

Una introducción al cálculo fraccional con aplicaciones en la física

P. Oliva-Sánchez, R. Aguilar-Marquez, J. A. Pérez-Garza, A. Maldonado-Traconis, and S. López-Aguayo

*Tecnológico de Monterrey, Escuela de Ingeniería y Ciencias,
Av. Eugenio Garza Sada 2501, Monterrey, N.L. 64849, Mexico.*

Received 28 January 2025; accepted 22 February 2025

Este trabajo ofrece una introducción a los conceptos fundamentales del cálculo fraccional, destacando las definiciones más utilizadas de la derivada fraccional y poniendo énfasis en sus propiedades y aplicaciones. En particular, se analiza la derivada fraccional de Fourier, subrayando su relativa simplicidad para la implementación numérica, y se presentan códigos en Matlab y Python basados en métodos espectrales para su cálculo. Además, se exploran aplicaciones clave de las derivadas fraccionales en física, como su uso en haces ópticos, estructuras viscoelásticas, mecánica cuántica y el oscilador armónico fraccional. Como complemento, se introducen los fundamentos de la función de Mittag-Leffler, ampliamente utilizada en el cálculo fraccional. Finalmente, se discuten posibles aplicaciones futuras del cálculo fraccional, destacando su relevancia en diversas áreas de la física.

Descriptores: Cálculo fraccional; métodos numéricos.

This work offers an introduction to the fundamental concepts of fractional calculus, highlighting the most commonly used definitions of the fractional derivative and emphasizing its properties and applications. In particular, the fractional Fourier derivative is analyzed, underscoring its relative simplicity for numerical implementation, and Matlab and Python code based on spectral methods for its calculation is presented. Furthermore, key applications of fractional derivatives in physics are explored, such as their use in optical beams, viscoelastic structures, quantum mechanics, and the fractional harmonic oscillator. As a complement, the fundamentals of the Mittag-Leffler function, widely used in fractional calculus, are introduced. Finally, potential future applications of fractional calculus are discussed, highlighting its relevance in various areas of physics.

Keywords: Fractional calculus; numerical methods.

DOI: <https://doi.org/10.31349/RevMexFis.23.010211>

1. Historia del cálculo fraccional

El cálculo infinitesimal, más coloquialmente conocido simplemente como “cálculo”, es una rama de las matemáticas que estudia el cambio tomando en cuenta variaciones infinitesimales, por lo que tiene gran aplicación en la modelación de la evolución continua de diversos sistemas en ciencia y tecnología. Un concepto clave dentro del cálculo es la definición de la derivada, que modela la razón de cambio instantánea de una función según se modifique una variable independiente. Esta idea fue formalizada por Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz a finales del siglo XVII, dando lugar al desarrollo del análisis matemático [1]. Al aplicar de forma recurrente este concepto de derivada sobre una misma función, es posible calcular la derivada de la derivada, obteniendo así la segunda derivada. Repitiendo este proceso n veces, se puede determinar así la derivada de orden n .

Sin embargo, al pensar de una manera no tan ortodoxa, surge el cuestionamiento: ¿el n -ésimo orden puede ser un número no entero? De esta pregunta, que en un principio podría parecer incluso carente de sentido, nace el cálculo fraccional, el cual permite operar con derivadas e integrales de orden no entero. La idea de derivadas fraccionarias fue planteada por L'Hôpital en 1695 cuando envió una carta a Leibniz planteando la cuestión del significado de una derivada de orden fraccional, específicamente preguntando sobre la deri-

vada de orden 1/2. La respuesta de Leibniz, ahora altamente citada en múltiples introducciones al cálculo fraccional, fue tanto intuitiva como visionaria: “y esto es una paradoja aparente que permitirá en el futuro extraer consecuencias muy útiles” [2]. Respuesta a la que el tiempo ha dado y sigue dando la razón. Ya que actualmente, el cálculo fraccional ha generado muchos resultados de gran interés para la ciencia y la tecnología.

La rama del cálculo fraccional no se desarrolló plenamente hasta el siglo XIX, cuando matemáticos como Joseph Fourier, Bernhard Riemann y Joseph Liouville comenzaron a formalizar estas ideas [3]. El pionero en estudiar formalmente este campo fue Joseph Liouville, quien en su “Mémoire sur questions de Géométrie et de Mécanique, et sur un nouveau genre de Calcul pour résoudre ces Questions” proporciona una expresión para la integral fraccionaria de una función, mostrando la relación entre la derivada fraccional y una integral definida [3]. Posteriormente, Bernhard Riemann, en su época de estudiante e inspirado por el trabajo de Liouville, propuso una expresión para la derivada fraccionaria que hoy conocemos como la derivada fraccional de Riemann-Liouville [1].

A partir de este desarrollo teórico, el cálculo fraccional comenzó a encontrar aplicaciones prácticas en diversas disciplinas. Una de las primeras aplicaciones del cálculo fraccional en la física la realizó Niels Henrik Abel en 1823 para

resolver el problema de la tautócrona o curva isócrona, que consiste en encontrar cuál es la curva, sobre la cual un objeto se deslizará hasta el punto más bajo en el mismo tiempo, siendo esto independientemente del punto de partida. Abel formuló una ecuación integral que requería una operación similar a la integración fraccional de orden $1/2$, mostrando así una aplicación concreta del cálculo fraccional en problemas físicos. Su enfoque fue considerado revolucionario y, como tal, generó polémica, pues implicaba que una derivada fraccional aplicada a una constante no siempre resulta en cero, lo cual fue un amplio motivo de desacuerdo con diversos miembros de la comunidad matemática de esa época [4].

Otro aporte interesante provino del ingeniero y matemático autodidacta Oliver Heaviside, quien en el siglo XIX desarrolló métodos poco convencionales para resolver ecuaciones diferenciales en circuitos eléctricos. Heaviside aplicó el cálculo fraccional utilizando el operador $D^{1/2}$ como si fuera un número real, simplificando la resolución de ciertos problemas, aunque sus métodos carecían del rigor formal. En una de sus propuestas trató la derivada fraccional de una constante como $1/\sqrt{\pi t}$, lo que generó críticas debido a la falta de justificación formal. Sin embargo, sus métodos fueron tan efectivos que serían validados matemáticamente años después, cuando el cálculo fraccional fue formalizado [4].

A lo largo del siglo XX, el cálculo fraccional experimentó un notable avance gracias a la introducción de nuevas definiciones. Entre ellas, destaca la derivada de Caputo, introducida por Michele Caputo en 1967 en “Elasticità e Dissipazione” [5], que se convirtió en una herramienta importante en física, ya que no requería condiciones iniciales fraccionarias, facilitando así la interpretación física de sus resultados. Más recientemente, en 2015, la derivada de Caputo-Fabrizio, introducida por Caputo y Fabrizio, llamó la atención de investigadores por las propiedades de su núcleo exponencial no singular, lo cual mejora la modelación de fenómenos con memoria no local y reduce la complejidad computacional [6].

No obstante, y de forma quizás algo sorprendente, una definición que aún no ha sido estudiada en toda su profundidad, o al menos no con la misma atención que otras definiciones de derivadas fraccionarias, es la derivada fraccionaria usando la transformada de Fourier. Lo anterior posiblemente, entre otros motivos, a que el uso de la transformada de Fourier requiere un manejo más complicado en el uso de las definiciones de las condiciones iniciales de los problemas a modelar. Esto en comparación a otro tipo de transformaciones, como la dada por Laplace, en donde, por ejemplo, al calcular la transformada de una derivada de orden n , aparecen de manera explícita las condiciones iniciales. Sin embargo, la transformada de Fourier, desarrollada por Joseph Fourier en el siglo XIX, es actualmente una herramienta fundamental en el análisis de señales e información. Básicamente, esta transformación descompone la información en sus componentes de frecuencia, lo que resulta crucial para el estudio de fenómenos periódicos y la propagación de ondas.

En este contexto, la derivada fraccionaria de Fourier, al basarse en la transformada de Fourier en su definición, per-

En el presente trabajo se presenta la derivada fraccional de Fourier como una alternativa viable y altamente aplicable a diferentes áreas del cálculo fraccional desde una perspectiva física y computacional. En la siguiente Sec. 2, se presentan las definiciones más utilizadas para la derivada fraccional, tales como las de Riemann-Liouville, Caputo, y Grünwald-Letnikov, así como algunos criterios que son tomados en cuenta para definir una derivada fraccionaria. Despues, en la Sec. 3, se profundiza en el uso de Fourier para el cálculo fraccional, mostrando cómo esta definición aprovecha la transformada de Fourier para realizar diferenciación de órdenes arbitrarios. Posteriormente, en la Sec. 4, se describe un algoritmo numérico para calcular derivadas fraccionales.

