\frac{GM}{c^3} \right)^{-5/8} (t_c - t)^{-3/8}, \quad (24)$$

donde t_c , es el tiempo de la coalescencia o fusión. Ahora, integrando la frecuencia f del sistema, se encuentra la fase de la órbita:

$$\begin{aligned} \Phi - \Phi_0 &\equiv 2\pi \int_{t_c}^t \frac{f_{OG}(t')}{2} dt' \\ &= - \left(\frac{5GM}{c^3} \right)^{-5/8} (t_c - t)^{5/8}. \end{aligned} \quad (25)$$

Finalmente, en términos de estas cantidades las polarizaciones de la onda gravitacional son:

$$\begin{aligned} h_+ &= \frac{4(GM)^{5/3}}{c^4 D} (\pi f_{OG}(t_{ret}))^{2/3} \\ &\times (1 + \cos^2(\mathcal{I})) \cos(2\Phi(t_{ret})), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} h_\times &= \frac{4(GM)^{5/3}}{c^4 D} (\pi f_{OG}(t_{ret}))^{2/3} \\ &\times (2 \cos(\mathcal{I})) \sin(2\Phi(t_{ret})), \end{aligned} \quad (27)$$

donde $t_{ret} = t - D/c$ toma en cuenta el tiempo que la OG tarda en viajar una distancia D de la fuente al detector; y el parámetro \mathcal{I} es la inclinación del plano del detector respecto al momento angular del sistema binario. Nótese que la señal de la OG crecerá conforme f_{OG} aumente al disminuir el radio de la órbita según la Ec. (21b). La Fig. 1 muestra un ejemplo de estas polarizaciones las cuales no describen el *ringdown*.

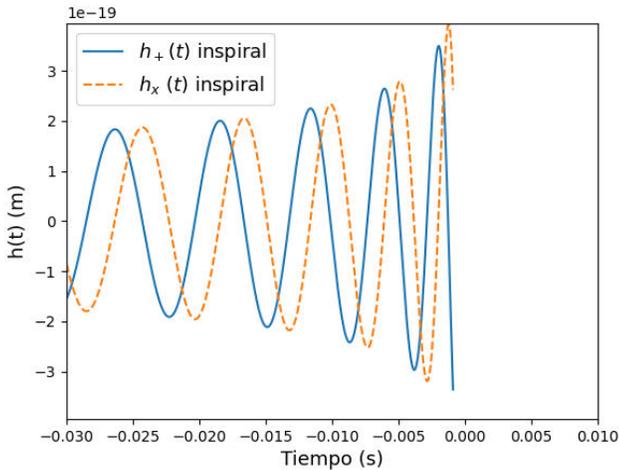


FIGURE 1. Gráfica de ambas polarizaciones de una señal de OG $h(t)$ esperada de una inspiral de objetos compactos de $15 M_\odot$ a una distancia de 2.3 Mpc según las Ecs. (26) y (27).

Tras la fusión de los objetos, continúa la fase de *ring-down*, la cual se describe por oscilaciones con frecuencias complejas conocidas como modos cuasi-normales. Estos provienen de la teoría de perturbaciones pues el espacio-tiempo resultante es una perturbación de uno normal. Son como los modos normales pero complejos, así que describen oscilaciones amortiguadas [18].

3. Detección y análisis de datos

La detección de OG se realiza con un detector basada en interferometría laser, actualmente se cuentan con 5 detectores que forman una red global, y la futura incorporación de LISA en órbita alrededor del Sol. Estos son: LIGO Livingston (Livingston, Louisiana); LIGO Hanford (Hanford, Washington); Kagra (Bajo tierra en Japón); Virgo (Pisa, Italia); y GEO600 (Hanover, Alemania) [19], aunque los tres últimos son menos sensibles. La Fig. 2 muestra un esquema de los detectores LIGO basados en interferometría.

3.1. Estimación de parámetros y filtrado

La detección de estas señales es un proceso que comienza con las señales en crudo obtenidas por el detector, continúa con procesos de filtrado y termina con la extracción de la señal, y reconstrucción de los parámetros que constituyeron el evento. Este proceso se debe a que la señal está oculta en un ruido mucho mayor.

La perturbación tensorial $\bar{h}_{\mu\nu}$ está relacionada con la señal de OG recibida $h(t)$ por medio de $h(t) = D^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu}(t)$, donde \mathbf{D} es un tensor constante que caracteriza a cada detector según su geometría [20]. Más precisamente, cada polarización contribuye pesada por una de las funciones patrón del detector F que dependen de la dirección de la onda (θ, ϕ) :

$$h(t) = h_+(t)F_+(\theta, \phi) + h_\times(t)F_\times(\theta, \phi). \quad (28)$$

Las formas de $F_+(\theta, \phi)$ y $F_\times(\theta, \phi)$ son conocidas en un detector y se muestran a continuación, sin embargo, al medir una señal de OG $h(t)$ se tienen 4 incógnitas $(h_+(t), h_\times(t), \theta, \phi)$ por lo que no se puede conocer la ubicación de origen (θ, ϕ) . Con tres detectores sí es posible determinar cada cantidad, pues se mide $h_1(t), h_2(t), h_3(t)$ y los retrasos en la llegada de la señal [20].

