

Interfaz para la visualización de sólidos y análisis de integrales triples

B. Linares-Rodríguez

Facultad de Posgrado, Universidad Técnica de Manabí, Portoviejo 130105, Ecuador.

Y. Montilla-López

Facultad de Ciencias de la Ingeniería, Universidad Técnica Estatal de Quevedo, Quevedo 120550, Ecuador.

F. Suárez-Carreño

Facultad de Ingeniería y Ciencias Aplicadas, Universidad de las Américas, Quito 170311, Ecuador.

e-mails: blinares9307@utm.edu.ec; ymontillal@uteq.edu.ec; franyelit.suarez@udla.edu.ec

Received 4 October 2025; accepted 2 January 2026

Se presenta el diseño de una interfaz gráfica en Maple como recurso pedagógico para el análisis de integrales triples en coordenadas rectangulares. La herramienta permite al usuario ingresar de forma sencilla el integrando y los límites de integración, generando como salida representaciones analíticas y gráficas. Entre ellas se incluyen el gráfico del área en el plano de proyección con las intersecciones que definen la región, la visualización del sólido en 3D y la evaluación de la integral. La interfaz ofrece además la opción de remover las caras del sólido, proporcionando una percepción detallada de sus superficies. Esta herramienta constituye un apoyo didáctico que complementa la resolución de problemas presentes en los textos clásicos asociados al cálculo de integrales triples, favoreciendo la comprensión geométrica de los sólidos y el proceso de integración.

Descriptores: Integrales triples; visualización matemática; Maple.

This paper presents the design of a graphical interface in Maple as a teaching resource for analyzing triple integrals in rectangular coordinates. The tool allows the user to easily enter the integrand and the limits of integration, generating analytical and graphical representations as output. These include a graph of the area in the projection plane with the intersections that define the region, a 3D visualization of the solid, and the evaluation of the integral. The interface also offers the option of removing the faces of the solid, providing a detailed view of its surfaces. This tool is a teaching aid that complements the problem-solving exercises found in classic texts associated with the calculation of triple integrals, promoting a geometric understanding of solids and the integration process.

Keywords: Triple integrals; mathematical visualization; Maple.

DOI: <https://doi.org/10.31349/RevMexFis.23.020213>

1. Introducción

El cálculo representa una de las asignaturas que presenta mayor dificultad de comprensión para los estudiantes, situación que se refleja en los bajos índices de aprobación de esta disciplina en las carreras de ciencias e ingeniería. Particularmente, el éxito en cálculo, en los primeros niveles de educación universitaria, depende en gran medida del dominio de las matemáticas que preceden al cálculo como álgebra, geometría analítica, funciones y trigonometría [1]. Cuando estos conocimientos previos no están suficientemente consolidados, los estudiantes enfrentan serias dificultades para comprender los nuevos contenidos, lo que se traduce en rezago académico, frustración y altas tasas de reprobación en la asignatura [2].

En cursos de cálculo avanzado como el cálculo multivariable y vectorial, la complejidad radica fundamentalmente en la transición del manejo de una variable a la manipulación simultánea de dos o tres de ellas. La geometría asociada a estos conceptos requiere la capacidad de imaginar y representar en el espacio curvas, superficies, sólidos, campos escalares y vectoriales, habilidad vital para el desarrollo del

pensamiento espacial y abstracto que debe cultivar todo ingeniero o científico [3]. La capacidad de interpretación espacial de los estudiantes para visualizar entidades tridimensionales como planos, cilindros parabólicos, hiperboloides y elipsoides suele verse limitada dado que en algunos programas de ingeniería el curso de geometría analítica del espacio no se contempla como prerrequisito para el curso de cálculo multivariable o, incluso, no forma parte de la malla curricular. Como consecuencia, contenidos como el análisis de integrales triples, particularmente el reconocimiento de regiones de integración y sólidos asociados, se convierten en tareas altamente desafiantes, no por su complejidad algebraica únicamente, sino por la falta de intuición espacial necesaria para comprender lo que se está integrando y por qué. Esta carencia repercute directamente en el desempeño académico, en la resolución de problemas y en la capacidad del futuro profesional para aplicar modelos matemáticos en contextos ingenieriles reales.

Como herramienta de apoyo para representar estructuras complejas en el espacio, los textos tradicionales de cálculo recomiendan o utilizan graficadores computacionales en los

problemas propuestos e incluso en algunos ejercicios expuestos como ejemplo. Sin embargo, según el programa que se utilice, el estudiante debe manejar cierta sintaxis y paquetes que pueden sumar complejidad informática adicional a las dificultades analíticas del procedimiento algebraico en los procesos matemáticos. Para facilitar los análisis y complementar como guía el desarrollo procedimental de ejercicios, se han popularizado las interfaces gráficas de usuario (GUI). A través de estos entornos, los estudiantes interactúan con una computadora o aplicación de software mediante elementos visuales como íconos, menús y botones, en lugar de escribir comandos en una interfaz basada en texto [4]. El resultado de esta interacción es mostrar ideas abstractas y complejas de matemáticas y física en formas pictóricas o gráficas [5–7]. Estas interfaces son fáciles de usar en el nivel universitario. Además, tuvieron su auge durante la pandemia de COVID-19, cuando el cambio de modalidad presencial a la modalidad en línea motivó la búsqueda de alternativas educativas para la enseñanza de contenidos que involucran desarrollo en pizarra [8]. De esta manera, al integrar herramientas digitales o informáticas a la educación, se promueve un análisis más profundo e intuitivo de los temas físicos y matemáticos, convirtiendo a la computación en un recurso indispensable que enriquece el proceso de aprendizaje capturando la atención del estudiante [9–11].