En la Sec. 5, se discuten algunas de las aplicaciones relevantes de la derivada fraccional en la física, tales como el análisis de materiales viscoelásticos [5.1], la extensión de conceptos en mecánica cuántica [5.2] y el diseño de haces ópticos Hermite-Gauss fraccionarios [5.3]. En la Sec. 6, se introduce el oscilador armónico fraccional, que permite modelar sistemas dinámicos con memoria. Finalmente, se ofrecen como conclusiones algunas posibles aplicaciones del cálculo fraccional. Además, se ofrecen al lector tres apéndices: el primero introduce la función Mittag-Leffler, considerada la “reina” del cálculo fraccional. En el segundo apéndice se definen las propiedades más básicas de la transformada de Laplace, mientras que el tercer apéndice proporciona el link correspondiente para los códigos en Matlab y Python, para realizar cómputo numérico de derivadas fraccionales de funciones localizadas.

2. Definiciones básicas de las derivadas fraccionales

A diferencia de la contraparte para el caso de orden entero, la derivada fraccionaria no posee una definición única. Esta carencia de unicidad puede generar, de manera comprensible, mucha confusión en los estudiantes e investigadores que se introducen al mundo del cálculo fraccional por primera vez. De manera no rigurosa, uno pudiera pensar que estas múltiples definiciones son debidas a que se pueden seleccio-

nar diversos caminos de “interpolación” que coinciden en las definiciones de órdenes enteros. Lo anterior es similar al caso de interpolación entre dos puntos: se puede hacer la interpolación con una línea recta, pero también, con un polinomio de orden 2, orden 3, etc. Usando un poco más de formalismo, podemos decir que existen múltiples definiciones de derivada fraccionaria debido a que este es un operador no local: para su definición, se necesita conocer información de la función no únicamente en su vecindad, sino en una mayor parte del dominio de la función.

En los últimos años, el cálculo fraccionario ha abarcado diferentes aspectos de las ciencias e ingenierías, pues se han propuesto numerosas definiciones para la derivada fraccionaria. Para las definiciones presentadas a continuación, el valor de α representa el orden de la derivada fraccionaria.

Una de las definiciones más utilizadas y aceptadas por la comunidad científica es la derivada de Riemann-Liouville, que involucra la expresión usando una integral, con un límite de integración inferior a y cuya forma está dada por [3]:

$$\begin{aligned} {}_{a^L} D_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \\ &\times \left(\frac{d}{dx} \right)^m \int_a^x (x-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (1) \end{aligned}$$

donde $m \leq \alpha < m+1$, es decir, $m = \lfloor \alpha \rfloor$, o también conocida como función piso.

Como se mencionó en la Ec. (1), otra de las definiciones más relevantes y aceptadas por la comunidad científica de las derivadas fraccionales es la derivada de Caputo, la cual está definida como [5]:

$${}_{a^C} D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, \quad (2)$$

donde esta vez $n-1 < \alpha < n$, es decir, $n = \lceil \alpha \rceil$, o también conocida como la función techo, y $\Gamma(\alpha)$ es la función Gamma.

Es importante notar que en la definición de Riemann-Liouville, primero se realiza una convolución, seguida de una derivada de orden entero. Sin embargo, en la definición de Caputo se comienza primero con el cálculo de una derivada de orden entero, para dar paso seguido al cálculo de la convolución. Por lo que sería natural pensar que ambos operadores

fraccionarios tienen cierta relación entre ellos. En la Ref. [3] se muestra que los cálculos que llevan a cabo los operadores no son comutativos, sin embargo, hay una relación entre ambas derivadas fraccionales que está dada por:

$${}^{RL} D_t^\alpha \left(f(t) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} f^k(0^+) = {}^C D_t^\alpha f(t). \quad (3)$$

Por lo que es importante dejar en claro que las derivadas fraccionales de una función dependen de la definición que se usa y del dominio que se decida emplear de acuerdo con la definición, por ejemplo, si consideramos la función $f(t) = \exp(kt)$, con un dominio que comience en $a = 0$, tenemos como derivada fraccionarial acorde a la definición de Riemann-Liouville:

$${}^{RL} D_t^\alpha (f(t)) = \text{sign}(t)|t|^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(kt), \quad (4)$$

mientras que acorde a la definición de Caputo tenemos:

$${}^C D_t^\alpha (f(t)) = k|t|^{1-\alpha} E_{1,2-\alpha}(kt). \quad (5)$$

Las funciones $E_{m,n}(t)$, conocidas como funciones de Mittag-Leffler, son una generalización de la función exponencial y desempeñan un papel fundamental en el cálculo fraccionario. Su importancia es tal en el cálculo fraccionario, que hemos incluido el Apéndice A para más información sobre esta función “reina” del cálculo fraccionario. Otro ejemplo relevante es la Fig. 1, donde se muestra la derivada fraccionarial de la función $1/(x^2 + 1)$, también conocida como función Lorentziana. En dicho ejemplo, se muestra un dominio de la función más amplio, ya que en estos ejemplos para las definiciones de Caputo y Riemann-Liouville el valor de a se tomó como -5 , además de mostrar la derivada fraccionarial mediante la definición $1/(x^2 + 1)$, que analizaremos más adelante. En este primer ejemplo gráfico, se observa que Fourier produce un comportamiento más simétrico respecto al eje x mientras que Caputo y Riemann-Liouville tienden a ser menos uniformes, especialmente en los extremos de la función. Caputo suaviza más rápidamente los valores extremos conforme α disminuye, mientras que Riemann-Liouville genera valores más amplios en los extremos. En contraste, Fourier

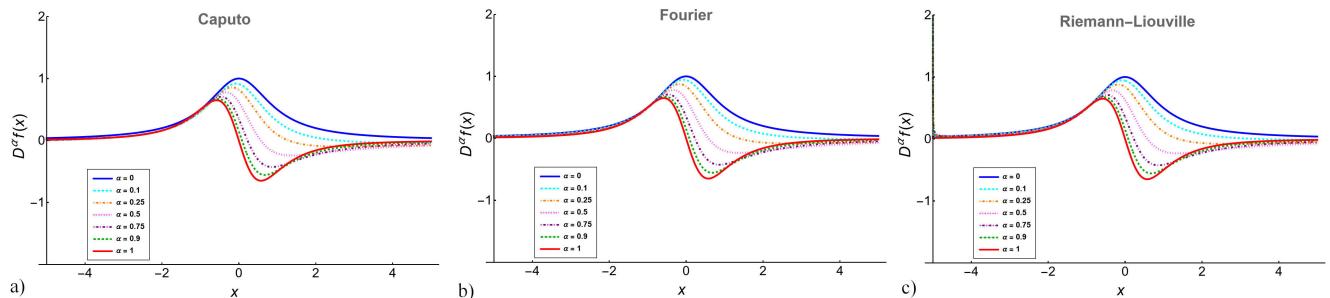


FIGURA 1. Derivada fraccionarial de orden α entre 0 y 1 de la función $f(x) = 1/x^2 + 1$.

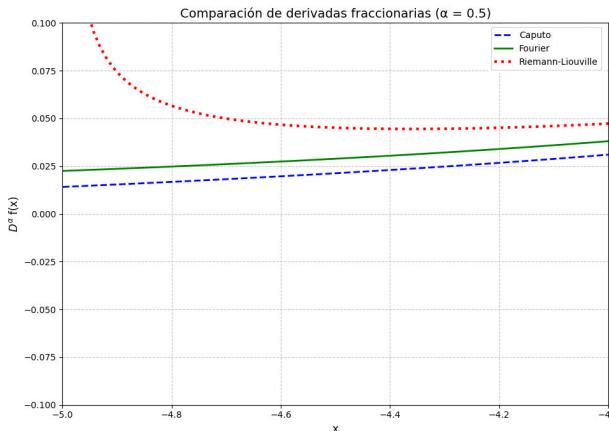


FIGURA 2. Derivada fraccional de orden $\alpha = 0.5$ de la función $f(x) = 1/x^2 + 1$ en el intervalo $[-5, -4]$.

refleja una transición más homogénea, probablemente debido a su relación con sistemas periódicos, haciendo que los cambios en α afecten de manera más uniforme a la función. Sin embargo, a pesar de las discrepancias, las tres definiciones convergen al mismo resultado en los valores de $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$. Aunque la Fig. 1 sugiere que la transición entre los órdenes fraccionarios para las derivadas fraccionarias de Caputo, Fourier y Riemann-Liouville produce resultados similares, es importante destacar que esto no siempre es el caso. En particular, la Fig. 2 revela las diferencias que emergen en los extremos de las derivadas obtenidas con estas distintas definiciones.

Otra definición de derivada fraccional, que es sumamente relevante para el cálculo fraccionario cuando se desea su cálculo numérico o su establecer relaciones con diferencias finitas, es la llamada derivada de Grünwald-Letnikov, propuesta por Anton Grünwald y Aleksey Letnikov de manera independiente. Esta derivada toma la definición de la derivada fraccionaria y la extiende generalizando las operaciones de la misma [13,14] esta derivada tiene la forma:

$$\begin{aligned} {}_a^{GL} D^\alpha f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \\ &\times \sum_{k=0}^{\frac{x-a}{h}} (-1)^k \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{k! \Gamma(\alpha-k+1)} \right) f(x-kh), \end{aligned}$$

Dicha expresión es útil cuando se quiere calcular la derivada fraccionarial en un contexto mucho más numérico.