$$F_+(\theta, \phi) = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) \cos 2\phi, \quad (29)$$

$$F_\times(\theta, \phi) = \cos \theta \sin 2\phi. \quad (30)$$

La salida del detector es una serie de tiempo, es decir, una señal escalar muestreada en el tiempo. Existen contribuciones al ruido de diversas fuentes consideradas en $n(t)$. La serie de tiempo producto del detector es una cantidad adimensional conocida como *strain*, $s(t)$, esta tiene la forma:

$$s(t) = n(t) \quad \text{señal de OG ausente,}$$

$$s(t) = n(t) + h(t) \quad \text{señal de OG presente.}$$

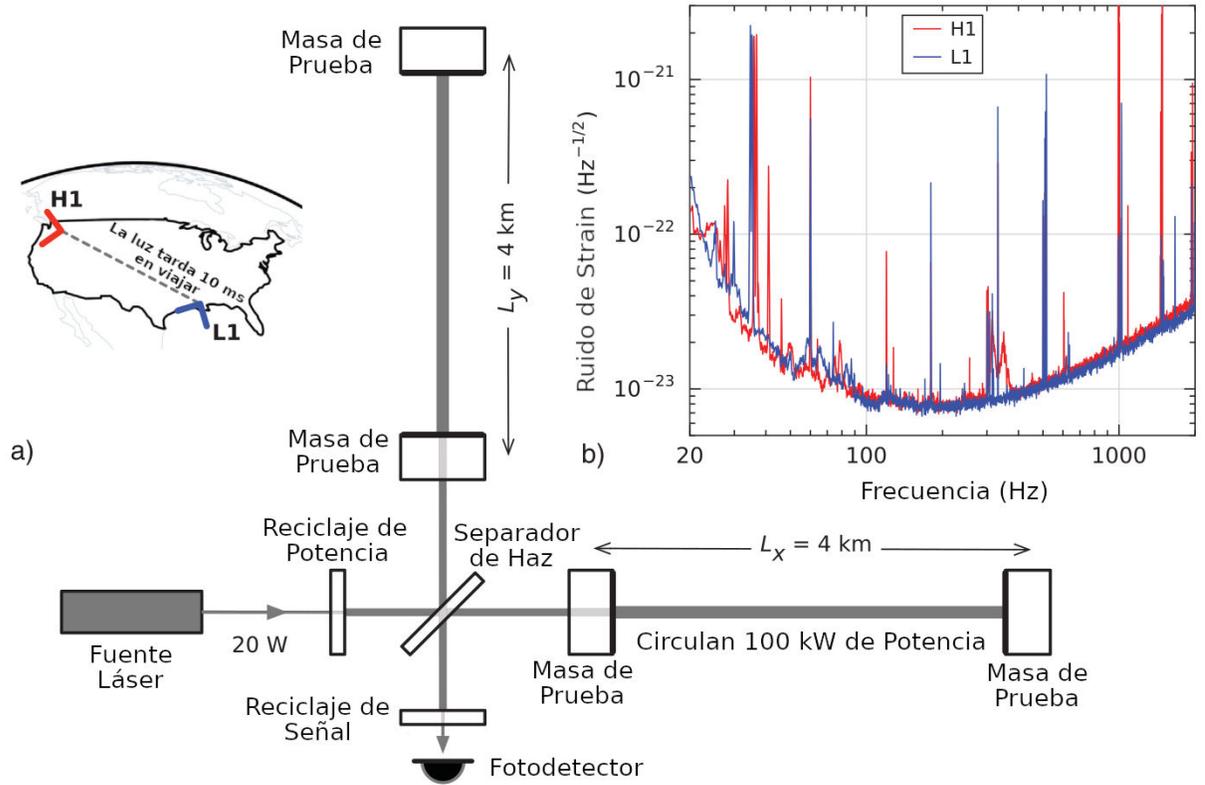


FIGURE 2. Diagrama del interferómetro de un detector de LIGO. Al pasar una onda gravitacional de forma perpendicular al detector un brazo se estiraría y el otro se contraería alternando cada medio ciclo de onda. En a) se muestra la ubicación y orientación de los detectores LIGO Hanford (H1) y Livingston (L1). Aunque no pueden distinguir por sí solos entre las polarizaciones (lo cual es posible con tres o más detectores), la orientación de ambos detectores permite conocer un anillo en el cielo de donde puede provenir la OG. En b) se muestran las contribuciones al ruido de cada detector a distintas frecuencias. Esta figura fue traducida del artículo de la detección de GW150914 [21].

Distinguir entre los dos casos con cierta certeza es posible por medio de la estadística bayesiana. El teorema de Bayes estima la probabilidad $\mathcal{P}(\mathcal{B}|\mathcal{A})$ de que un evento \mathcal{B} sea cierto dado que otro evento \mathcal{A} lo es (*posterior probability*), de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\mathcal{P}(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = \frac{\mathcal{P}(\mathcal{B})\mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})}{\mathcal{P}(\mathcal{A})}, \quad (31)$$

donde $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ es la probabilidad de que \mathcal{B} sea cierta antes de la evidencia (*prior probability*), $\mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ es la probabilidad de que \mathcal{A} sea cierto dado que \mathcal{B} lo es (*likelihood*), y $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ se conoce como evidencia. En el análisis de datos de OG normalmente se hace referencia a la siguiente forma del teorema:

$$\mathcal{P}(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = \frac{\Lambda(\mathcal{B}|\mathcal{A})}{\Lambda(\mathcal{B}|\mathcal{A}) + \mathcal{P}(\neg\mathcal{B})/\mathcal{P}(\mathcal{B})}, \quad (32)$$

donde $\Lambda(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = \mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})/\mathcal{P}(\mathcal{A}|\neg\mathcal{B})$ se conoce como razón de verosimilitud (*likelihood ratio*). Estas probabilidades son de importancia al realizar la estimación de parámetros para eventos de OG. Usualmente el evento \mathcal{B} es la ausencia o presencia de señal de OG, y \mathcal{A} es el *strain* observado.

