

Solución analítica y semianalítica del movimiento circular vertical con fricción

I. Hernández-Carrasco, R. Cortés-Maldonado, y R. Ramírez-Amador

*Tecnológico Nacional de México/ IT de Apizaco,
Av. Instituto Tecnológico No. 418, San Andrés Ahuashuatepec, Municipio de Tzompantepec, 90491, Tlaxcala, México,
e-mail: raul.cm@apizaco.tecnm.mx*

E. Zambrano-Serrano
*Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,
San Nicolás de los Garza 66455, México.*

Received 15 August 2025; accepted 14 November 2025

En este trabajo, se presenta un estudio del movimiento circular vertical con fricción, modelado mediante una ecuación diferencial no lineal de primer orden. Se obtiene una solución analítica del modelo original y, adicionalmente, se aplica el Método de Descomposición de Adomian como técnica semianalítica. Los resultados se validan experimentalmente mediante análisis de video con el software Tracker, encontrando una buena concordancia entre teoría y experimento.

Descriptores: Ecuación diferencial no lineal; método de descomposición de adomian; movimiento circular vertical; tracker.

This paper presents a study of vertical circular motion with friction, modelled by a first-order nonlinear differential equation. It is obtained an analytical solution for the original model, and, additionally, the same problem is solved semi-analytically using the Adomian Decomposition Method. The results are experimentally compared through video analysis using Tracker software, an acceptable agreement between the experiment and the theoretical solutions is reported.

Keywords: Nonlinear differential equation; adomian decomposition method; vertical circular motion; tracker.

DOI: <https://doi.org/10.31349/RevMexFis.23.020211>

1. Introducción

El movimiento de un objeto que se traslada a lo largo de una trayectoria curva en un plano vertical es un tema que ha sido ampliamente investigado [1-8]. Un problema clásico analizado en cursos de física para ciencias e ingeniería, consiste en calcular la altura mínima necesaria para que un objeto que se desliza por un plano inclinado alcance el punto máximo de un aro vertical de radio R , conectado a la base del plano [9]. Este sistema es conocido como *loop-the-loop*, en los cursos de manera frecuente se asocia con las montañas rusas, para hacer las clases más interesantes al relacionarlas con el mundo real [10]. El problema original del *loop-the-loop* se puede reformular para plantear como objetivo el cálculo del valor mínimo de la rapidez inicial que el objeto necesita para completar una vuelta alrededor del aro [6]. Si bien en ambos casos, la solución analítica se obtiene de forma rápida al desprestigiar la fricción, en la práctica los efectos disipativos son relevantes [1]. En la literatura se han reportado estudios que adoptan un enfoque dinámico para incorporar la fuerza de fricción; esto conduce a un modelo matemático no lineal de primer orden que, al aplicar métodos y herramientas matemáticas accesibles para estudiantes universitarios, puede resolverse de forma analítica para obtener la rapidez como función de la coordenada angular [2,6,7].

En cuanto a los métodos semianalíticos, el Método de Descomposición de Adomian (MDA) es un método simple que puede implementarse en diferentes sistemas no lineales

en matemáticas aplicadas, física, química, biología o ingeniería [11-15]. El MDA es una técnica que descompone la solución en una serie de funciones, evitando la necesidad de linealizar o discretizar el problema. Este método permite obtener soluciones exactas o aproximadas para ecuaciones diferenciales (ordinarias o parciales), tanto de orden entero como fraccionario, proporcionando una alternativa para el análisis de sistemas no conservativos [16]. El MDA ha sido aplicado de forma exitosa, tanto en sistemas físicos ampliamente conocidos como en aquellos que involucran conocimientos de frontera. Por ejemplo, se ha aplicado para obtener la solución del movimiento de proyectiles en dos dimensiones cuando se considera la resistencia del aire [17], así como en el estudio de los efectos de la energía oscura en el sistema estático de Schrödinger-Newton [18].