Otra de las definiciones más recientes utilizadas es la llamada derivada fraccionarial de Caputo-Fabrizio que está dada por:

$${}^{CF} D_x^\alpha f(x) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t f'(\tau) e^{-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}} d\tau, \quad (6)$$

donde $M(\alpha)$ es una función de normalización tal que $M(0) = M(1) = 1$ y $\alpha \in [0, 1]$ [6].

Además de estas definiciones de derivadas fraccionarias, existen muchas más: la derivada fraccionarial de Atangana-Baleanu, la derivada fraccionarial de Riesz y, por supuesto, la

derivada fraccionarial de Fourier. Cada una de estas definiciones puede llegar a producir resultados muy diferentes, lo cual, aunque inicialmente parece desorientador, puede también ser ventajoso, ya que permite a los investigadores seleccionar la definición que mejor se ajuste a sus datos experimentales.

En este trabajo, nos enfocamos con mayor detalle en la derivada fraccionarial de Fourier, que es más natural en el contexto de ondas, y en especial, mostramos su aplicación en óptica; sin embargo, trabajos futuros que usen diferentes métodos de fraccionalización podrían ser de interés para explorar. Es importante mencionar que, dadas las anteriores definiciones de derivadas fraccionales, se ha establecido que todas estas deben cumplir con ciertos criterios básicos de lo que constituye un operador de derivada fraccionarial. En este trabajo, consideraremos los criterios propuestos por Ortigueira y Machado [15] que son los siguientes:

- i) Linealidad: El operador derivada fraccionarial debe satisfacer el criterio de linealidad.
- ii) Identidad: La derivada fraccionarial de orden cero debe devolver la función original.
- iii) Compatibilidad con enteros: Una derivada fraccionarial debe coincidir con la derivada original cuando el orden es un número entero.
- iv) Mantener la ley de los órdenes: Debe satisfacerse que $D^\alpha D^\beta f(t) = D^{\alpha+\beta} f(t)$, para $\alpha, \beta > 0$. Y finalmente.
- v) La regla generalizada de Leibniz:

$$D^\alpha [f(t)g(t)] = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} D^j f(t) D^{\alpha-j} g(t). \quad (7)$$

que básicamente generaliza la regla del producto, dando la n -ésima derivada del producto de dos funciones.

Usando los criterios anteriores, nos gustaría comentar que existe una cierta controversia sobre la validez de la definición utilizada por Caputo y Fabrizio en el mundo del cálculo fraccionario. En la Ref. [16], Ortigueira y Machado muestran que la definición de derivada fraccionarial propuesta por Caputo y Fabrizio no satisface la condición (iv), y también demuestran que dicho operador no se comporta como un operador fraccionarial a través de su transformada de Laplace. Sin embargo, otros investigadores han pasado por alto esta controversia, centrándose en aspectos como la convergencia, su núcleo no singular y su comportamiento dependiente únicamente del orden de la derivada [17]. A nuestro parecer, esto muestra indicios de que, aún hoy en día, el campo de estudio del cálculo fraccionario está aún en su proceso de formalización y estandarización de sus conceptos.

3. La derivada fraccionaria usando Fourier

A inicios del siglo XIX, Joseph Fourier introdujo la idea de mapear funciones en el dominio del espacio o tiempo, al dominio de frecuencias, dando así, nacimiento al concepto de la transformada de Fourier. Dicha transformación tiene la capacidad de generalizar de manera directa la derivada para cualquier orden, introduciendo así la correspondiente derivada fraccionaria. La derivada fraccionaria de Fourier maneja la diferenciación y la integración de orden fraccionario en el dominio de la frecuencia, lo que amplía significativamente el alcance de las aplicaciones de la transformada de Fourier.

La idea de la definición, como se mencionó anteriormente, aprovecha la transformada de Fourier de la derivada de una función a un orden arbitrario. De este modo, es conocido que si la transformada de Fourier para una función $f(x)$ la denotamos como $\mathcal{F}[f(x)] = \hat{f}(k)$, entonces la transformada de Fourier de una derivada está dada por $\mathcal{F}[(d^n/d)x^n f(x)] = (ik)^n \hat{f}(k)$ para $n \in \mathbb{N}_0$ y en donde i representa la unidad imaginaria, definida como $i = \sqrt{-1}$. Al extender esta definición, a los números reales es decir, $n = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, podemos definir la derivada de orden fraccionario como:

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \mathcal{F}^{-1} \left[(ik)^\alpha \hat{f}(k) \right].$$

Al tomar la definición de transformada inversa $\mathcal{F}^{-1}(k)$, tenemos que la derivada de orden fraccionario de Fourier toma entonces la forma:

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (ik)^\alpha \hat{f}(k) e^{ikx} dk, \quad (8)$$

donde la transformada de Fourier en su forma integral está definida como

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (9)$$

La derivada fraccional de Fourier cuenta con diferentes propiedades que son importantes y la vuelven relevante para su estudio y aplicaciones, entre ellas destacan:

Linealidad: Debido a la linealidad que posee la transformada de Fourier, esta definición de derivada fraccionaria es lineal.

Comutatividad y aditividad: Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones, a, b coeficientes cualesquiera y $\alpha, \beta \in [0,1]$. Entonces se tiene:

$$D^\alpha[D^\beta f(x)] = D^\alpha \left[\mathcal{F}^{-1} \left[(ik)^\beta \hat{f}(k) \right] \right].$$

Aplicando nuevamente la definición para la derivada de orden α

$$D^\alpha[D^\beta f(x)] = \mathcal{F}^{-1} \left[(ik)^{\alpha+\beta} \hat{f}(k) \right].$$

Por otro lado, tenemos que la derivada de orden $\alpha + \beta$ tiene la forma

$$D^{\alpha+\beta}[f(x)] = \mathcal{F}^{-1} \left[(ik)^{\alpha+\beta} \hat{f}(k) \right].$$

Por lo que el criterio de aditividad se cumple; del mismo modo, se puede notar que se cumple el criterio de comutatividad de la derivada.

Identidad: Considerando $\beta = -\alpha$ tenemos que:

$$D^\alpha[D^{-\alpha} f(x)] = D^0[f(x)] = f(x).$$

Cuando $\alpha = 0$ el exponente de $(ik)^\alpha = 1$, por lo que en la operación tenemos la transformada de Fourier y la transformada inversa de Fourier, dando como resultado la función original.

Compatibilidad con enteros: Por definición, la derivada fraccionaria de Fourier cuando n es entero coincide con la derivada estándar.

Regla de Leibniz: Esta derivada cumple con la regla generalizada de Leibniz tal y como se muestra en la Ref. [7] en donde se muestra la expresión:

$$\begin{aligned} D^\alpha[f(t)g(t)] &= \frac{i^\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \hat{g}(s) \\ &\times \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{iqx} \hat{f}(q)(s+q)^\alpha \right) ds, \end{aligned}$$

La cual Bagarello describe como una extensión a la regla del producto de Leibniz, sin embargo, en la Ref. [8] se muestra que esta expresión es una forma diferente de escribir dicha regla del producto.

Por lo tanto, podemos ver que la definición de derivada fraccionaria de Fourier cumple con los criterios propuestos por Ortigueira y Machado mencionados en la sección 2. Además de cumplir con el formalismo necesario para ser considerada una derivada fraccionaria, la derivada fraccionaria de Fourier presenta la ventaja de que su cálculo numérico es considerablemente más directo que el de otras definiciones. Esto se debe a la implementación de algoritmos basados en la transformada rápida de Fourier, los cuales se analizan de forma básica en la siguiente sección.