Para encontrar la señal de OG es necesario caracterizar el ruido del detector. Se asume que las propiedades estadísticas del ruido no cambian con el tiempo (ruido estacionario), y,

sin perder generalidad, que su promedio $\langle n(t) \rangle$ es cero. La varianza está dada por:

$$\langle n^2(t) \rangle = \int_0^\infty S_n(f) df, \quad (33)$$

donde la función $S_n(f)$ es la densidad espectral de potencia (PSD, por sus siglas en inglés). La PSD cuantifica cómo la potencia de una señal (en este caso ruido) se distribuye en función de la frecuencia. Su raíz cuadrada, conocida como densidad espectral de amplitud (ASD) también ayuda en la caracterización. Si $S_n(f)$ es independiente de la frecuencia se conoce como ruido blanco.

Uno de los primeros pasos para analizar datos de OG es llevar a cabo el blanqueo (*whitening*) de la señal. El ruido del detector no es blanco puesto que a frecuencias bajas dominan las vibraciones sísmicas y en las altas el ruido cuántico. El blanqueo se realiza dividiendo la transformada de Fourier del *strain*, $s(f)$, por la ASD (Amplitude Spectral Density) $S_n(f)$, como se muestra a continuación:

$$s_{\text{blanqueada}}(f) = \frac{s(f)}{\sqrt{S_n(f)}}, \quad (34)$$

este proceso busca normalizar la contribución del ruido en cada frecuencia de forma que la señal sea aproximadamente

blanca, excepto por la OG. Posteriormente, se regresa al dominio temporal aplicando la transformada inversa de Fourier.

Dado un modelo para el ruido $n(t)$ y el tipo de señal de OG esperada se calcula la razón señal a ruido (SNR) óptima por medio del filtro adaptado $K(f)$ (*matched filter*). Este filtro se adapta a los datos para maximizar su SNR. Asumiendo que el ruido es gaussiano (sigue una distribución gaussiana), es posible demostrar que el filtro que maximiza la detección es:

$$K(f) = C \frac{h(f)}{S_n(f)}, \quad (35)$$

donde C es una constante arbitraria y $h(f)$ es la señal que se espera encontrar como función de la frecuencia. La razón señal a ruido, que es independiente de la constante y cuantifica la seguridad de la detección, queda determinada por:

$$|SNR|^2 = 4 \int_0^\infty \frac{|h(f)|^2}{S_n(f)} df. \quad (36)$$

Esta es una herramienta recurrente para señales que no se encuentran de forma simple tras el blanqueo. Sin embargo, para llevarlo a cabo de manera precisa es necesario contar con un banco muy amplio de plantillas de onda para poder comparar y encontrar la que mejor se ajuste a los datos. En los análisis hechos por los investigadores de LIGO se llegan a utilizar catálogos que pueden tener unas 250,000 plantillas con el fin de encontrar la que mejor se ajuste al evento estudiado.

4. El evento GW150914

El 14 de septiembre del 2015 los detectores de LIGO Hanford y Livingston recibieron la primera señal compatible con la onda gravitacional de una fusión de agujeros negros de acuerdo a las simulaciones de la relatividad numérica [21]. Ahora, se pasa al análisis de esta señal. Para esto se usa la paquetería *PyCBC* en *Python* [22]. Es posible realizar esto en plataformas en línea como Google Colab, o bien se puede optar por instalar la paquetería localmente. Los detalles de como realizar la instalación local se encuentran al final en un apéndice.

4.1. Visualización de la señal

En primer lugar, se busca visualizar una señal de OG por coalescencia de objetos compactos. Este no es un paso necesario del análisis, sin embargo, para utilizar el filtro adaptado es necesario conocer las plantillas. Para generar las polarizaciones h_+ y h_\times se usa un modelo conocido como “SEOBNRv4_opt” el cual proviene de simulaciones de la relatividad numérica. A este modelo se le proporcionan las masas (*mass1* y *mass2*), el tiempo de muestreo (*delta_t*), y la frecuencia menor, que dicta donde comienza la onda gravitacional (*f_lower*). La Fig. 3 presenta la gráfica de esta plantilla, donde el código de esta figura es escrito a continuación:

```
from pycbc.waveform import get_td_waveform
import matplotlib.pyplot as plt
h_mas, h_cruz = get_td_waveform(approximant="
    SEOBNRv4_opt", mass1=15, mass2=15, delta_t
    =1.0/4096, f_lower = 30)
plt.plot(h_mas.sample_times, h_mas, label=r'$h_+(t)$')
plt.plot(h_cruz.sample_times, h_cruz, label=r'$h_\times(t)$')
plt.xlabel('Tiempo_(s)'); plt.ylabel('h(t)'); plt.
    xlim(-.03, .03); plt.legend()
```

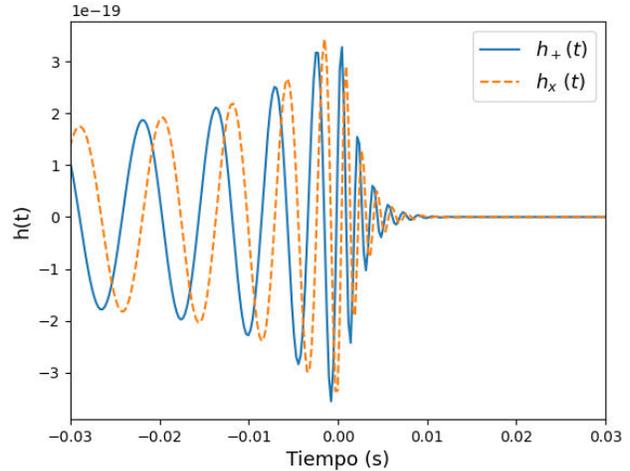


FIGURE 3. Gráfica de ambas polarizaciones de una señal de onda gravitacional $h(t)$ esperada de una coalescencia de objetos compactos de $15 M_\odot$ con el modelo SEOBNRv4_opt.