Por otra parte, el comportamiento de la rapidez como función de la posición angular o del tiempo puede obtenerse por diferentes métodos experimentales. Por ejemplo, pueden utilizarse fotoceldas para determinar la posición angular $\theta(t)$ y, posteriormente, obtener la rapidez a partir de la expresión $v = R(d\theta/dt)$ [2]. También se han utilizado acelerómetros inalámbricos para registrar el comportamiento temporal de la fuerza normal que siente un usuario desde el lanzamiento, pasando por encima, hacia la caída y el valle de una montaña rusa [19-21]. Otra estrategia ampliamente utilizada en diversos experimentos de física para la recolección de datos, es el análisis de videos de alta velocidad con software de acceso

abierto. Un ejemplo de esto es Tracker [22], herramienta que permite rastrear objetos en movimiento y facilita la comprensión de la física del fenómeno [23,24].

En este trabajo se presenta un estudio analítico y semianalítico del movimiento circular vertical con fricción. La descripción del sistema se realiza a partir de un enfoque dinámico que considera la presencia de la fricción cinética; el modelo matemático resultante es no lineal y de primer orden. La solución analítica se obtiene mediante la linealización del modelo, mientras que la solución semianalítica se obtiene aplicando el MDA. Adicionalmente, con el objetivo de complementar el estudio de forma experimental, se registró en un video de alta definición el comportamiento de la rapidez de una esfera de radio r en el interior del sistema *loop-the-loop*. El bucle del sistema tiene un radio R significativamente mayor que el de la esfera ($r \ll R$). El análisis del video se realiza con ayuda del software Tracker, los resultados obtenidos para la rapidez son comparados con aquellos que se obtienen de forma teórica; se reporta una concordancia aceptable entre ambos. El estudio teórico-experimental que toma en consideración la rotación de la esfera, así como la resistencia del aire queda fuera del alcance de este trabajo.

2. Marco teórico

Consideremos una esfera de masa m y radio r que se suelta desde una altura h y se desliza, por la acción de la gravedad g , en el interior de una trayectoria circular vertical de radio R , ver Fig. 1. Supongamos un solo punto de contacto entre la esfera y el aro, esto es $r \ll R$. Un objetivo común en este problema es calcular la rapidez v_0 que la esfera necesita para completar una vuelta a lo largo del aro vertical. El cálculo se simplifica cuando se desprecia la fricción, se aplica conservación de la energía mecánica y segunda ley de Newton para obtener que $v_0 > \sqrt{5Rg}$ [6]. Para describir la situación de forma más cercana a la realidad es necesario incorporar la presencia de la fricción.

La Fig. 2 ilustra el diagrama vectorial de la segunda ley de Newton en coordenadas tangencial y normal, se considera una posición arbitraria θ para la esfera. Las fuerzas concurrentes que actúan en el sistema son el peso, la fuerza nor-

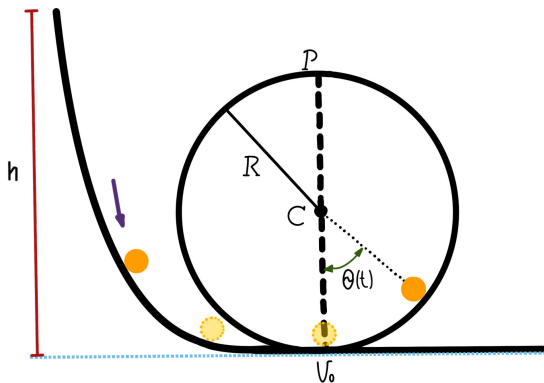


FIGURE 1. Partícula que se desliza a lo largo de una trayectoria circular vertical.

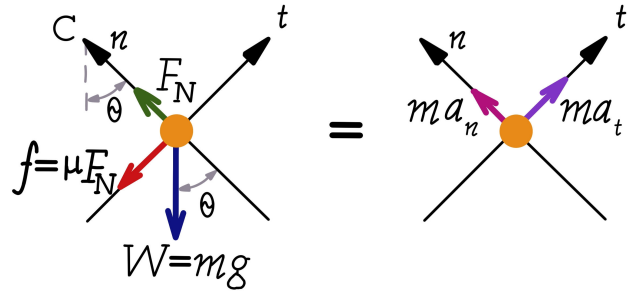


FIGURE 2. Segunda ley de Newton en coordenadas tangencial y normal en una posición arbitraria θ .