Cabe destacar que la derivada fraccionaria de Fourier posee una estrecha conexión con la derivada fraccionaria de Riesz, una herramienta ampliamente utilizada en el análisis de solitones ópticos en medios no fraccionarios[18,19], y que usualmente está definida a través de su transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}[R_x^\alpha f(x)] = -|k|^\alpha \mathcal{F}[f(x)], \quad (10)$$

Por lo que al usar la transformada de Fourier de una derivada

$$-\infty D_x^\alpha f(x) = \mathcal{F}^{-1} [(ik)^\alpha \mathcal{F}(f(x))], \quad (11)$$

$$_\infty D_x^\alpha f(x) = \mathcal{F}^{-1} [(-ik)^\alpha \mathcal{F}(f(x))], \quad (12)$$

es posible reescribir la derivada de Riesz como se muestra en Ref. [20]

$$\mathcal{F}[R_x^\alpha f(x)] = -\frac{(ik)^\alpha + (-ik)^\alpha}{2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2})} \mathcal{F}[f(x)]. \quad (13)$$

4. Algoritmo numérico para el cálculo de la derivada fraccional de Fourier

Desde un punto de vista numérico, la obtención de la derivada fraccional de Fourier en sí, es un algoritmo relativamente sencillo de programar. Sin embargo, su entendimiento no es del todo directo, ya que es necesario tener presente que se está trabajando en dos espacios numéricos discretos: el espacio físico, dado por x , y el espacio de Fourier, dado por k . Es importante recordar que, desde un punto de vista numérico, tanto el espacio físico como el de Fourier son discretos y finitos. Además, la correspondiente transformada de Fourier se realiza en su versión discreta utilizando la FFT (Fast Fourier Transform). En los siguientes pasos, la descripción de algunos comandos será basada en los dados por Matlab; sin embargo, el algoritmo descrito es fácil y directamente extensible a otros lenguajes de programación. De manera general, el algoritmo para la obtención de derivadas fraccionales utilizando Fourier es el siguiente:

1. Se define la longitud del espacio real (L) y el número de puntos a usar (N). Esto define, de forma automática, el espaciamiento en x , que sería $dx = L/N$, así como el espacio en k , dado por $dk = 2\pi/L$. Esto se debe a la normalización de la periodicidad de las funciones seno y coseno sobre las que trabaja la transformada de Fourier.
2. Se genera el espacio numérico en x mediante la definición de $x = s \cdot dx$, y de manera similar, el espacio k está dado por $k = s \cdot dk$; donde s es un vector numérico definido por $s = -N/2 : 1 : N/2 - 1$. Por ejemplo, si $N = 8$, se tiene que el vector $s = [-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3]$.
3. A continuación, se evalúa numéricamente la función $y(x)$, para posteriormente calcular su correspondiente transformada numérica de Fourier, mediante el uso de la fft. Además, será adecuado usar un re-ordenamiento en los elementos del vector, mediante el uso del comando “fftshift”, para así ser congruentes con nuestra definición previa del espacio numérico en k . Es decir, generamos $\mathcal{F}[y(x)] = \text{fftshift}[\text{fft}(y)]$;
4. Se multiplica la función en el dominio de Fourier, que fue obtenida en el paso anterior, por un vector complejo dado por $(ik)^\alpha$, en donde el coeficiente α es el valor fraccional de la derivada, y además, la operación de exponentiación es realizada elemento por elemento del vector k . Por lo que, obtenemos la derivada fraccional en espacio de Fourier mediante $DF = (ik)^\alpha \mathcal{F}[y(x)]$.

5. Finalmente, hacemos la correspondiente transformación inversa de nuestra derivada para obtener su representación en espacio de x , usando comandos como $df = \text{ifftshift}[\text{ifft}(DF)]$. Al graficar usando $\text{plot}(x, \text{real}(df))$, se obtiene la representación gráfica de la derivada fraccional de orden α usando Fourier. Aunque analíticamente la derivada fraccional debería ser una función real si la señal original lo es, en la práctica, los cálculos numéricos pueden introducir pequeñas componentes imaginarias debido a errores de redondeo y precisión. Cómo anexo en el apéndice C, se proporciona el link a códigos tanto en Matlab como en Python, para que el usuario pueda visualizar la derivada fraccional para diversas funciones bien localizadas, como es el caso de una función Gaussiana.

Es importante remarcar que el algoritmo anteriormente descrito, funciona directamente, sólo para funciones cuyos valores en las fronteras de la ventana tienden a cero. De lo contrario, hay que usar algoritmos más especializados, como por ejemplo, aquellos en donde se usan puntos de interpolación de Chebyshev.

Para motivar a los lectores a explorar los resultados obtenidos con las derivadas fraccionales utilizando la definición de Fourier, hemos puesto a disposición el código correspondiente, tanto en Matlab como en Python, el enlace mostrado en el apéndice C de este trabajo. Además, los autores estarán encantados de compartir los códigos directamente, previa solicitud a través de comunicación por correo electrónico.

5. Algunas aplicaciones en la física de las derivadas fraccionales

A través de los últimos años, la derivada fraccionaria ha demostrado ser una herramienta de alta utilidad en la modelación de diferentes fenómenos físicos. Si bien estamos acostumbrados a pensar que las derivadas modelan la razón de cambio infinitesimal de las funciones, podemos extender esta noción pensando que las derivadas fraccionales modelan el cambio de funciones, pero considerando ahora eventos pasados, en el caso de evolución temporal, o considerando valores muy lejanos del punto de la función en cuestión, en el caso de evolución espacial. En otras palabras, las derivadas fraccionales tienen la capacidad de capturar y modelar la memoria de un sistema, es decir, cómo la influencia de eventos anteriores a los estudiados puede afectar a los resultados y por ende, esto convierte a la derivada fraccionaria en una herramienta ideal para abordar sistemas complejos que poseen características no locales [3,12,21-23]. Por estas razones, las aplicaciones que puede tener son sumamente variadas y amplias en diferentes campos de la física, tales como dinámica [24,25], electrónica [26,27], electrodinámica [22], mecánica cuántica [9-12], óptica [28-30], por mencionar solamente algunos campos [31].

5.1. Análisis de estructuras viscoelásticas

El cálculo fraccional ha mostrado ser especialmente útil en el análisis de materiales viscoelásticos por sus efectos de memoria, lo cual es clave en sistemas donde el comportamiento depende de la historia del esfuerzo y la deformación. Bagley y Torvik en Ref. [32] desarrollaron una formulación de la derivada fraccional para modelar materiales viscoelásticos y construir relaciones tensión-deformación que capturan mejor estas propiedades.

En su formulación, se utiliza la derivada fraccional denotada por D^β de la tensión $\sigma(t)$ y la derivada fraccional D^α de la deformación $\epsilon(t)$ en la ecuación constitutiva:

$$\sigma(t) + bD^\beta[\sigma(t)] = Y_0\epsilon(t) + Y_1D^\alpha[\epsilon(t)], \quad (14)$$

donde los términos Y_0 , Y_1 representan los módulos elásticos y el término b es un parámetro del modelo que captura el efecto viscoelástico. Aquí, la derivada fraccional permite incluir los efectos de memoria y frecuencia dependientes, haciendo que el modelo sea más preciso en la representación del comportamiento viscoelástico del material, especialmente cuando se somete a ciclos de carga complejos.

En el artículo de Bagley y Torvik se muestran diferentes maneras de tratar el operador de derivada fraccional, una de ellas es a través de la transformada de Fourier donde llegan a la siguiente expresión,

$$\mathcal{F}[\sigma(ik)] = \frac{Y_0 + Y_1(ik)^\alpha}{1 + b(ik)^\beta} \mathcal{F}[\epsilon(ik)], \quad (15)$$

donde $\mathcal{F}[\sigma(ik)]$ y $\mathcal{F}[\epsilon(ik)]$ es la transformada de Fourier de la tensión σ y de la deformación ϵ . Este enfoque con cálculo fraccional sugiere que el módulo dependiente de la frecuencia es una función de potencias fraccionarias de la frecuencia [32]. Esto es particularmente beneficioso en la formulación de matrices de rigidez en métodos de elementos finitos: en lugar de los métodos tradicionales que requieren numerosos parámetros empíricos para describir la viscoelasticidad, este modelo fraccional sólo necesita unos pocos parámetros bien definidos, simplificando considerablemente el proceso de cálculo.

En el artículo lograron modelar las propiedades mecánicas de un vidrio Corning a 550°C dopado con óxidos de aluminio, sodio y cobalto en las porciones 7.5 % de Al₂O₃, 3 % de Na₂O, 1 % de Co₂O₃. Con estos resultados, Bagley y Torvik demostraron que, en aplicaciones prácticas, este modelo reduce significativamente la cantidad de trabajo numérico y permite obtener soluciones cerradas para estructuras amortiguadas viscoelásticamente. Estos resultados destacan cómo la derivada fraccional proporciona una forma de modelar estructuras que experimentan cargas dinámicas de manera más precisa y eficiente.

5.2. Derivadas fraccionales en la mecánica cuántica

La mecánica cuántica fraccional ha emergido como una extensión interesante de la mecánica cuántica clásica, ya que

permite modelar sistemas con características no locales y efectos de memoria. Bagarello en Ref. [7] explora las propiedades de la derivada fraccional de Fourier, para posteriormente esta definición definir operadores en un contexto cuántico. A través de la formulación de la derivada fraccional de Fourier, se extiende el operador de momento en mecánica cuántica al operador de momento fraccional,

$$P^\alpha = (-iD)^\alpha. \quad (16)$$

Con este operador fraccional, Bagarello demuestra que es posible analizar sistemas cuánticos con efectos de memoria. Un resultado importante es que este formalismo permite describir partículas que siguen trayectorias tipo vuelo Lévy, que son trayectorias aleatorias caracterizadas por saltos largos y distribuciones de probabilidad anómalas. Este tipo de trayectorias son de gran utilidad para modelar fenómenos de transporte anómalo y procesos de difusión no convencional en mecánica cuántica.