Es esperado encontrar en el *strain* del detector una señal como la que se muestra en la Fig. 3, con masas todavía desconocidas. Su código respectivo se muestra a continuación:

```
from pycbc import catalog
Evento = catalog.Merger("GW150914")
Strain_H1 = Evento.strain("H1") #H1 para Hanford
Strain_L1 = Evento.strain("L1") #L1 para Livingston
#Grafica del strain en cada detector
plt.plot(Strain_H1.sample_times, Strain_H1, label="
    H1")
plt.plot(Strain_L1.sample_times, Strain_L1, label="
    L1")
plt.ylabel('Strain'); plt.xlabel('Tiempo_(s)');
    plt.legend()
```

La Fig. 4 muestra este *strain* obtenido en crudo de los detectores Hanford y Livingston.

Ahora, se calcula el PSD (Power Spectral Density) de la señal del detector con el propósito de compararla antes y después de realizar el blanqueo. Normalmente, para caracterizar el ruido del detector se realiza este análisis en un periodo donde se conoce que no hay una OG, sin embargo, aquí se hace para ilustrar el proceso de blanqueo. Las Fig. 5 y 6 presentan esta comparativa. Su código respectivo a continuación:

```

H1_PSD = Strain_H1.psd(4)
L1_PSD = Strain_L1.psd(4)
plt.loglog(H1_PSD.sample_frequencies, H1_PSD, label=
"PSD_de_H1")
plt.loglog(L1_PSD.sample_frequencies, L1_PSD, label=
"PSD_de_L1")
plt.xlabel("Frecuencia_(Hz)"); plt.ylabel("PSD_(1/
Hz)"); plt.legend(); plt.xlim(10, 2048)
#Ahora se realiza el blanqueo
Strain_Blanco_H1 = Strain_H1.whiten(4,4)
Strain_Blanco_L1 = Strain_L1.whiten(4,4)
#Graficamos el PSD del strain blanqueado para
comparar
PSD_Blanco_H1 = Strain_Blanco_H1.psd(4)
PSD_Blanco_L1 = Strain_Blanco_L1.psd(4)
plt.figure()
plt.loglog(H1_PSD.sample_frequencies, PSD_Blanco_H1
, label="PSD_de_H1_blanqueado")
plt.loglog(L1_PSD.sample_frequencies, PSD_Blanco_L1
, label="PSD_de_L1_blanqueado")
plt.xlabel("Frecuencia_(Hz)"); plt.ylabel("PSD_(1/
Hz)"); plt.legend(); plt.xlim(10, 2048)

```

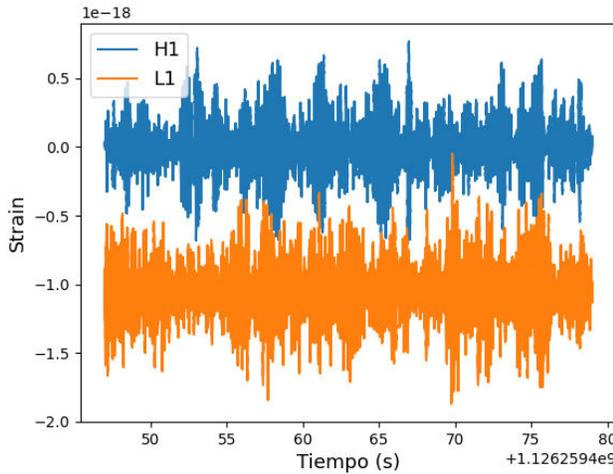


FIGURE 4. Gráfica del *strain* de los detectores Hanford (H1) y Livingston (L1) en tiempo GPS alrededor del evento GW150914.

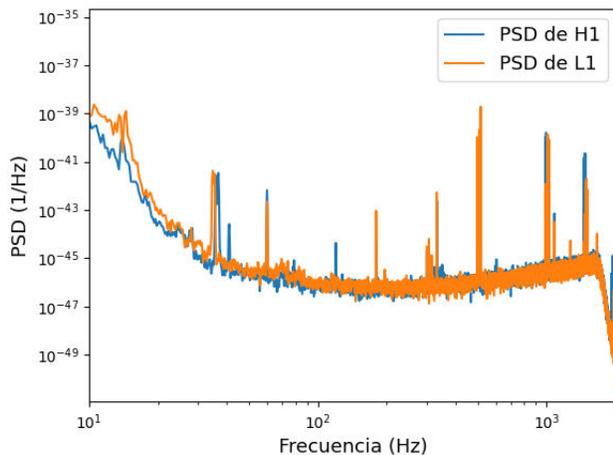


FIGURE 5. Gráfica de la PSD del producto de ambos detectores. Algunas de las contribuciones visibles en frecuencias como 60 Hz, 150 Hz, y 500 Hz, provienen de la línea eléctrica, ruido cuántico del láser, y vibraciones de la fibra que sostiene los espejos, respectivamente.