mal y la fuerza de fricción, que se modela como $f = \mu F_N$, donde μ es el coeficiente de fricción y F_N representa la magnitud de la fuerza normal. Al aplicar la segunda ley de Newton en cada una de las direcciones se obtiene

$$\Sigma F_t = -mg \sin \theta - \mu F_N = m \frac{dv}{dt}, \quad (1)$$

y

$$\Sigma F_n = F_N - mg \cos \theta = \frac{mv^2}{R}. \quad (2)$$

A partir de la Ec. (2), se despeja F_N y se sustituye en la Ec. (1) para obtener

$$\frac{dv}{dt} = -g(\mu \cos \theta + \sin \theta) - \mu \frac{v^2}{R}. \quad (3)$$

Si bien la Ec. (3) puede resolverse de manera numérica al acoplarla con la ecuación para la rapidez angular instantánea $d\theta/dt = v/R$, se prefiere obtener una ecuación para v como función de θ . Por lo tanto, se multiplica $dt/d\theta = R/v$ por la Ec. (3), lo que resulta en

$$\frac{dv}{d\theta} = -\mu v - gR(\mu \cos \theta + \sin \theta)v^{-1}. \quad (4)$$

2.1. Solución exacta

La Ec. (4) tiene la forma de una ecuación diferencial de Bernoulli con $n = -1$ y $v = v(\theta)$, sujeta a la condición inicial $v_0 = v(0)$. Para dar solución a (4) es necesario transformar la ecuación no lineal a una lineal y resolver por factor integrante. Con este objetivo se define

$$z = v^{1-(-1)} = v^2. \quad (5)$$

Al derivar z con respecto a θ queda:

$$\frac{dz}{d\theta} = 2v \frac{dv}{d\theta}. \quad (6)$$

Al sustituir las Ecs. (4) en (6) y reordenar se obtiene una ecuación diferencial de primer orden lineal no homogénea:

$$\frac{dz}{d\theta} + 2\mu z = -2gR(\mu \cos \theta + \sin \theta). \quad (7)$$

Se puede verificar que el factor integrante para la Ec. (7) es $e^{2\mu\theta}$. Al multiplicar la Ec. (7) por el factor integrante, después integrar y simplificar se obtiene:

$$z = v^2 = \frac{-2gR}{4\mu^2 + 1} [3\mu \sin \theta + (2\mu^2 - 1) \cos \theta] + \frac{C}{e^{2\mu\theta}}. \tag{8}$$

La constante de integración C se calcula al aplicar las condiciones iniciales $v_0 = v(0)$ obteniendo

$$C = \frac{2gR(2\mu^2 - 1)}{4\mu^2 + 1} + (v_0)^2. \tag{9}$$

La expresión para la rapidez como función de la posición angular a lo largo de la trayectoria se obtiene después de sustituir la Ec. (9) en (8) y simplificar, esto da como resultado

$$v = \sqrt{\frac{1}{e^{2\mu\theta}} \left[(v_0)^2 + \frac{2gR(2\mu^2 - 1)}{4\mu^2 + 1} \right] - \frac{2gR}{4\mu^2 + 1} [3\mu \sin \theta + (2\mu^2 - 1) \cos \theta]}. \tag{10}$$

Si la esfera mantiene contacto con la pista vertical durante el recorrido, entonces se cumple que $F_N \neq 0$, en caso contrario la esfera pierde contacto con la trayectoria y cae. Al suponer que esta situación ocurre en el punto máximo de la trayectoria ($\theta = \pi$), se puede determinar el valor de $v(\pi)$ a partir de las Ecs. (2) y (10) para obtener

$$v(\pi) = \sqrt{\frac{Rg}{4\mu^2 + 1} (-4\mu^2 + 3e^{2\mu\pi} + 2)}. \tag{11}$$

Para que la esfera complete una vuelta en la trayectoria establecida, la rapidez inicial en la entrada del aro debe ser mayor al valor obtenido en la Ec. (11), esto es, $v_0 > v(\pi)$.

2.2. Solución semianalítica

Existen diferentes formalismos matemáticos con los que se puede resolver una ecuación diferencial no lineal, en esta subsección se aplica el MDA, un método semianalítico que permite resolver ecuaciones diferenciales lineales, no lineales, ordinarias, parciales y sistemas de ecuaciones. El método consiste en aproximar la solución mediante una serie infinita de términos, que se determinan individualmente paso a paso mediante una relación recursiva utilizando los polinomios de Adomian [11-15].