Además, al aplicar operadores fraccionales en el contexto de la mecánica cuántica, Bagarello muestra cómo es posible redefinir las relaciones de incertidumbre en este marco extendido. Los resultados destacan que, en este contexto fraccional, los operadores de posición y momento no necesariamente cumplen con las relaciones de commutación estándar, lo que abre la puerta a nuevos tipos de relaciones de incertidumbre y comportamientos cuánticos únicos. Esta investigación subraya cómo el uso de la derivada fraccional de Fourier puede ampliar la comprensión de sistemas cuánticos con características de no localidad y dependencia histórica.

5.3. Haces ópticos Hermite-Gauss fraccionarios

El uso de la derivada fraccional ha sido también explorado en óptica; por ejemplo, se ha usado para la fraccionalización de haces ópticos de luz estructurada. Es sabido que, partiendo de la ecuación de onda paraxial, es posible demostrar que existen diferentes familias de haces ópticos dependiendo de la simetría del sistema de coordenadas empleado para resolver dicha ecuación. Por ejemplo, al resolver la ecuación paraxial en coordenadas cartesianas, obtenemos los llamados haces de Hermite-Gaussianos.

En el artículo [8], se muestra un estudio realizado a haces ópticos definidos en una dimensión transversal x y una dimensión longitudinal z , resultando en haces que tienen una estructura general del tipo:

$$U(x, z) = AH_n(x/B) \exp(-x^2/C^2), \quad (17)$$

donde, A es una constante de normalización, B y C son parámetros de escalamiento y confinamiento del haz, respectivamente, y $H_n(x)$ representa la función de Hermite.

Aguilar-Márquez *et al.* en Ref. [8] desarrollaron una clase de haces ópticos, los llamados haces Hermite-Gaussianos fraccionarios generalizados (GFHG), que son el resultado de aplicar la derivada fraccional de Fourier. Para construir estos haces, se obtiene la derivada fraccional de Fourier para una

función Gaussiana, e^{-x^2} . Haciendo uso de la derivada fraccionaria de Fourier, los autores construyeron los haces GFHG de la forma:

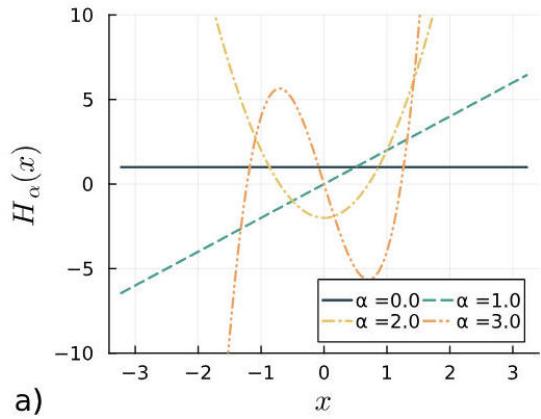
$$HG_\alpha(x; A, B, C) = A \frac{2^\alpha}{\sqrt{\pi}} I_\alpha\left(\frac{x}{B}\right) e^{-\frac{x^2}{C^2}}, \quad (18)$$

con A una constante de normalización, $I_\alpha(x)$ una función de Hermite fraccionaria generalizada que incorpora el orden fraccionario α , tal que:

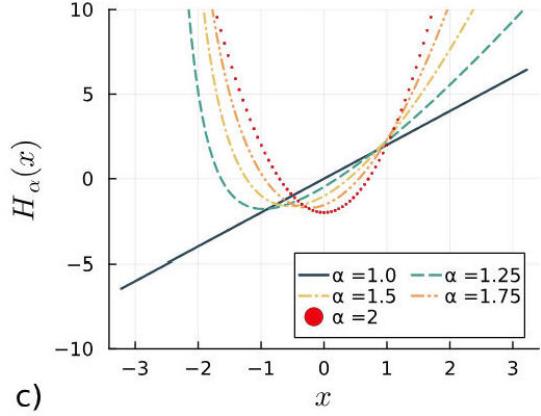
$$I_\alpha(x) = \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)_1 F_1\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right) \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + x\alpha\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)_1 F_1\left(\frac{1-\alpha}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right),$$

donde B ajusta la escala de la función de Hermite fraccionaria, y el término e^{-x^2/C^2} proporciona una apodización Gaussiana que asegura la localización del haz. La función de Hermite fraccionaria, denotada como $H_\alpha(x)$, permite modelar haces con propiedades de simetría y periodicidad ajustables. Esta función se puede calcular numéricamente como:

$$H_\alpha(x) = A \frac{2^{\alpha+1}}{\sqrt{\pi}} \exp(x^2) \times \int_0^\infty \exp(-t^2) \cos(2xt - \frac{\pi}{2}\alpha) dt. \quad (19)$$



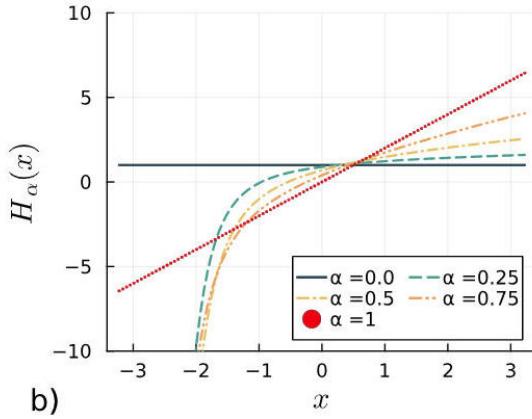
a)



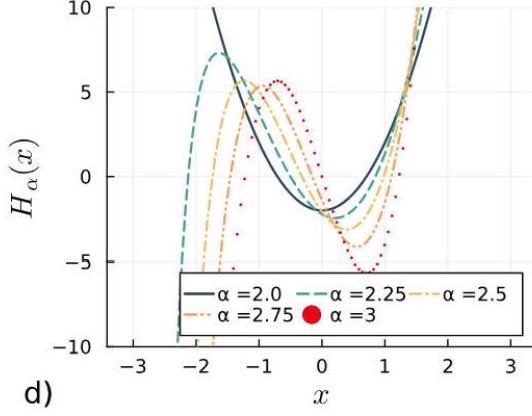
c)

En la Fig. 3 se presentan diversas funciones de Hermite fraccionarias. En la Fig. 3a) se muestran las funciones de Hermite correspondientes a órdenes enteros como referencia, mientras que en la Fig. 3b) se ilustra la transición entre los órdenes 0 y 1. De manera similar, en la Fig. 3c) se representa la transición entre los órdenes 1 y 2, y finalmente, en la Fig. 3d) se observa la transición entre los órdenes 2 y 3.

En particular, estos haces GFHG presentan propiedades únicas de localización de luz y simetría rota. Al ajustar los parámetros B y C , Aguilar-Márquez et al. demostraron que es posible controlar la dispersión del haz y asegurar su confinamiento. Un hallazgo clave es que los haces GFHG muestran un umbral crítico entre B y C para que el haz permanezca bien localizado. Si $B < C$, la solución no converge para α fraccionales; mientras que, para $B \geq C$, se obtienen soluciones bien localizadas. De manera interesante, la propiedad de $B < C$ se da de manera natural al obtener soluciones para el oscilador armónico cuántico, por lo que con esto, se tiene una manera alternativa de demostrar que las únicas soluciones localizadas y posibles en ese caso corresponden a las soluciones dadas para valores de α enteros. En la Fig. 4 se presentan los haces ópticos del tipo Hermite-Gauss fraccionarios. En la Fig. 4a) se muestran los haces Hermite-Gauss para órdenes enteros, utilizados como referencia. Por otro lado, en la Fig. 4b) se ilustra la transición entre los órdenes 0 y 1. De manera similar, la Fig. 4c) representa la transición entre



b)



d)

FIGURA 3. Funciones de Hermite fraccionarias. a) Funciones de Hermite de orden entero y funciones de Hermite fraccionarias para los casos en los que α está entre b) 0 y 1, (c) 1 y 2, y, (d) 2 y 3.