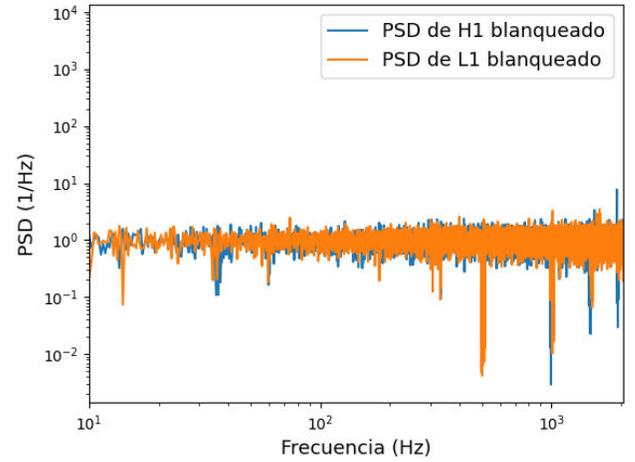


FIGURE 6. Gráfica de la PSD del producto de ambos detectores tras realizar el blanqueo. Este proceso hace la contribución más uniforme en cada frecuencia.

Como fue mencionado en la Sec. 2.2, la señal de OG está compuesta por una frecuencia que evoluciona en el tiempo y alcanza su máximo junto con la señal. Para objetos con masas del orden de $15 M_{\odot}$ de acuerdo con la Ec. (24) se espera que la frecuencia comience alrededor de 30 Hz al llegar la señal. Por este motivo, se aplica un filtro pasa altas (*highpass*) y un filtro pasa bajas (*lowpass*) para eliminar las frecuencias fuera del rango deseado. Su respectivo código es presentado a continuación:

```

# Se eliminan frecuencias debajo de 30 Hz y arriba
de 250 Hz
Strain_Blanco_H1 = Strain_Blanco_H1.highpass_fir
(30, 512).lowpass_fir(250, 512)
Strain_Blanco_L1 = Strain_Blanco_L1.highpass_fir
(30, 512).lowpass_fir(250, 512)

```

El atributo `Evento.time` de la variable `Evento` contiene el tiempo en segundos del sistema GPS (medidos desde el 6 de enero de 1980) en que la OG habría alcanzado el centro de la Tierra. Con el método `time.slice()` es posible acercarse a la señal alrededor de este tiempo. La Fig. 7 presenta este acercamiento. El código se muestra a continuación.

```

Tiempo = Evento.time
ZoomH1 = Strain_Blanco_H1.time_slice(Tiempo -
0.08, Tiempo + 0.05)
ZoomL1 = Strain_Blanco_L1.time_slice(Tiempo -
0.08, Tiempo + 0.05)
plt.plot(ZoomH1.sample_times, ZoomH1, label="H1_
blanqueado_filtrado")
plt.plot(ZoomL1.sample_times, ZoomL1, label="L1_
blanqueado_filtrado")
plt.xlabel("Tiempo_(s)"); plt.ylabel("Strain");
plt.legend()

```

4.2. Estimación de parámetros

En esta sección, se busca estimar las masas de los objetos del sistema binario cuya coalescencia produjo el *strain* observa-

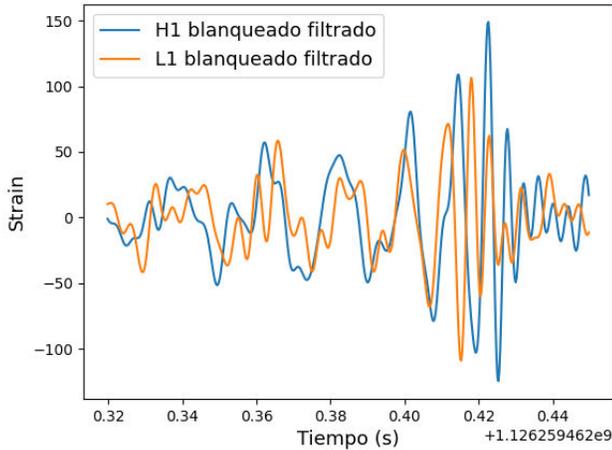


FIGURE 7. Gráfica del *strain* de ambos detectores tras realizar el filtrado y blanqueo, se hace un acercamiento alrededor del evento.

do por los detectores. Para esto se utiliza la técnica de *match filtering*, que, como ya se vio en la Sec. 3.1, produce la razón señal a ruido óptima dada una plantilla de OG y asumiendo que el detector consta de ruido gaussiano. En realidad, el ruido no es completamente gaussiano, y se usan una serie de técnicas adicionales. Además, es común que la estimación de parámetros se realice por medio de estadística bayesiana, pero en este caso usamos solo el filtro adaptado.

Como se vio anteriormente, la plantilla de OG requiere como argumento de entrada las masas de cada objeto. Esto significa que, dado un par de masas, es posible calcular la razón señal a ruido entre la plantilla correspondiente y el *strain* que se tiene. Por lo que la estrategia para estimar estos parámetros será realizar este proceso para muchos valores de las masas y elegir la combinación con mayor SNR.