Este trabajo presenta el diseño de una interfaz de usuario en Maple para el análisis de integrales triples sobre regiones simples en coordenadas rectangulares, que es un contenido fundamental en cursos de cálculo multivariable. Maple, como sistema de álgebra computacional, ofrece capacidades tanto de cálculo simbólico como de visualización, lo que lo hace particularmente adecuado para este propósito. Las integrales triples, presentes en numerosos problemas físicos, requieren habilidades de razonamiento lógico y espacial esenciales para la comprensión de cursos asociados a física y especialización en ciencias e ingeniería [12]. En la interfaz desarrollada, el usuario introduce de forma sencilla y amigable los parámetros que definen una integral triple mediante caracteres simples. Como respuesta, la interfaz proporciona tanto las representaciones gráficas (2D y 3D) del dominio de integración como los cálculos analíticos y la evaluación de la integral triple. El recurso ayuda a los estudiantes a visualizar y profundizar en los problemas matemáticos y físicos asociados a la geometría de sólidos compuestos por superficies complejas. En cuanto a los docentes, además de optimizar el desarrollo de una clase, esta herramienta, les permite presentar clases más atractivas, interactivas y participativas, complementando el enfoque tradicional.

Este trabajo inicia con la definición de una integral triple sobre una función continua. Luego se describen las características y funcionalidades de la interfaz, resaltando la utilidad de los componentes utilizados en Maple. Seguidamente se presentan los resultados del trabajo de la interfaz con algunos ejemplos clásicos de cálculo de volumen y evaluación de integrales presentes en la literatura. Posteriormente se

exponen los alcances y limitaciones del manejo del recurso. Por último, se presentan las conclusiones y se proporciona un enlace de acceso abierto para la descarga del archivo *Maple worksheet* y los códigos utilizados, garantizando su accesibilidad a la comunidad académica.

2. Teoría: Integral triple sobre una región general

Si f es una función continua sobre una región sólida acotada E , entonces la integral triple de f sobre E se define como:

$$\iiint_E f(x, y, z) dV. \quad (1)$$

Cuando la región sólida es simple, la integral triple puede evaluarse como una integral iterada utilizando cualquiera de los seis órdenes posibles de integración del elemento diferencial de volumen dV en coordenadas rectangulares [13]:

$$\begin{aligned} \text{Orden 1: } dz dy dx, & \quad \text{Orden 2: } dz dx dy, \\ \text{Orden 3: } dx dz dy, & \quad \text{Orden 4: } dx dy dz, \\ \text{Orden 5: } dy dz dx, & \quad \text{Orden 6: } dy dx dz. \end{aligned}$$

Los órdenes 1 y 2 corresponden a regiones de tipo 1, los órdenes 3 y 4 a regiones de tipo 2, y los órdenes 5 y 6 a regiones de tipo 3.

Región E de tipo 1

Comprendida entre la superficie inferior $z = u_1(x, y)$ y la superficie superior $z = u_2(x, y)$, ambas continuas en x y y , es decir:

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}, \quad (2)$$

donde D es la proyección de E en el plano XY [véase Fig. 1a)]. La integral triple asociada es

$$\begin{aligned} \iiint_E f(x, y, z) dV \\ = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA. \end{aligned} \quad (3)$$

La integral interna se evalúa manteniendo fijos x e y ; por lo tanto, u_1 y u_2 son consideradas constantes y la integración de f se efectúa respecto a z [14].

Región E de tipo 2

Delimitada por atrás por la superficie $x = u_1(y, z)$ y por delante por la superficie $x = u_2(y, z)$, continuas en y y z :

$$\begin{aligned} E = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D, \\ u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}, \end{aligned} \quad (4)$$

donde D es la proyección de E en el plano YZ [véase Fig. 1b)]. La integral triple toma la forma

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x, y, z) dx \right] dA. \tag{5}$$

En este caso, y y z permanecen fijos, y la integración se realiza respecto a x [15].