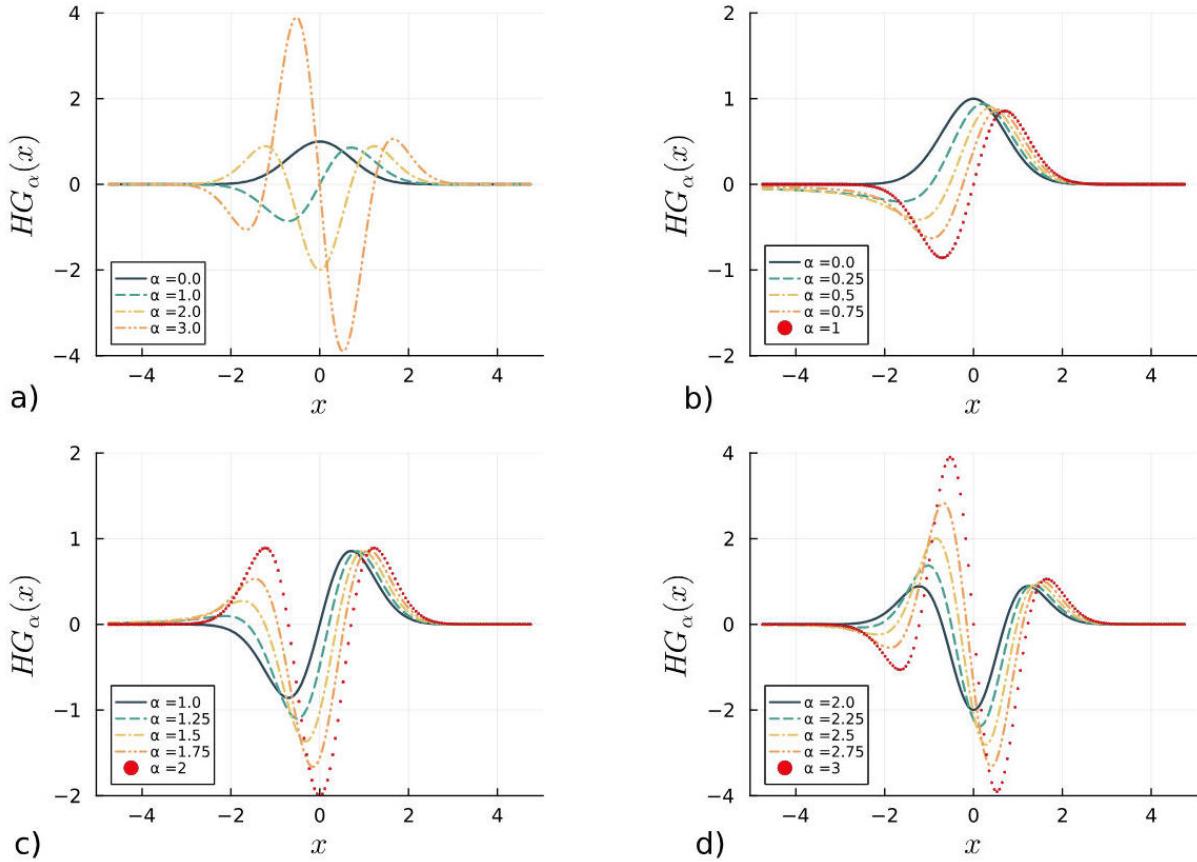


FIGURA 4. Haces Hermite Gauss Fraccionarios. a) Haces Hermite Gauss de orden entero, también se muestran ordenes fraccionarios entre b) HG_0 y HG_1 , c) HG_1 y HG_2 , d) HG_2 y HG_3 . En cada una de las gráficas $B = 1$ y $C = 1$ asegurando la condición de existencia $B \geq C$.

las órdenes 1 y 2, mientras que en la Fig. 4d) se observa la transición entre los órdenes 2 y 3.

En general, los resultados obtenidos con los GFHG resultan especialmente atractivos para su aplicación en medios ópticos no lineales con efectos no locales, donde el perfil fraccionario permite un control preciso sobre la interacción luz-materia en configuraciones de alta precisión. Estos resultados resaltan la aplicabilidad de los haces fraccionarios en sistemas ópticos avanzados y en el desarrollo de configuraciones de haces adaptados para aplicaciones en ruteo y control de guiado de onda para futuras tecnologías totalmente ópticas.

6. El oscilador armónico fraccional

El oscilador armónico es un problema omnipresente y de gran relevancia en la física, debido a su sencillez para modelar diversas situaciones en las que una partícula u objeto se desplaza hacia adelante y hacia atrás con respecto a una posición de equilibrio. Resulta natural considerar su análogo bajo un enfoque fraccionario, ya que esto puede contribuir a la comprensión de diferentes sistemas físicos clásicos, como configuraciones de movimiento de partículas en presencia de campos eléctricos y magnéticos, circuitos RC, RLC, péndulos simples, entre otros. Este enfoque permite incorporar efectos

de memoria y no localidad, ampliando así las posibilidades de modelado y análisis. De esta manera, la ecuación que describe dicho movimiento armónico simple en una dimensión estaría dada por:

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t), \quad (20)$$

donde para el sistema clásico de masa-resorte, m es la masa del objeto, $x(t)$ es el desplazamiento en el tiempo y k es la constante de fuerza, que representa la fuerza por unidad de desplazamiento. Esta ecuación clásica describe un oscilador armónico donde la fuerza restauradora es lineal y proporcional a la distancia respecto al punto de equilibrio.

Para los efectos del estudio usando derivadas fraccionales, se propone una versión fraccional de la ecuación del oscilador armónico; sin embargo, para evitar problemas con las unidades, primero se debe adimensionalizar la ecuación. Esto lo realizamos a través de la introducción de una escala $t_0 = \sqrt{m/k}$. Con esto se realiza un cambio de variable tal que, sea $\tilde{x} = x(t)/x_0$ y $\tilde{t} = t/t_0$, entonces la Ec. (20) adimensionalizada, tiene la forma:

$$\frac{d^2\tilde{x}(\tilde{t})}{d\tilde{t}^2} = -\tilde{x}. \quad (21)$$

Una vez se adimensionaliza la ecuación, es posible reemplazar la derivada de segundo orden por una derivada fraccional de orden α con $1 \leq \alpha \leq 2$ de forma que la ecuación fraccional se expresa como:

$$D^\alpha \tilde{x}(\tilde{t}) + \tilde{x}(\tilde{t}) = 0. \quad (22)$$

Esta formulación permite modelar la dinámica del sistema incorporando efectos de memoria intrínsecos, comunes en materiales o sistemas con interacción retardada. Debido a las diferentes definiciones que puede tomar la derivada fraccional del sistema, existen diferentes métodos de solución del sistema. En particular, haciendo uso de la derivada de Fourier, es posible reescribir la Ec. (22) como:

$$\mathcal{F}^{-1} [(i\omega)^\alpha \mathcal{F} [\tilde{x}(\tilde{t})] (\omega)] + \tilde{x}(\tilde{t}) = 0.$$

Por lo que el sistema puede ser reescrito como:

$$\mathcal{F} [\tilde{x}(\tilde{t})] (\omega) ((i\omega)^\alpha + 1) = 0.$$

Esto nos lleva a una ecuación característica $((i\omega)^\alpha + 1)$ la cual tiene raíces complejas:

$$\omega = -ie^{\frac{i\pi(2n+1)}{\alpha}},$$

con $n \in \mathbb{N}_0$. Lo que se ha encontrado es que para el sistema de Fourier existen diferentes frecuencias ω_n distribuidas en el plano complejo en ángulos determinados por el orden de la derivada, por lo que las soluciones en el dominio temporal son combinaciones de las correspondientes exponenciales complejas [33]. En otras palabras, las soluciones en este caso, si bien son del tipo oscilatorio, pueden tener atenuación o amplificación. Así que, de manera interesante, la introducción del operador fraccionario de Fourier en el movimiento armónico simple nos puede llevar también al estudio de sistemas no conservativos.

De manera similar, podemos optar por el uso de otro tipo de derivadas fraccionales para facilitar la resolución del oscilador armónico fraccional. Por ejemplo, las soluciones de la Ec. (22), pero para el caso de la derivada de Caputo, son funciones concretas y mucho más sencillas de manejar. Para este caso, se hace uso de la transformada de Laplace descrita en el Apéndice B con condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $x'(0) = v_0$, es posible reescribir la Ec. (22) como:

$$\mathcal{L} \{x(t)\} = \frac{x_0 s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1} + \frac{v_0 s^{\alpha-2}}{s^\alpha + 1}. \quad (23)$$

Al realizar la transformada inversa de Laplace sobre la Ec. (23), obtenemos una expresión analítica para el movimiento dado por:

$$x(t) = x_0 E_{\alpha,1}(-t^\alpha) + v_0 t E_{\alpha,2}(-t^\alpha), \quad (24)$$

en donde $E_{\alpha,1}(t)$ y $E_{\alpha,2}(t)$ corresponden a las funciones de Mittag-Leffler. En la Fig. 5 se presentan algunos resultados descritos por estas funciones. Es importante notar que,

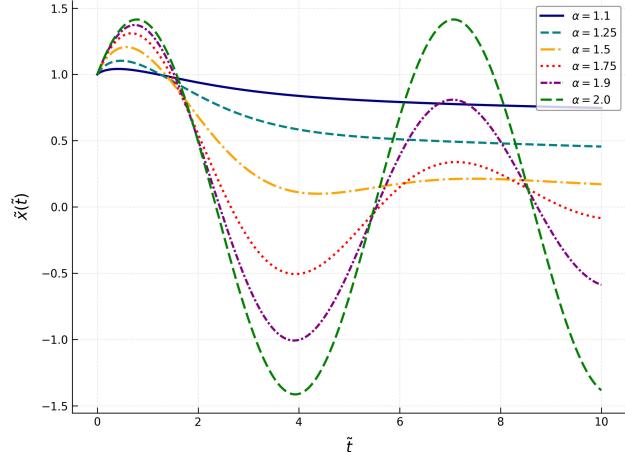


FIGURA 5. Oscilador armónico fraccional para la derivada de Caputo con diferentes valores para el orden α con condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $v(0) = 1$.

al igual que su contraparte de Fourier, los resultados obtenidos describen un comportamiento oscilatorio amortiguado, donde el parámetro α controla la tasa de decaimiento. Para valores de α cercanos a 2, el sistema exhibe oscilaciones con menor amortiguamiento, mientras que para valores más pequeños, el amortiguamiento es mayor. Esto sugiere una mayor pérdida de energía en el sistema, que puede asociarse con la memoria del mismo.