A continuación, se aplica el MDA para aproximar la solución de la Ec. (4), esta última ecuación puede escribirse como:

$$Lv = P(\theta)v + Q(\theta)v^n, \tag{12}$$

donde

$$L = \frac{d}{d\theta}, \quad P(\theta) = -\mu, \quad Q(\theta) = -gR(\mu \cos \theta + \sin \theta)$$

y $n = -1$. El MDA establece que la solución de la Ec. (12) está dada por una serie de funciones de la forma

$$v(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(\theta). \tag{13}$$

El término no lineal v^n es descompuesto en términos de los polinomios de Adomian como

$$v^n(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\theta), \tag{14}$$

para una función arbitraria $f(t, \theta)$ los polinomios de Adomian se definen como

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\epsilon^n} f\left(t, \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i v_i\right) \Bigg|_{\epsilon=0}. \tag{15}$$

De manera particular, para la función v^n , los primeros cuatro polinomios de Adomian son

$$\begin{aligned} A_0 &= v_0^n, & A_1 &= n v_1 v_0^{n-1}, \\ A_2 &= n v_2 v_0^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} v_1^2 v_0^{n-2}, \\ A_3 &= n v_3 v_0^{n-1} + n(n-1) v_1 v_2 v_0^{n-2} \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} v_1^3 v_0^{n-3}. \end{aligned} \tag{16}$$

A continuación, se sustituyen las expresiones para $P(\theta)$, $Q(\theta)$ y $n = -1$ en la Ec. (12). Al resultado obtenido se aplica el operador $L^{-1} = \int_0^\theta d\theta$ para obtener

$$\begin{aligned} v(\theta) &= v_0 - \mu L^{-1}[v] \\ &- RgL^{-1}[(\sin \theta + \mu \cos \theta)v^{-1}], \end{aligned} \tag{17}$$

donde $v_0 = v(0)$ es la condición inicial. La sustitución de las Ecs. (13)-(14) en (17) da como resultado

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} v_n(\theta) &= v_0 - \mu L^{-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} v_n(\theta) \right] \\ &- RgL^{-1} \left[(\sin \theta + \mu \cos \theta) \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\theta) \right]. \end{aligned} \tag{18}$$

La Ec. (18) puede escribirse de forma recursiva como

$$v_0(\theta) = v_0, \quad (19)$$

$$v_{k+1} = -\mu \int_0^\theta v_k d\theta - Rg \int_0^\theta (\sin \theta + \mu \cos \theta) A_k(\theta) d\theta. \quad (20)$$

En nuestro estudio, la no linealidad esta caracterizada por el exponente $n = -1$. A partir de la Ec. (16) el primer polinomio de Adomian es $A_0 = v_0^{-1}$. Por consiguiente, a partir de la Ec. (20), el término v_1 se obtiene como

$$v_1 = -\mu \int_0^\theta v_0 d\theta - Rg \int_0^\theta (\sin \theta + \mu \cos \theta) \frac{1}{v_0} d\theta. \quad (21)$$

Después de integrar y evaluar el resultado que se obtiene es

$$v_1 = -\mu v_0 \theta - \frac{Rg}{v_0} (-\cos \theta + \mu \sin \theta + 1). \quad (22)$$

Una vez conocida la expresión para v_1 se procede a calcular el segundo polinomio de Adomian [ver Ec. (16)], lo que resulta en

$$A_1 = \frac{\mu\theta}{v_0} + \frac{Rg}{v_0^3} (-\cos \theta + \mu \sin \theta + 1). \quad (23)$$

La expresión para v_2 se obtiene a partir de las Ecs. (20)-(21) y (23), esto produce

$$v_2 = -\mu \int_0^\theta v_1 d\theta - Rg \int_0^\theta (\sin \theta + \mu \cos \theta) A_1 d\theta. \quad (24)$$

Se puede observar que los términos de la serie dependen de los valores del radio del aro, R , así como del valor de la aceleración g y del coeficiente de fricción μ . Es importante mencionar que la complejidad para calcular los términos v_{k+1} y A_k se incrementa para $k \geq 2$. Por tal motivo, dichos términos se calculan utilizando un programa simbólico desarrollado en MatLab.