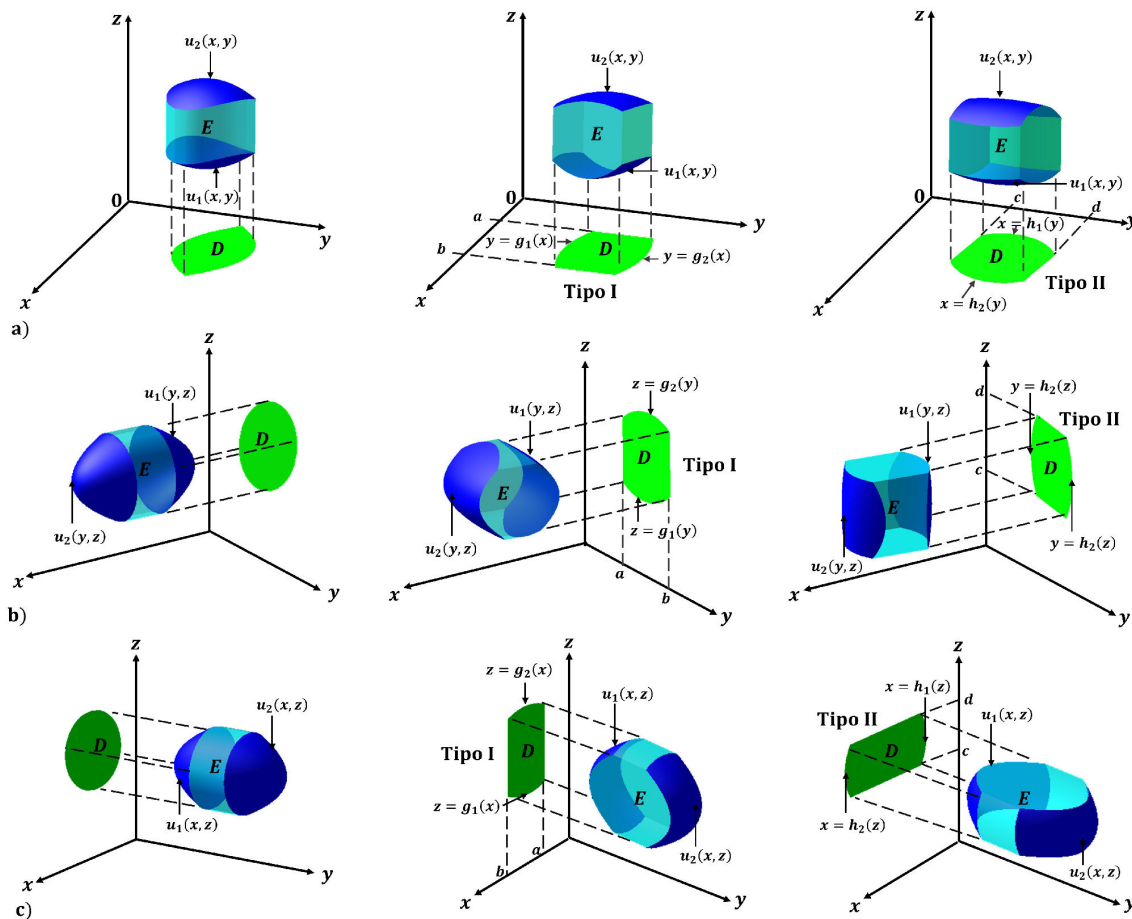


FIGURA 1. Regiones de integración: a) De tipo 1 b) De tipo 2, c) De tipo 3.

TABLA I. Regiones sólidas y formas asociadas de la integral triple.

Tipo	Región E	Integral triple $\iiint_E f(x, y, z) dV$
1-I	$\{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$	$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f dz dy dx$
1-II	$\{(x, y, z) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$	$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f dz dx dy$
2-I	$\{(x, y, z) \mid a \leq y \leq b, g_1(y) \leq z \leq g_2(y), u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}$	$\int_a^b \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f dx dz dy$
2-II	$\{(x, y, z) \mid c \leq z \leq d, h_1(z) \leq y \leq h_2(z), u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}$	$\int_c^d \int_{h_1(z)}^{h_2(z)} \int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f dx dy dz$
3-I	$\{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq z \leq g_2(x), u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\}$	$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f dy dz dx$
3-II	$\{(x, y, z) \mid c \leq z \leq d, h_1(z) \leq x \leq h_2(z), u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\}$	$\int_c^d \int_{h_1(z)}^{h_2(z)} \int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f dy dx dz$

TABLA II. Cantidades físicas representadas por integrales triples.

Función densidad $f(x, y, z)$	Integral triple	Magnitud física que representa
1	$V = \iiint_E dV$	Volumen del sólido
$\rho(x, y, z)$	$m = \iiint_E \rho(x, y, z) dV$	Masa total
$x\rho(x, y, z)$	$M_{yz} = \iiint_E x\rho(x, y, z) dV$	Momento de masa respecto al plano YZ
$y\rho(x, y, z)$	$M_{xz} = \iiint_E y\rho(x, y, z) dV$	Momento de masa respecto al plano XZ
$z\rho(x, y, z)$	$M_{xy} = \iiint_E z\rho(x, y, z) dV$	Momento de masa respecto al plano XY
$(y^2 + z^2)\rho(x, y, z)$	$I_x = \iiint_E (y^2 + z^2)\rho(x, y, z) dV$	Momento de inercia respecto al eje x
$(x^2 + z^2)\rho(x, y, z)$	$I_y = \iiint_E (x^2 + z^2)\rho(x, y, z) dV$	Momento de inercia respecto al eje y
$(x^2 + y^2)\rho(x, y, z)$	$I_z = \iiint_E (x^2 + y^2)\rho(x, y, z) dV$	Momento de inercia respecto al eje z
$\sigma(x, y, z)$	$Q = \iiint_E \sigma(x, y, z) dV$	Carga eléctrica total