En este caso, para la resolución del oscilador armónico fraccional, se ha optado por el uso de la transformada de Laplace en lugar de la de Fourier. Esta elección se debe a la relevancia que adquieren las condiciones iniciales en ciertos casos, a diferencia de un sistema oscilatorio donde el interés principal recae en los resultados a largo plazo o en estado estable. Dado que en numerosos textos la transformada de Laplace es más comúnmente empleada para resolver problemas de cálculo fraccionales, hemos decidido incluir el Apéndice B con la información más relevante sobre dicha transformada en relación con el cálculo fraccional.

Gracias a sus propiedades fraccionales, el oscilador armónico fraccional se ha podido aplicar en áreas donde se presentan efectos de memoria y comportamiento no local. Como ejemplo, podemos mencionar que los sistemas de materiales con propiedades viscoelásticas pueden ser modelados con el oscilador armónico fraccional, ya que se puede capturar el comportamiento oscilatorio como el amortiguamiento dependiente de la historia de la deformación.

7. Conclusiones

El cálculo fraccionales constituye hoy en día una poderosa herramienta matemática, que aunque de primera entrada pudiera parecer una cuestión exótica, cuenta ya con aplicaciones en múltiples ramas de la física e ingeniería. Es importante mantener presente que la definición del operador de derivada fraccional no es único, sino que hay múltiples definiciones que deben satisfacer diversos criterios. En este trabajo, mos-

tramos algunas nociones básicas de cálculo fraccional, con especial énfasis en el operador fraccional acorde a la transformada de Fourier. Mostramos que dicha transformación puede ser implementada de manera relativamente directa en métodos numéricos, y mostramos algunos problemas físicos en donde puede ser usada, en especial detallando algunos resultados aplicados al área de luz estructurada. De manera similar, se habló de otras aplicaciones así como se han presentado otros conceptos base, como la función de Mittag-Leffler y el uso de la transformada de Laplace en el contexto de operadores fraccionales. Este trabajo busca ser una introducción accesible al fascinante mundo del cálculo fraccional. Somos conscientes de que quedan muchos temas por explorar y desarrollar, pero esperamos que la información aquí presentada motive a los lectores a aventurarse en esta área y, de paso, sigan dándole la razón a Leibniz sobre la intrigante derivada de orden un medio.

Appendix

A. La función de Mittag-Leffler

La función Mittag-Leffler es una generalización directa de la función exponencial, utilizada ampliamente en el cálculo fraccional. Esta función denotada por $E_\alpha(z)$ fue definida y estudiada por Mittag-Leffler en 1903. Esta función es esencial en el cálculo fraccionario por su capacidad para describir fenómenos que involucran memoria y no localidad. La función de Mittag-Leffler está dada por:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (\text{A.1})$$

Donde $\Gamma(x)$, es la función Gamma de Euler [34].

Debido a su versatilidad, dicha función puede ser generalizada con diferentes parámetros:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\text{A.2})$$

La Ec. (A.2) corresponde a la función de Mittag-Leffler generalizada también llamada función de Mittag-Leffler de dos parámetros.

$$E_{\alpha,\beta}^\gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\text{A.3})$$

donde $(\gamma)_k$ es el símbolo de Pochhammer. La expresión (A.3) corresponde a la función de Mittag-Leffler de tres parámetros [35], la cual es sumamente conveniente cuando se trabaja con ecuaciones diferenciales fraccionarias, debido a su transformada de Laplace.

Algunas de las propiedades sumamente útiles de esta función son [36]:

- $E_{\alpha,\beta}^1(z) = E_{\alpha,\beta}(z),$

- $E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z),$
- $E_{\alpha,\beta}(z) = zE_{\alpha,\alpha+\beta}(z) + \frac{1}{\Gamma(\beta)},$
- $\frac{dE_{\alpha,\beta}(z)}{dz} = \frac{1}{\alpha z} E_{\alpha,\beta-1}(z) - \frac{\beta-1}{\alpha z} E_{\alpha,\beta}(z).$

Algunos casos especiales para la función de Mittag Leffler son [36]:

- $E_0(z) = \frac{1}{1-z}, |z| < 1,$
- $E_1(z) = e^z,$
- $E_2(z) = \cosh(\sqrt{z}), \quad z \in \mathbb{C},$
- $E_2(-z^2) = \cos(z), \quad z \in \mathbb{C},$
- $E_{\frac{1}{2}}(\pm z^{\frac{1}{2}}) = e^z[1 + erf(\pm z^{\frac{1}{2}})], \quad z \in \mathbb{C},$
- $E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z},$
- $E_{2,2}(z) = \frac{\sinh(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}.$

Siendo $erf(z)$ la función error, que está definida por

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

B. La transformada de Laplace

La transformada de Laplace es fundamental para resolver ecuaciones diferenciales fraccionales en diversos contextos físicos, sobre todo por su manejo directo de las condiciones iniciales del problema físico en cuestión. Para una función $f(t)$ su transformada de Laplace en el dominio s está dada por:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt, \quad (\text{B.1})$$

Del mismo modo, si la transformada de Laplace la denotamos como $F(s)$ su transformada inversa está dada por:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st} ds. \quad (\text{B.2})$$

Debido a su importancia a continuación, se presentan algunos ejemplos clave que pueden ser útiles en la resolución de ecuaciones diferenciales fraccionales.

En la Sec. 1 se hace mención de que Oliver Heaviside toma la derivada de orden $1/2$ de 1 como $(\pi t)^{-1/2}$, esto es posible demostrarlo a través de la transformada de Laplace. Para este caso tomamos la transformada de Laplace de una derivada:

$$\mathcal{L}\{D^n[f(t)]\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^k(0),$$

TABLA I. Transformadas inversas de Laplace relevantes.

$F(s)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$
$\frac{s^{\gamma\alpha-\beta}}{(s^\alpha+a)^\gamma}$	$t^{\beta-1} \mathbf{E}_{\alpha,\beta}^\gamma(-at^\alpha)$
$\frac{1}{(s+a)^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-at}$
$\frac{a}{s(s^\alpha+a)}$	$1 - \mathbf{E}_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{1}{s^\alpha(s-a)}$	$t^\alpha \mathbf{E}_{1,1+\alpha}(at)$
$\frac{1}{s^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$
$\frac{1}{s^\alpha+a}$	$t^{\alpha-1} \mathbf{E}_{\alpha,\alpha}(-at^\alpha)$
$\frac{s^\alpha}{s(s^\alpha+a)}$	$\mathbf{E}_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{s^\alpha}{s-a}$	$-t^\alpha \mathbf{E}_{1,1-\alpha}(at), 0 < \alpha < 1$
$\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha \pm \lambda}$	$\mathbf{E}_\alpha(\mp \lambda t^\alpha), \operatorname{Re}(s) > \lambda ^{1/\alpha}$

y debido a que la función original es una constante, las condiciones iniciales, dadas por las derivadas de órdenes entero, son cero; por lo que podemos escribir la transformada de Laplace de la derivada de orden 1/2 de 1 como,

$$\mathcal{L}\left\{D^{\frac{1}{2}}(1)\right\} = s^{\frac{1}{2}} \frac{1}{s},$$

al simplificar, podemos determinar la derivada fraccional aplicando la transformada inversa de Laplace,

$$D^{\frac{1}{2}}(1) = \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-\frac{1}{2}}\right\},$$

$$D^{\frac{1}{2}}(1) = \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}.$$

Por lo que el valor de esta derivada está dado por:

$$D^{\frac{1}{2}}(1) = (\pi t)^{-1/2}.$$

De este modo, se demuestra el resultado aparentemente contraintuitivo mencionado alguna vez por Heaviside.