En lugar de probar todas las combinaciones de dos masas posibles, en este trabajo se opta por calcular las masas individuales en términos de la *chirp mass* y la razón entre ambas masas, y luego variar estas cantidades. De esta forma, usando la Ec. (23) las masas son:

$$m_1 = q m_2, \quad (37)$$

$$m_2 = \mathcal{M} \left(\frac{1+q}{q^3} \right)^{1/5}, \quad (38)$$

donde q es la razón entre masas m_1/m_2 . En el código a continuación, se calcula el SNR para todas las combinaciones de $q \in [0.5, 3]$ con $\mathcal{M} \in [12, 37] M_\odot$ y se encuentra la combinación que mejor se ajusta al *strain*. Para empezar, se vuelve a cargar el *strain* del detector H1 y se usa el filtro pasa altas:

```
from pycbc import catalog
from pycbc.filter import resample_to_delta_t
import matplotlib.pyplot as plt
Evento = catalog.Merger("GW150914")
#Para esta búsqueda usaremos solo datos de Hanford
Strain_H1 = Evento.strain("H1")
Strain_H1 = Strain_H1.highpass_fir(15, 512)
# Se rebaja la tasa de muestreo a la mitad pues no
# es importante capturar el comportamiento a
```

```
muy altas frecuencias, además acorta los datos
Strain_H1 = resample_to_delta_t(Strain_H1,
1.0/2048)
# Todo lo anterior introdujo artefactos anormales
# en los extremos del strain (Grafiquelo y vealo
# ). Por lo que se recortan dos segundos de cada
# lado para eliminarlos
Strain_H1 = Strain_H1.crop(2, 2)
```

En el código a continuación, se condiciona la PSD para que funcione como filtro según la Ec. (35).

```
from pycbc.psd import interpolate,
inverse_spectrum_truncation
PSD = Strain_H1.psd(4)
# Le damos a PSD el largo correcto
PSD = interpolate(PSD, Strain_H1.delta_f)
# Esta cantidad ya puede usarse para el filtro
# adaptado:
PSD = inverse_spectrum_truncation(PSD, int(4 *
Strain_H1.sample_rate),
low_frequency_cutoff=15)
```

Luego, se programa una función llamada “Estimador” que toma de entrada posibles valores para q , \mathcal{M} y la distancia, devolviendo la mejor combinación de ellos por medio del SNR.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from pycbc.waveform import get_td_waveform
from pycbc.filter import matched_filter
from tqdm import tqdm # Esto es opcional
def SNR(m1,m2,dist):
    h_mas, h_cruz = get_td_waveform(
        approximant="SEOBNRv4_opt", mass1=m1,
        mass2=m2, delta_t=Strain_H1.delta_t,
        f_lower = 20,distance=dist)
    # Le damos a la plantilla el mismo largo
    # del strain (introduciendo ceros)
    h_mas.resize(len(Strain_H1))
    # Calculamos el SNR con h_mas
    snr = matched_filter(h_mas, Strain_H1, psd
    =PSD, low_frequency_cutoff=20)
    # Los filtros también introducen
    # artefactos que eliminamos recortando
    # la serie de tiempo del SNR
    snr = snr.crop(4 + 4, 4)
    return snr
def Estimador(q,M_chirp,dist):
    SNR_max = {"i":0,"j":0,"k":0,"snr":0}
    # Este bucle varía el valor de q
    for i in tqdm(range(0,len(q))):
        m2 = M_chirp*((1+q[i])/q[i]**3)
        ** (1/5)
        m1 = m2*q[i]
        # Este varía el valor de M_chirp
        for j in range(0,len(M_chirp)):
            # Y este es la distancia
            for k in range(0,len(dist)
            ):
                snr = SNR(m1[j],m2
                [j],dist[k])
            # Guardamos los valores que
            # produjeron el SNR si es que
            # este es el mejor hasta ahora
            if np.abs(snr).max
            () > SNR_max["
            snr"]:
```

```

SNR_max["i"] = i
SNR_max["j"] = j
SNR_max["k"] = k
SNR_max["snr"] =
    np.abs(snr).
    max()
print("La mejor plantilla es:")
print("q=" + str(q[SNR_max["i"]]))
print("M_chirp=" + str(M_chirp[SNR_max["j"]]))
print("D=" + str(dist[SNR_max["k"]]))
print("SNR:" + str(SNR_max["snr"]) )
return

```

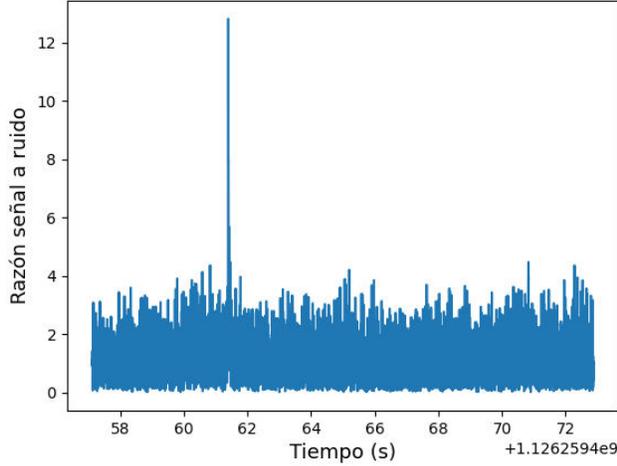


FIGURE 8. Gráfica del valor absoluto de la SNR usando una plantilla con $q = 1$ y $\mathcal{M} = 27$. La SNR es una serie de tiempo al igual que el *strain* pero compleja, por lo que se toma su valor absoluto. El máximo que se observa señala un gran parecido entre la plantilla y el *strain* del detector alrededor de los 62 segundos.

La Fig. 8 presenta un ejemplo del SNR tomando valores arbitrarios cercanos al correcto.

A continuación, se llama a la función `Estimador` con los intervalos de q y \mathcal{M} mencionados anteriormente, además se usa una distancia fija para solo centrarse en la masa.