Región E de tipo 3

Acotada entre la superficie izquierda $y = u_1(x, z)$ y la derecha $y = u_2(x, z)$, continuas en x y z :

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D, u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\}, \tag{6}$$

donde D es la proyección de E en el plano XZ [véase Fig. 1c)]. Para este tipo de región se obtiene

$$\begin{aligned} & \iiint_E f(x, y, z) dV \\ &= \iint_D \left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x, y, z) dy \right] dA. \end{aligned} \tag{7}$$

La integración interna se realiza respecto a y , manteniendo fijos x y z [16].

La Fig. 1 muestra que la región plana D admite dos variantes (tipo I o tipo II), lo que genera expresiones alternativas para E en las Ecs. (2), (4) y (6), y, en consecuencia, para las integrales en (3), (5) y (7). La Tabla I resume los seis casos correspondientes a los posibles órdenes de integración de dV .

En la práctica, distintas elecciones de la función $f(x, y, z)$ permiten calcular diversas magnitudes físicas. La Tabla II resume algunas de las aplicaciones más comunes de las integrales triples en ciencias e ingeniería.

3. Interfaz en Maple

De entrada, el usuario elige el tipo de región de integración, introduce el integrando y los límites de integración. Como salida, la interfaz muestra: el gráfico del área en el plano de proyección y sus contornos, la representación analítica y el cálculo de intersecciones entre curvas (cuando existan), el sólido tridimensional con opción de anular partes de sus caras, y finalmente la representación analítica de la integral triple junto con su resultado.

La Fig. 2 ilustra una hoja de trabajo de Maple para el análisis de integrales triples. La interfaz presenta una tabla

de dos columnas donde se han incorporado diversos componentes. El primero es un Combo Box que permite al usuario seleccionar entre seis opciones: **Región 1 - Tipo I, Región 1 - Tipo II, Región 2 - Tipo I, Región 2 - Tipo II, Región 3 - Tipo I y Región 3 - Tipo II**. Este componente incluye un código que actualiza dinámicamente las etiquetas con estilo de Mathematical Expression, permitiendo al usuario ingresar en los Text Area correspondientes la función a integrar y los límites de integración según la notación matemática de cada tipo de región presentada en la Tabla I.

Particularmente, si se selecciona **Región 1 - Tipo I**, debe ingresar primero el integrando, luego las funciones que definen los límites inferior y superior respecto a la variable z , conocidas como piso y techo. Seguidamente ingresa las funciones que definen los límites inferior y superior respecto a la variable y , visualizadas en el espacio como la pared izquierda y la pared derecha. Por último, ingresa los números que definen los límites respecto a la variable x (vistos en 3D como pared trasera y pared delantera). En contraste, si se selecciona **Región 1 - Tipo II**, el procedimiento es similar, pero se introducen los números para los límites en y , así como las funciones que definen los límites respecto a la variable x . Bajo este mismo esquema operan las regiones de tipo 2 y tipo 3, donde las etiquetas Mathematical Expression indican respecto a qué variable se insertan los límites de integración.

Se destaca que los Text Area incluyen una funcionalidad de sugerencia donde al colocar el cursor sobre ellos aparece un cuadro de comentario indicando el tipo de límite que debe ingresar, proporcionando una guía instructiva al usuario.

El segundo componente es un Button con el subtítulo **Graficar área**. Este botón lee el tipo de región seleccionado en el Combo Box y las funciones ingresadas en los Text Area para los límites de integración que definen el área en el plano de proyección. El código implementado genera en un Plot las curvas y rectas correspondientes según el tipo de región seleccionada. Además de resaltar el área encerrada, el botón calcula y muestra en un componente de Mathematical Expression debajo del gráfico las