3. Resultados

3.1. Experimento

El experimento se realiza con un bucle vertical de radio $R = 0.25$ m que fue elaborado con dos varillas de acero inoxidable de $1/4''$ de espesor, las varillas se unieron mediante soldadura asegurando que no exista separación entre ellas. A continuación, se dejó caer una esfera de acero de masa $m = 0.7$ g y radio $r = 2.83$ mm desde una altura $h = 1.26$ m, esto permite a la esfera recorrer el bucle sin per-

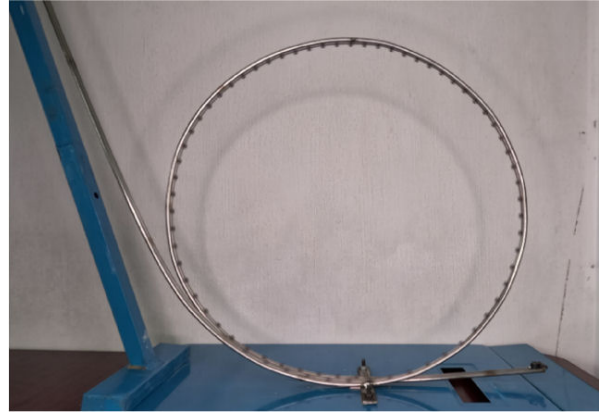


FIGURE 3. Recorrido de una esfera dentro de un aro vertical con fricción, $r \ll R$.

der contacto con la trayectoria. El movimiento y recorrido de la esfera se registró con una cámara de acción en un video de 2700p y 240 cuadros por segundo. Para garantizar estabilidad en la toma, la cámara fue colocada sobre un trípode y nivelada utilizando la aplicación integrada del dispositivo. El análisis del video se realizó en tres etapas mediante el software Tracker [22]. En primer lugar, usando la herramienta de ajuste circular, se ajustó la geometría del bucle a una circunferencia para ubicar en su centro el origen del sistema de coordenadas. A continuación, se utilizó la herramienta de calibración del software para establecer una escala de referencia, en este caso el diámetro de la esfera. Una vez establecidas las dimensiones, se procedió a rastrear el movimiento de la esfera cada dos cuadros, marcando su centro en cada fotograma. Este proceso permitió determinar la rapidez de la esfera como función del desplazamiento angular. En la Fig. 3 se pueden observar en puntos negros la trayectoria que recorre la esfera, esta imagen se obtuvo con el filtro estroboscópico de Tracker.

Los resultados teóricos mostrados no dependen de la masa y se han obtenido con los valores $R = 0.25$ m y $g = 9.80$ m/s². La elección de $\mu = 0.017$ permite reproducir satisfactoriamente los resultados experimentales. Para la solución analítica se obtuvo que $v(\pi) = 3.61$ m/s y se seleccionó $v_0 = 1.24v(\pi)$. La solución semianalítica se obtuvo con el cálculo de los primeros cinco términos de la aproximación de Adomian para $v(\theta)$. El primer término $v_0(\theta) = 4.3$ m/s corresponde a la condición inicial del problema, este valor se obtuvo directamente del registro guardado por el software Tracker y corresponde a $v_0 = 4.3$ m/s, se calcularon los primeros cuatro polinomios de Adomian y los términos correspondientes de la serie que son:

$$v_1(\theta) = 1.0934 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 0.0762 \theta - 0.0186 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1.0934, \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
 v_2(\theta) = & 0.0093 \theta + 0.0664 \cos \theta - 0.0197 \sin \theta \\
 & + 0.0011 \cos \theta \sin \theta - 0.0333 \cos^2 \theta \\
 & + 0.0093 \theta \cos \theta - 0.0002 \theta \sin \theta + 0.0006 \theta^2 \\
 & - 0.0330, \quad (26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_3(\theta) = & +0.0010 \cos(3\theta) - 0.0061 \cos(2\theta) - 0.0003 \theta \\
 & + 0.0013 \sin(2\theta) - 0.0001 \sin(3\theta) + 0.0145 \cos \theta \\
 & - 0.0029 \sin \theta - 0.0009 \theta \cos(2\theta) + 0.0011 \theta \cos \theta \\
 & + 0.0001 \theta^2 \cos \theta - 0.0001 \theta^2 - 0.0095, \quad (27)
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 v_4(\theta) = & +0.0006 \cos(3\theta) - 0.0021 \cos(2\theta) - 0.0003 \theta \\
 & - 0.0001 \cos(4\theta) + 0.0005 \sin(2\theta) - 0.0001 \sin(3\theta) \\
 & + 0.000005 \sin(4\theta) + 0.0042 \cos \theta - 0.0006 \sin \theta \\
 & - 0.0003 \theta \cos(2\theta) + 0.0001 \theta \cos(3\theta) \\
 & + 0.000009 \theta^2 \cos \theta + 0.000000004 \theta^3 \cos \theta \\
 & + 0.0001 \theta \sin(2\theta) - 0.000004 \theta \sin(3\theta) \\
 & - 0.000002 \theta^2 \sin \theta - 0.000000007 \theta^3 \sin \theta \\
 & - 0.00002 \theta^2 \cos(2\theta) + 0.0000007 \theta^2 \sin(2\theta) \\
 & + 0.0005 \theta \cos \theta - 0.00004 \theta \sin \theta - 0.00002 \theta^2 \\
 & + 0.0000004 \theta^3 + 0.00000001 \theta^4 - 0.0026. \quad (28)
 \end{aligned}$$

Las características descritas del experimento se aproximan a aquella suposición teórica donde $r \ll R$, de tal manera que es posible considerar a la esfera como una partícula puntual [25]. También, al considerar una pendiente pronunciada del sistema loop the loop (ángulo igual a 72.7°) y una esfera de acero inoxidable (superficie lisa) es muy probable que la esfera se deslice por la pendiente y alrededor del bucle [1,5,26,27]. En consecuencia, bajo estas consideraciones,

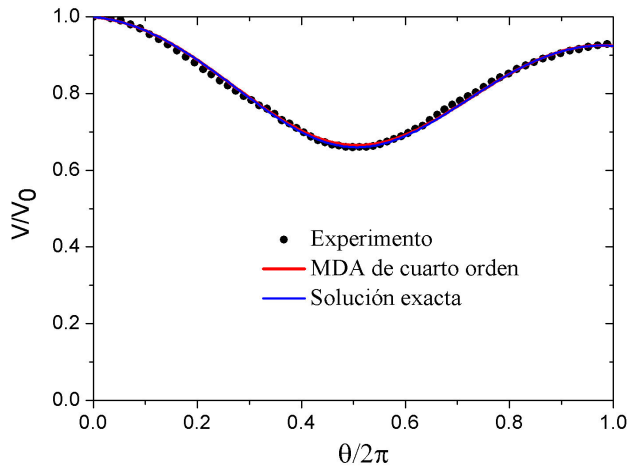


FIGURE 4. Comportamiento de la rapidez como función de la posición angular para el movimiento circular vertical con fricción.

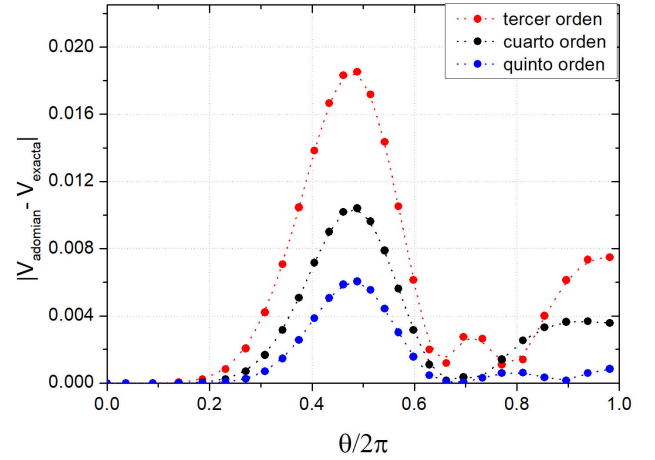


FIGURE 5. Comportamiento del error absoluto entre las soluciones teóricas.