C. Códigos numéricos en Matlab y Python

Finalmente, en esta sección proporcionamos el enlace correspondiente para descargar los códigos en Matlab y Python para calcular la derivada fraccional utilizando Fourier. Es importante destacar que estos códigos pueden ejecutarse sin necesidad de conocimientos avanzados de programación; basta con escribir el nombre del archivo en la ventana de comandos y seguir las opciones que se presentan. Una de las ventajas de estos códigos es su flexibilidad, ya que pueden modificarse fácilmente para incluir o eliminar diversos procesos o datos según las necesidades del usuario. Por ejemplo, es posible adaptarlos para calcular la derivada fraccional de funciones en dos dimensiones. Los códigos están disponibles para su descarga en: https://github.com/serloal/Fracfourier1d_Rev_Mex_Fis.

-
1. E. Morillo, L. Riera, and M. Yangari, Una breve introducción al cálculo fraccionario, *Rev. Div. Amarun*, **3** (2022) 27.
 2. R. Hilfer, Applications of Fractional Calculus in Physics (2000), <https://doi.org/10.1142/3779>.
 3. M. Guía-Calderón *et al.*, El cálculo diferencial e integral fraccionario y sus aplicaciones, *Acta Universitaria* **25** (2015) 20, <https://doi.org/10.15174/au.2015.688>.
 4. J. M. S. Muñoz, Génesis y desarrollo del Cálculo Fraccionario, *Pensamiento Matemático* **1** (2011) 4.
 5. M. Caputo, Elasticità e Dissipazione (Zanichelli, Bologna, 1969).
 6. M. Caputo and M. Fabrizio, A new definition of fractional derivative without singular kernel, *Progress in Fractional Differentiation and Applications* **1** (2015), <https://doi.org/10.12785/pfda/010201>
 7. F. Bagarello, Fourier transforms, fractional derivatives, and a little bit of quantum mechanics, *Rocky Mountain Journal of Mathematics* **50** (2019) 415.
 8. R. Aguilar-Marquez *et al.*, Generalized fractional onedimensional Hermite-Gaussian beams, *Phys. Rev. A* **110** (2024) 033522, <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.110.033522>
 9. S. Jalalzadeh, F. R. da Silva, and P. V. Moniz, Prospecting black hole thermodynamics with fractional quantum mechanics, *European Physical Journal C* **81** (2021), <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-021-09438-5>
 10. S. Longhi, Fractional Schrödinger equation in optics, *Optics Letters* **40** (2015) 001117, <https://doi.org/10.1364/ol.40.001117>
 11. N. Laskin, Fractional quantum mechanics and Levy path integrals, *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics* **268** (2000), [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(00\)00201-2](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(00)00201-2)
 12. K. G. Atman and H. Sirin, Nonlocal Phenomena in Quantum Mechanics with Fractional Calculus, *Reports on Mathematical Physics* **86** (2020), [https://doi.org/10.1016/S0034-4877\(20\)30075-6](https://doi.org/10.1016/S0034-4877(20)30075-6)
 13. A. K. Grünwald, Ueber, Begrenzte, Derivationen und Deren Anwendung, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* **12** (1867) 441.

14. A. V. Létnikov, Theory of differentiation of an arbitrary order, *Mat. Sb.* **3** (1868) 1.
15. D. Valério, M. D. Ortigueira, and A. M. Lopes, How many fractional derivatives are there?, *Mathematics* **10** (2022) 737.
16. M. D. Ortigueira and J. Tenreiro Machado, A critical analysis of the Caputo-Fabrizio operator, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **59** (2018) 608, <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.12.001>
17. J. M. Cruz-Duarte *et al.*, A closed form expression for the Gaussian-based Caputo-Fabrizio fractional derivative for signal processing applications, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **61** (2018) 138.
18. B. A. Malomed, Optical solitons and vortices in fractional media: a mini-review of recent results, In *Photonics*, vol. **8** (Mdpi, 2021) p. 353.
19. J. Fujioka, M. Velasco, and A. Ramírez, Fractional optical solitons and fractional Noether's theorem with ortigueira's centered derivatives, *Applied Mathematics* **7** (2016) 1340.
20. S. Bayın, Definition of the Riesz derivative and its application to space fractional quantum mechanics, *Journal of Mathematical Physics* **57** (2016), <https://doi.org/10.1063/1.4968819>
21. G. Failla and M. Zingales, Advanced materials modelling via fractional calculus: Challenges and perspectives, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **378** (2020), <https://doi.org/10.1098/rsta.2020.0050>
22. V. E. Tarasov, General non-local electrodynamics: Equations and non-local effects, *Annals of Physics* **445** (2022) <https://doi.org/10.1016/j.aop.2022.169082>
23. M. Aburakhis and R. Ordóñez, Generalization of Direct Adaptive Control Using Fractional Calculus Applied to Nonlinear Systems, *Journal of Control, Automation and Electrical Systems* (2024) 1.
24. J. Rosales *et al.*, Two dimensional fractional projectile motion in a resisting medium, *Open Physics* **12** (2014) 517.
25. V. E. Tarasov, General fractional dynamics, *Mathematics* **9** (2021) 1464.
26. J. F. Gómez-Aguilar, R. Razo-Hernández, and D. Granados-Lieberman, A physical interpretation of fractional calculus in observables terms: Analysis of the fractional time constant and the transitory response, *Rev. Mex. Fis.* **60** (2014)
27. J. J. Rosales, J. D. Filoteo, and A. González, A comparative analysis of the RC circuit with local and non-local fractional derivatives, *Rev. Mex. Fis.* **64** (2018) 647, <https://doi.org/10.31349/REVMEXFIS.64.647>
28. J. C. Gutiérrez-Vega, Fractionalization of optical beams: I Planar analysis, *Optics Letters* **32** (2007) 1521, <https://doi.org/10.1364/ol.32.001521>
29. S. Maghsoudi-Khouzani and A. Kurt, New semi-analytical solution of fractional Newell-Whitehead-Segel equation arising in nonlinear optics with non-singular and non-local kernel derivative, *Optical and Quantum Electronics* **56** (2024), <https://doi.org/10.1007/s11082-023-06126-4>
30. Y. Zhang *et al.*, Propagation dynamics of a light beam in a fractional Schrödinger equation, *Physical review letters* **115** (2015) 180403.
31. V. Buesaquirillo, Métodos de cálculo fraccional en la descripción de sistemas físicos, Universidad de Nariño, San Juan de Pasto (2013)
32. R. L. Bagley and P. J. Torvik, Fractional calculus-a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures, *AIAA Journal* **21** (1983) 741.
33. R. Herrmann, Fractional calculus: An introduction for physicists 3rd edition (2018), <https://doi.org/10.1142/11107>.
34. M. P. Restrepo Segura, Aplicación de la función Mittag-Leffler en la resolución de ecuaciones diferenciales de orden fraccional, Master's thesis, Universidad Tecnológica de Pereira (2019).
35. A. M. Mathai, Some properties of Mittag-Leffler functions and matrix-variate analogues: A statistical perspective, *Fractional Calculus and Applied Analysis* **13** (2010) 113.
36. H. J. Haubold, A. M. Mathai, and R. K. Saxena, Mittag-Leffler Functions and Their Applications, *Journal of Applied Mathematics* (2011) 298628, 51, <https://doi.org/10.1155/2011/298628>
37. S. Holm, Natural Occurrence of Fractional Derivatives in Physics, In 2023 International Conference on Fractional Differentiation and Its Applications (ICFDA) (2023) pp. 1-5, <https://doi.org/10.1109/ICFDA58234.2023.10153355>.
38. H. Zeng *et al.*, Fractional solitons: New phenomena and exact solutions, *Frontiers in Physics* **11** (2023), <https://doi.org/10.3389/fphy.2023.1177335>
39. S. Raubitszek, K. Mallinger, and T. Neubauer, Combining Fractional Derivatives and Machine Learning, *A Review* (2023), <https://doi.org/10.3390/e25010035>.
40. S. Arora *et al.*, Applications of fractional calculus in computer vision: a survey, *Neurocomputing* **489** (2022) 407
41. F. Marques *et al.*, Recognition of simple handwritten polynomials using segmentation with fractional calculus and convolutional neural networks, In 2019 8th Brazilian Conference on Intelligent Systems (BRACIS) (IEEE, 2019) pp. 245-250.
42. B. G. Yazgaç and M. Kırcı, Fractional order calculus based fruit detection, In 2019 8th International Conference on Agro-Geoinformatics (Agro-Geoinformatics) (IEEE, 2019) pp. 1-4.
43. H. Zhang, *et al.*, A global neural network learning machine: Coupled integer and fractional calculus operator with an adaptive learning scheme, *Neural Networks* **143** (2021) 386.
44. M. Joshi, S. Bhosale, and V. A. Vyawahare, A survey of fractional calculus applications in artificial neural networks, *Artificial Intelligence Review* **56** (2023) 13897.
45. M. Caputo and F. Mainardi, A new dissipation model based on memory mechanism, *Pure and Applied Geophysics* **91** (1971) 134.
46. C. Monje, *et al.*, Fractional-order Systems and Controls: Fundamentals and Applications (Springer, 2010).