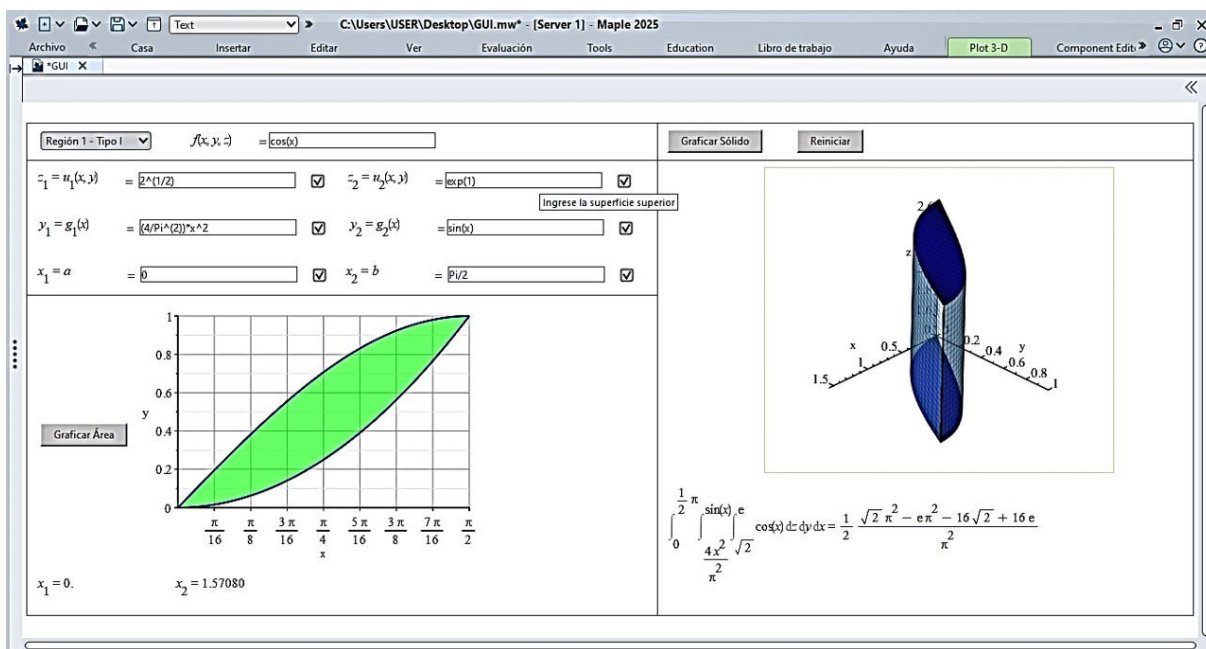


FIGURA 2. Interfaz en hoja de trabajo de Maple para el análisis de integrales triples.

coordenadas de intersección de las curvas cuando estas existen. En caso de no existir intersecciones, como ocurre en una región rectangular, no se presenta ningún valor.

Es importante señalar que, si los límites numéricos son desconocidos, el usuario puede fijar valores arbitrarios, graficar, observar las intersecciones y corregirlos hasta obtener la región deseada. Adicionalmente, el código incorpora una lógica que permite leer y tolerar números irracionales como π , e y $\sqrt{2}$ en los límites de integración.

El tercer componente es un Button con subtítulo **Graficar Sólido**. Este botón utiliza toda la información ingresada (tipo de región, integrando y límites en los Text Area, así como las Check Box) para generar un sólido en un Plot. Las superficies se representan con distintas tonalidades de azul, y las paredes presentan transparencia para facilitar la visualización interna. Debajo del gráfico, en un componente de Mathematical Expression muestra la integral triple en forma analítica y su resultado simbólico. En este punto, si se ingresan constantes irracionales, estas se mantienen en notación exacta y no se aproximan a decimales. Además, las Check Box permiten mostrar o suprimir superficies específicas, de modo que el sólido puede visualizarse completo o parte de sus lados.

Por último, el cuarto componente es un Button con subtítulo **Reiniciar** que lee todos los componentes de la interfaz: Text Area, Mathematical Expression, Plot y Check Box. Al pulsarlo, limpia completamente la interfaz dejando los Text Area y las Check Box en blanco, los gráficos únicamente con los ejes y borrando todos los cálculos y representaciones analíticas de salida. Esto permite al usuario, especialmente si no está familiarizado con Maple y ha introducido algún carácter erróneo, reiniciar completamente la sesión.

Los códigos implementados permiten que los gráficos, al hacer clic sobre ellos, hereden las opciones nativas de Maple que aparecen en la barra de herramientas de la hoja de trabajo. Así, el usuario puede personalizar las visualizaciones tanto del área como del sólido. Esto resulta especialmente útil porque, aunque por defecto los gráficos se ajustan a las dimensiones de las regiones, mediante las opciones de propiedades de los ejes se puede visualizar el origen del sistema de coordenadas y la localización que ocupa el sólido en dicho sistema. En el caso de los gráficos 3D, la opción de rotación proporciona una perspectiva completa para observar el sólido desde distintos ángulos.

4. Resultados

En esta sección se exponen algunos casos de análisis de integrales triples presentados en la literatura tradicional.