es posible realizar una comparación teórico-experimental, los resultados se muestran en la Fig. 4 y se observa una concordancia aceptable entre ambos. La esfera ingresa en el aro con una rapidez inicial v_0 , a medida que recorre la trayectoria el valor de la rapidez $v(\theta)$ disminuye debido a la fricción. El valor mínimo ocurre en el punto más alto de la circunferencia donde $v(\pi) \neq 0$, esto asegura que se mantenga el contacto entre la esfera y la trayectoria, aún en esta situación crítica ($F_N \neq 0$). Posteriormente, la rapidez se incrementa por la acción de la gravedad, aunque no logra recuperar su valor inicial. Existen algunas regiones donde los datos experimentales no se ajustan a la predicción teórica, esto se atribuye a factores como la precisión en el rastreo cuadro por cuadro del video, el desprestigiar la rotación de la esfera, así como posibles variaciones locales en el coeficiente de fricción, entre otros

En cuanto a las soluciones teóricas, se observa que la solución obtenida por el MDA de cuarto orden reproduce en buen acuerdo el resultado de la solución exacta en toda la trayectoria; este hecho se confirma a través del error absoluto [28,29] que se muestra en la Fig. 5. En el intervalo de $0.0 \leq \theta/2\pi \leq 0.2$ el error es prácticamente nulo entre ambas soluciones. En el hemisferio superior de la trayectoria, $0.25 \leq \theta/2\pi \leq 0.75$, el error exhibe un comportamiento normal, se registra un valor máximo de aproximadamente 0.0102 y ubicado en el punto más alto del aro ($\theta/2\pi = 0.5$). En el último trayecto, $0.75 \leq \theta/2\pi \leq 1.0$, el error se incrementa nuevamente pero sin sobrepasar el 30% de su valor máximo.

También, en la Fig. 5 se muestra el comportamiento del error absoluto cuando se consideran soluciones semianalíticas de tercer y quinto orden. Para el caso del tercer orden el error absoluto se incrementa respecto a la aproximación de cuarto orden. Por el contrario, disminuye cuando la solución se aproxima con una serie de quinto orden. Es importante mencionar que el tiempo de cómputo se incrementa a medida que aumenta el orden de la aproximación semianalítica.

4. Conclusiones

En este trabajo se ha presentado un estudio analítico y semianalítico de la dinámica del movimiento circular vertical con fricción. El sistema es descrito por una ecuación diferencial no lineal de primer orden que fue resuelta para $v(\theta)$ de forma analítica al simplificar el modelo matemático a una ecuación diferencial ordinaria lineal, este procedimiento es abordado en cursos universitarios de ecuaciones diferenciales. Para conocer el comportamiento de $v(\theta)$ fue necesario proponer el valor de la rapidez inicial como $v_0 = 1.24v(\pi)$. En cuanto a la solución semianalítica, ésta se obtuvo de forma exitosa al aplicar el MDA, un método que permite resolver ecuaciones diferenciales lineales y no lineales sin necesidad de linealizar o discretizar la ecuación. En este caso, fue necesario recurrir al experimento para conocer el valor de la rapidez inicial, $v_0 = 4.3$ m/s. Los resultados teóricos muestran una concordancia aceptable con los datos experimentales del movimiento obtenidos mediante el análisis de un video realizado con el software Tracker, en ambos casos se ha considerado $r \ll R$. Sin embargo, es recomendable ampliar el estudio teórico-experimental a situaciones donde los efectos de la rotación sean considerados.

Como trabajo futuro, se propone extender el presente análisis a modelos con derivadas fraccionarias. En estos modelos, el MDA podría aplicarse para resolver ecuaciones diferenciales de orden no entero, que describen con mayor fidelidad sistemas con memoria y disipación no local. Finalmente, el contenido de este trabajo proporciona una metodología clara, pedagógica e integral para incorporar los métodos semianalíticos en el estudio de sistemas no lineales, dirigida a la formación de estudiantes de ciencias e ingeniería en las áreas de matemáticas y física.

Agradecimientos

Los autores agradecen a las autoridades del TecNM/IT de Apizaco por el apoyo recibido para el desarrollo de este trabajo. I. H. C. agradece a la SECIHTI por la beca otorgada para realizar estudios de doctorado. E. Z. S. agradece el apoyo recibido a través del proyecto CF-2023-I-1110 de la SECIHTI. Agradecemos a los revisores por sus valiosos comentarios y retroalimentaciones.