```

# Habra Num_chirp * Num_q pruebas totales
Num_q = 40; Num_chirp = 100
q = np.linspace(0.5, 3, Num_q)
M_chirp = np.linspace(12, 37, Num_chirp)
Estimador(q, M_chirp, dist = [1])

```

Tras realizar esta búsqueda, el código devuelve que la plantilla mejor adaptada a la señal con $q = 1.01$, $\mathcal{M} = 31.4$, arrojando un $\text{SNR} = 19.15$ en el momento de la coalescencia. Estos valores implican masas $m_1 = 36.4$ y $m_2 = 35.9 M_\odot$. Los valores oficiales reportados por LIGO son de $m_1 = 36 \pm 4$ y $m_2 = 29 \pm 4 M_\odot$, que concuerdan considerando que se utilizaron simplificaciones.

Existen varias formas de aproximar la distancia. En este trabajo se hace la estimación con la misma función `Estimador`, pero normalmente se usa estadística bayesiana. Ahora que se tiene una buena idea del valor de las masas se vuelve a ejecutar la función con un intervalo más restringido $q \in [0.9, 1.1]$, $\mathcal{M} \in [27, 35] M_\odot$ y $D \in [350, 450] \text{ Mpc}$ (en

principio, este intervalo no se conoce pero se elige así para reducir el tiempo de cálculo).

```

# Habra Num_chirp * Num_q * len(D) pruebas totales
Num_q = 10; Num_chirp = 25
q = np.linspace(0.9, 1.1, Num_q)
M_chirp = np.linspace(27, 35, Num_chirp)
D = np.linspace(350, 450, 16)
Estimador(q, M_chirp, dist = D)

```

Finalmente, este código arroja $q = 1.03$, $\mathcal{M} = 31.3 M_\odot$ ($m_1 = 35.4$, $m_2 = 36.6 M_\odot$) y $D = 376.7 \text{ Mpc}$. El valor reportado por LIGO para la distancia es entre 230 y 570 Mpc, centrado en 410 Mpc.

5. Comentarios finales

En este trabajo se ha introducido de forma práctica el análisis de datos de OG partiendo de la teoría y detección de formas de ondas. Comparando las Fig. 1, 3, y 7 es evidente la concordancia entre teoría, simulaciones numéricas y experimento, respectivamente. Esto ha convertido a las OG en evidencia de la Relatividad General. Con respecto a esto, en el futuro los detectores buscarán pequeñas desviaciones que indiquen efectos más allá de la Relatividad General; se buscarán agujeros negros de masa intermedia; se medirá la constante cosmológica por medio de OG y posiblemente se “observen” agujeros negros primordiales. Para continuar adentrándose, se sugiere al lector realizar los ejercicios de programación propuestos en los tutoriales de LIGO [23], así como adentrarse en la estadística bayesiana pues es la herramienta más utilizada en la inferencia de parámetros.

Appendix

A. Instalación local

A continuación se detallan los pasos para trabajar de manera local en caso de optar por no usar una plataforma en la nube como Google Colab. Para llevar a cabo la instalación local en una máquina con el sistema operativo Windows es necesario instalar Linux en un entorno de máquina virtual. Existen muchas máquinas virtuales, aquí nos centramos en la instalación por medio del Windows Subsystem for Linux (WSL). Para comenzar, se abre una terminal Powershell con permisos de administrador y se ejecuta el siguiente comando:

Powershell de Windows.

```
wsl --install
```

Después de terminar el proceso y reiniciar el dispositivo se ejecuta nuevamente el mismo comando para terminar la instalación, se pedirá crear un usuario y contraseña. Una vez instalado, se accederá a esta máquina virtual escribiendo

“wsl” en Powerhell. A continuación, se instala Python en este entorno por medio de los siguientes comandos:

Terminal de WSL.

```
sudo apt update
sudo apt upgrade
sudo apt install python3 python3-
  venv python3-pip
```

Por último, para instalar las librerías de análisis de datos de OG se crea un entorno virtual de Python que será usado con este propósito. Al ejecutar el segundo comando a continuación es importante fijarse en la ubicación donde se crea este entorno (en este caso usamos la ubicación “~”, pero puede usarse otra), será necesario estar en este lugar al activar el entorno en el futuro.

Terminal de WSL.