4.1. Integración de regiones de tipo I

4.1.1. Caso 1-I: paraboloides elíptico sobre rectángulo

La Fig. 3 muestra el cálculo del volumen del sólido que yace sobre el rectángulo $R = [0, 2] \times [0, 2]$ y bajo el paraboloides elíptico $z = 16 - x^2 - 2y^2$ [14]. La región de integración de tipo I se define como:

$$E = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 16 - x^2 - 2y^2 \right\}. \quad (8)$$

Al tratarse de una región rectangular no existen intersecciones entre curvas, por lo que debajo del gráfico de área en el

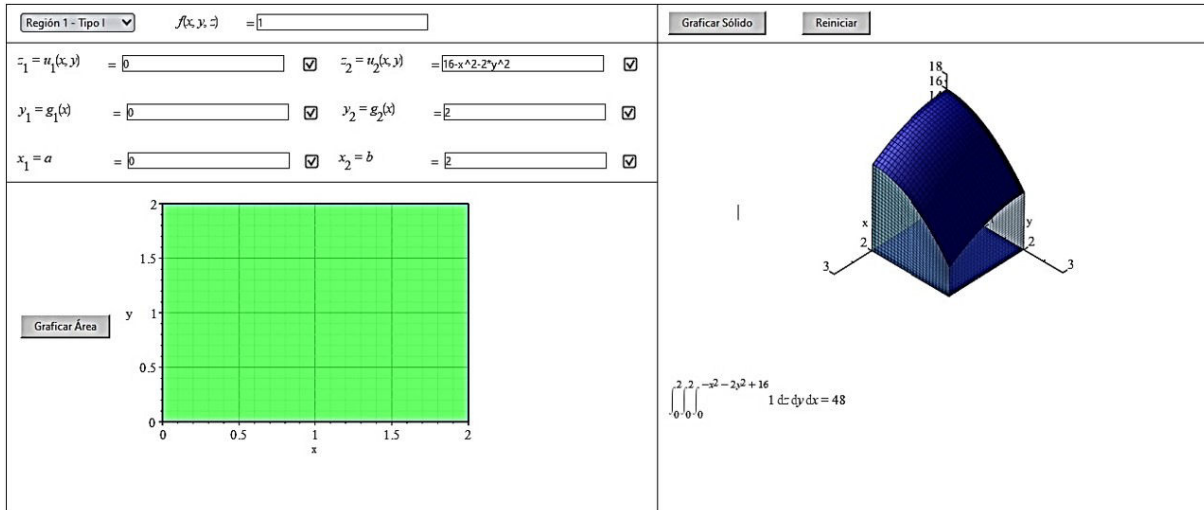


FIGURE 3. Sólido sobre región rectangular en la interfaz GUI. La superficie azul representa el paraboloides ingresado mediante $16 - x^2 - 2y^2$. El piso y el techo del sólido se muestran en un tono azul oscuro, lo que facilita distinguir claramente los límites inferior y superior de la región.

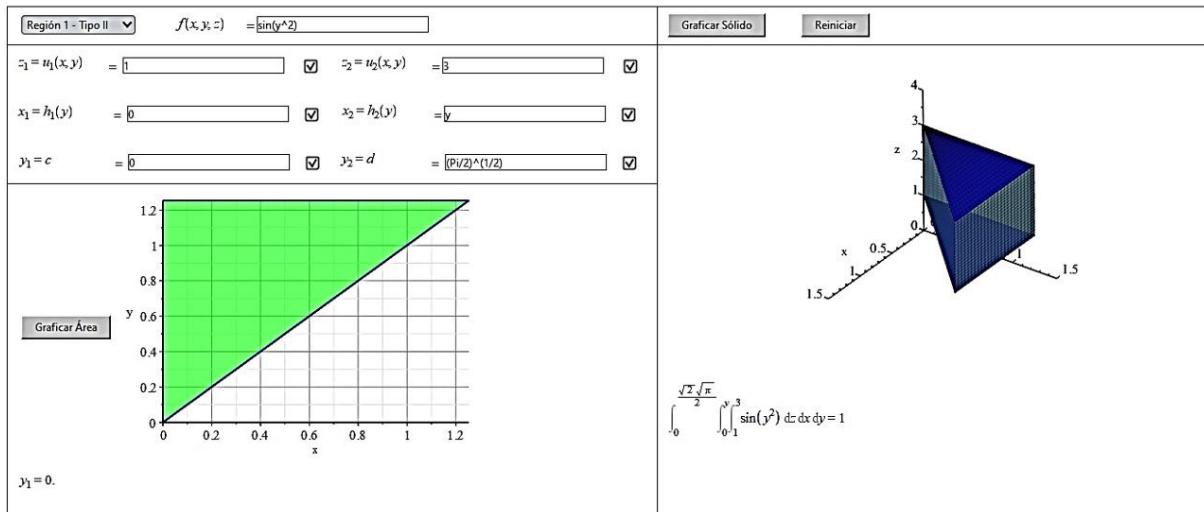


FIGURA 4. Sólido definido en una región de tipo II en la GUI. La sintaxis ingresada en los Text Area es $\sin(y^2)$ para $f(x, y, z)$ y $(\pi/2)^{1/2}$ para el límite superior en x .

plano XY no se refleja ningún cálculo adicional. El volumen obtenido es de 48 unidades cúbicas.