1. R. Cross, Sliding and rolling along circular tracks in a vertical plane, *American Journal of Physics* **91** (2023) 351.
2. R. C. Maldonado *et al.*, Estudio teórico-experimental de la dinámica del movimiento circular con fricción, *Rev. Mex. Fis. E* **18** (2021) 020204.
3. R. Cross, Motion of a metal nut sliding around a vertical loop, *Physics Education* **59** (2024) 033001.
4. C. E. Mungan, Over the top, *The Physics Teacher* **59** (2021) 680.
5. O. Bertran and J. Riba, A revised solution for a sphere rolling in a vertical loop, *European Journal of Physics* **42** (2020) 015008.
6. W. Kłobus, Motion on a vertical loop with friction, *American Journal of Physics* **79** (2011) 913.
7. L. P. Franklin and P. I. Kimmel, Dynamics of circular motion with friction, *American Journal of Physics* **48** (1980) 207.
8. I. A. C. Melnik and V. d. A. Oliveira, Análise do movimento de uma partícula em um loop circular vertical usando noções de limite, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **42** (2020) e20190244.
9. A. Bettini, A Course in Classical Physics 1-Mechanics, Undergraduate Lecture Notes in Physics (Springer International Publishing, 2016), <https://books.google.com.mx/books?id=6TTeCwAAQBAJ>.
10. J. Miljokovic *et al.*, Loop-the-loop as a real tribomechanical system applicable in engineering education (2021).
11. G. Adomian, Nonlinear stochastic operator equations (Academic press, 2014).
12. G. Adomian and R. Rach, On composite nonlinearities and the decomposition method, *Journal of mathematical analysis and applications* **113** (1986) 504.
13. G. Adomian, Applications of nonlinear stochastic systems theory to physics (1987).
14. Y. Zhu, Q. Chang, and S. Wu, A new algorithm for calculating Adomian polynomials, *Applied Mathematics and Computation* **169** (2005) 402.
15. R. G. G. d. Amorim *et al.*, Resolvendo Equações Diferenciais pelo Método da Decomposição de Adomian, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **42** (2020) e20200095.
16. M. K. Mak, C. S. Leung, and T. Harko, A brief introduction to the Adomian decomposition method, with applications in astronomy and astrophysics, arXiv preprint arXiv:2102.10511 (2021).
17. O. Alomari *et al.*, Solution for projectile motion in two dimensions with nonlinear air resistance using Laplace decomposition method, *J. Math. Comput. Sci.* **12** (2022) Article.
18. M. K. Mak, C. S. Leung, and T. Harko, The effects of the dark energy on the static Schrödinger-Newton system-An Adomian Decomposition Method and Padé approximants based approach, *Modern Physics Letters A* **36** (2021) 2150038.
19. A.-M. Pendrill, Student investigations of the forces in a roller coaster loop, *European journal of physics* **34** (2013) 1379.
20. S. Alberghi *et al.*, Is it more thrilling to ride at the front or the back of a roller coaster?, *The Physics Teacher* **45** (2007) 536.
21. A.-M. Pendrill and D. Eager, Velocity, acceleration, jerk, snap and vibration: Forces in our bodies during a roller coaster ride, *Physics Education* **55** (2020) 065012.

22. Tracker Video Analysis and Modeling Tool for Physics Education, <https://opensourcephysics.github.io/tracker-website/>.
23. B. Asavapibhop and N. Suwonjandee, Loop-the-Loop: An Easy Experiment, A Challenging Explanation, In *AIP Conference Proceedings* **1263** (2010) 249-251.
24. P. Bhakat, S. Chakraborty, and P. Mandal, Tracking the motion of a simple pendulum with tracker, *Resonance* **29** (2024) 1085.
25. G. U. Varieschi, The projectile inside the loop, *Physics Education* **41** (2006) 236, <https://doi.org/10.1088/0031-9120/41/3/005>
26. P. L. Tea Jr, Trouble on the loop-the-loop, *American Journal of Physics* **55** (1987) 826.
27. R. Cross, Loop the loop experiments, *Physics Education* **57** (2022) 065018.
28. M. M. Khater *et al.*, Analytical and semi-analytical solutions for time-fractional Cahn-Allen equation, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **44** (2021) 2682.
29. M. M. Khater *et al.*, Analytical, semi-analytical, and numerical solutions for the Cahn-Allen equation, *Advances in Difference Equations* **2020** (2020) 9.
30. R. Cross, Rotating ring on a horizontal rod, *Physics Education* **59** (2024) 015037.