```
cd ~
python3 -m venv GW
source GW/bin/activate
pip install pycbc ligo-common
pip install notebook
```

Al volver a ingresar a WSL en otra ocasión será necesario ejecutar el tercer comando en el recuadro anterior para activar el entorno, para esto es necesario estar en la misma carpeta donde se ejecutó el segundo comando por primera vez. En caso de no estarlo, es posible cambiar de carpeta con el comando “cd ~”. Al concluir las instalaciones se accede a Python con el comando “jupyter notebook” y copiando el link generado en nuestro navegador.

Acknowledgements

This was supported by the CONACyT Network Project No. 376127 “Sombras, lentes y ondas gravitatorias generadas por objetos compactos astrofísicos”. C.M. thanks PROSNI-UDG.

1. S. Jordan, The Gaia Project: - technique, performance and status, *Astron. Nachr.* **329** (2008) 875, <https://doi.org/10.1002/asna.200811065>
2. D. Jones and A. Balogh, The James Webb Space Telescope, *Space Science Reviews* **121** (2006) 81, <https://doi.org/10.1007/s11214-006-8315-7>
3. D. Collaboration *et al.*, The DESI Experiment Part I: Science, Targeting, and Survey Design (2016), <https://arxiv.org/abs/1611.00036>
4. P. A. R. Ade *et al.*, Improved Constraints on Primordial Gravitational Waves using Planck, WMAP, and BICEP/Keck Observations through the 2018 Observing Season, *Phys. Rev. Lett.* **127** (2021) 151301, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.127.151301>
5. B. A. Benson *et al.*, SPT-3G: a next-generation cosmic microwave background polarization experiment on the South Pole telescope, In W. S. Holland and J. Zmuidzinas, eds., Millimeter, Submillimeter, and Far-Infrared Detectors and Instrumentation for Astronomy VII, *International Society for Optics and Photonics* **9153** (2014) 91531P, <https://doi.org/10.1117/12.2057305>
6. B. P. Abbott *et al.*, GW150914: The Advanced LIGO Detectors in the Era of First Discoveries, *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) 131103, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.131103>
7. F. Acernese *et al.*, Advanced Virgo: a second-generation interferometric gravitational wave detector, *Class. Quant. Grav.* **32** (2015) 024001, <https://doi.org/10.1088/0264-9381/32/2/024001>
8. Y. Aso *et al.*, Interferometer design of the KAGRA gravitational wave detector, *Phys. Rev. D* **88** (2013) 043007, <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.88.043007>
9. O. Dreyer *et al.*, Black-hole spectroscopy: testing general relativity through gravitational-wave observations, *Class. Quantum Grav.* **21** (2004) 787, <https://doi.org/10.1088/0264-9381/21/4/003>
10. G. Agazie *et al.*, The NANOGrav 15 yr Data Set: Evidence for a Gravitational-wave Background, *Astrophys. J. Lett.* **951** (2023) L8, <https://doi.org/10.3847/2041-8213/acdac6>
11. A. G. Abac *et al.*, Observation of Gravitational Waves from the Coalescence of a 2.5-4.5 M Compact Object and a Neutron Star, *Astrophys. J. Lett.* **970** (2024) L34, <https://doi.org/10.3847/2041-8213/ad5beb>
12. T. Robson, N. J. Cornish, and C. Liu, The construction and use of LISA sensitivity curves, *Class. Quantum*

- Grav.* **36** (2019) 105011, <https://doi.org/10.1088/1361-6382/ab1101>
13. S. Hild *et al.*, Sensitivity Studies for Third-Generation Gravitational Wave Observatories, *Class. Quant. Grav.* **28** (2011) 094013, <https://doi.org/10.1088/0264-9381/28/9/094013>
 14. J. D. E. Creighton and W. G. Anderson, Gravitational-Wave Physics and Astronomy: An Introduction to Theory, Experiment and Data Analysis (John Wiley & Sons, Ltd, 2011), <https://doi.org/10.1002/9783527636037>.
 15. C. Moreno *et al.*, Introducción a las ondas gravitacionales, *Lat. Am. J. Phys. Educ.* **2** (2008) 311.
 16. J. M. Antelis and C. Moreno, Obtaining gravitational waves from inspiral binary systems using LIGO data, *Eur. Phys. J. Plus* **132** (2017) 10, <https://doi.org/10.1140/epjp/i2017-11283-5>
 17. B. P. Abbott *et al.*, The basic physics of the binary black hole merger GW150914, *Ann. Phys.* **529** (2017) 1600209, <https://doi.org/10.1002/andp.201600209>.
 18. K. D. Kokkotas and B. G. Schmidt, Quasi-Normal Modes of Stars and Black Holes, *Living Reviews in Relativity* **2** (1999) 2, <https://doi.org/10.12942/lrr-1999-2>.
 19. G. Woan *et al.*, The GEO 600 gravitational wave detector - Pulsar prospects, *ASP Conf. Ser.* **302** (2003) 351
 20. M. Maggiore, Gravitational Waves: Volume 1: Theory and Experiments (Oxford University Press, 2007), <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198570745.001.0001>.
 21. B. P. Abbott, *et al.*, Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger, *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) 061102, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102>.
 22. P. developers, PyCBC: Gravitational Wave Data Analysis (2020), <https://pycbc.org>
 23. L. S. Collaboration, Gravitational Wave Data Analysis Tutorial, <https://gwosc.org/tutorials/>
 24. A. Einstein, Approximative Integration of the Field Equations of Gravitation, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* **1916** (1916) 688
 25. J. Aasi *et al.*, Advanced LIGO, *Class. Quant. Grav.* **32** (2015) 074001, <https://doi.org/10.1088/0264-9381/32/7/074001>
 26. J. Cornelison *et al.*, Improved polarization calibration of the BICEP3 CMB polarimeter at the South Pole, In J. Zmuidzinas and J.-R. Gao, eds., Millimeter, Submillimeter, and Far-Infrared Detectors and Instrumentation for Astronomy XI, vol. **12190**, International Society for Optics and Photonics (SPIE, 2022) p. 121901X, <https://doi.org/10.1117/12.2620212>
 27. A. G. Adame *et al.*, DESI 2024 VII: Cosmological Constraints from the Full-Shape Modeling of Clustering Measurements (2024), <https://doi.org/10.48550/arXiv.2411.12022>.
 28. A. Coerver *et al.*, Measurement and Modeling of Polarized Atmosphere at the South Pole with SPT-3G, *Astrophys. J.* **982** (2025) 15, <https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ada35d>