4.1.2. Caso 1-II: prisma triangular de densidad variable

La Fig. 4 corresponde a la evaluación de la función $f(x, y, z) = \sin(y^2)$ en el sólido limitado por los planos $z = 1, z = 3, y = x, y = 0, x = \sqrt{\pi/2}$ y $x = 0$ [13]. La región de integración de tipo II se define como:

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{\pi/2}; 0 \leq x \leq y; 1 \leq z \leq 3\}. \quad (9)$$

Debajo del gráfico del área se muestra la coordenada y del punto de intersección de las curvas, que corresponde a $y = 0$, mismo que puede visualizarse en el gráfico. El sólido resultante es un prisma triangular. Se resalta que este ejemplo es

muy didáctico y práctico para ilustrar la elección apropiada de los límites de integración. Como se muestra en la Fig. 4, al definir la región de tipo II la función es integrable a lo largo de todo el volumen, siendo el resultado de la integral equivalente a la unidad. No obstante, la región también se pudo haber definido de tipo I, pero la integral triple se reduciría a una forma no elemental, con un resultado no trivial.

4.2. Integración de regiones de tipo 2

4.2.1. Caso 2-I: cilindro elíptico cortado por un plano

La Fig. 5 muestra el sólido en el primer octante formado por el corte del cilindro elíptico $y^2 + 4z^2 = 16$ con el plano $x + y = 4$ [17]. La región de integración de tipo 2-I es:

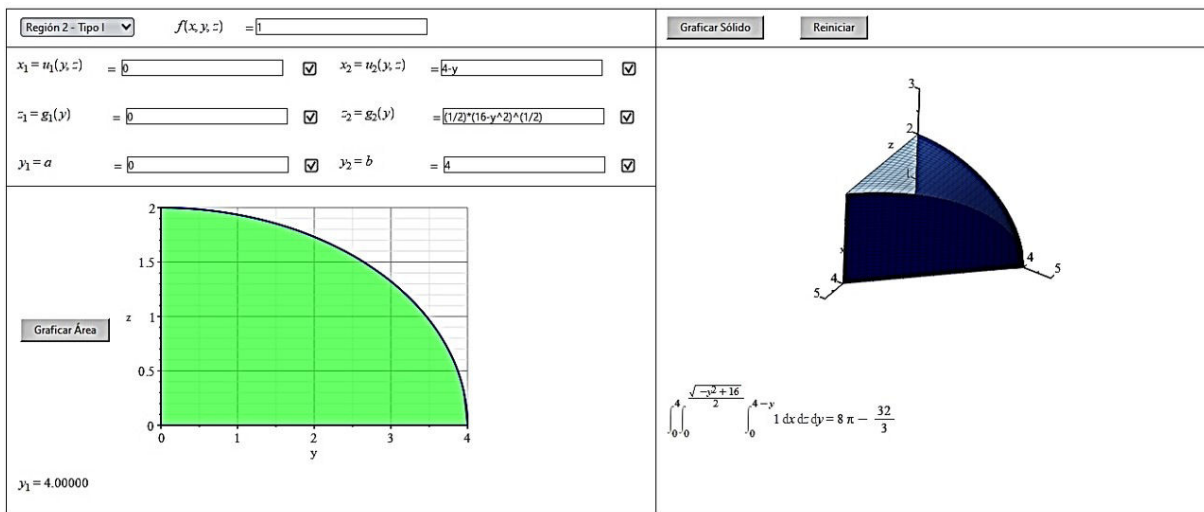


FIGURA 5. Volumen en el primer octante del cilindro elíptico cortado por un plano en la GUI. La sintaxis ingresada en los Text Area corresponde a $4 - y$ para el límite en la variable x , y a $(1/2) * (16 - y^2)^{(1/2)}$ para el límite superior en z . El Combo Box presenta la opción **Región 2 - Tipo I**. Las paredes frontal y trasera del sólido se muestran con una tonalidad azul más oscura, permitiendo identificar visualmente los límites definidos en x .

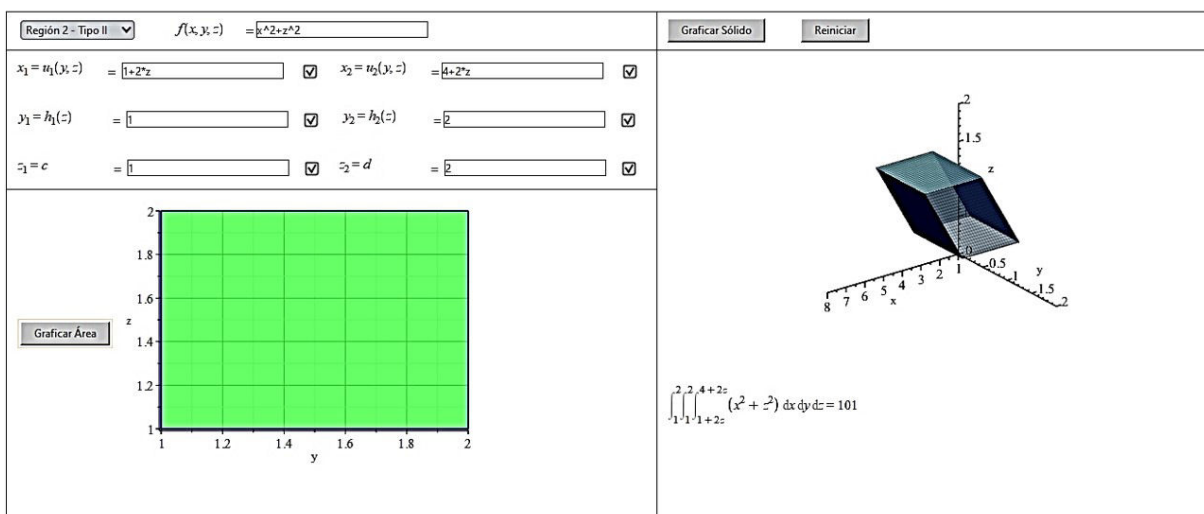


FIGURA 6. Momento de inercia respecto al eje y de un paralelepípedo en la GUI. La sintaxis ingresada en los Text Area corresponde a $1 + 2 * z$ y $4 + 2 * z$ para los límites en la variable x . El Combo Box presenta la opción **Región 2 - Tipo II**. Las caras diagonales se destacan con mayor intensidad, facilitando la identificación visual de los límites en x .

$$E = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq \frac{1}{2} \sqrt{16 - y^2}, 0 \leq x \leq 4 - y \right\}. \quad (10)$$

La interfaz permite representar con claridad los límites y visualizar el sólido generado, obteniéndose un volumen de $8\pi - 32/3$. Aunque las ecuaciones analíticas que definen las superficies son simples, su representación tridimensional puede resultar compleja sin un recurso computacional. El valor de $y_1 = 4$, mostrado debajo del gráfico del área en el plano YZ , corresponde al corte de la elipse con el eje y . Nótese que las etiquetas en Mathematical Expression si-

guen la notación presentada en la Tabla I para la región de tipo 2-II.

4.2.2. Caso 2-II: momento de inercia de un paralelepípedo

La Fig. 6 ilustra el cálculo del momento de inercia respecto al eje y de un paralelepípedo de densidad unitaria delimitado por los planos $z = 1, z = 2, y = 1, y = 2, x - 2z = 1$ y $x - 2z = 4$. La región de integración de tipo 2-II es:

$$E = \left\{ (x, y, z) \mid 1 \leq z \leq 2, 1 \leq y \leq 2, 1 + 2z \leq x \leq 4 + 2z \right\}. \quad (11)$$

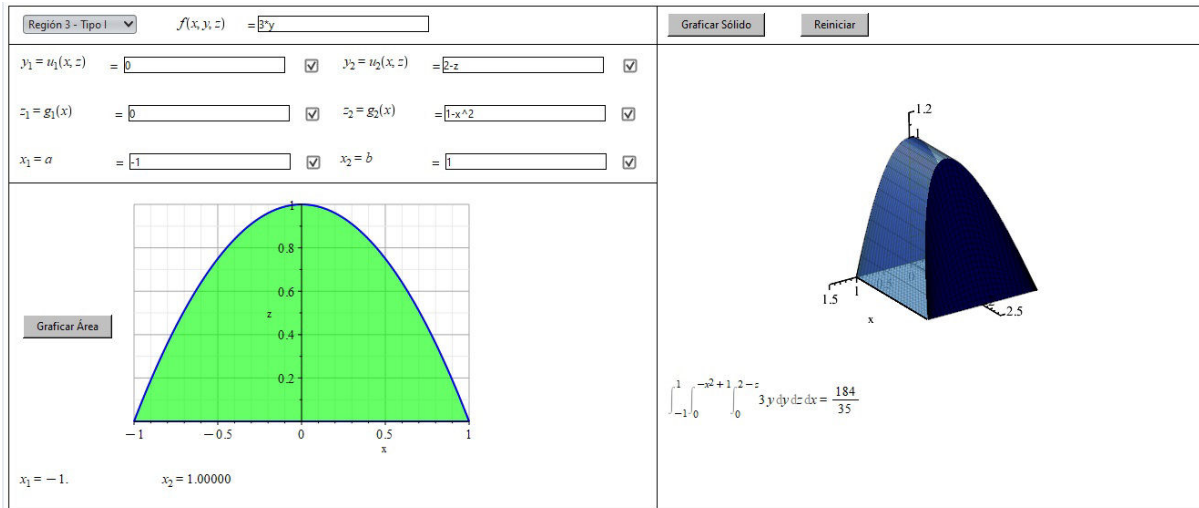


FIGURA 7. Cálculo del flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada en la GUI. La sintaxis mostrada en los Text Area corresponde a $3 * y$ para la función densidad, $2 - z$ para el límite superior en la variable y y $1 - x^2$ para el límite superior en la variable z . El Combo Box presenta la opción **Región 3 - Tipo I**. Las paredes izquierda y derecha del sólido se muestran con una tonalidad azul oscura, permitiendo identificar visualmente los límites definidos en y .

La evaluación de la integral indica que el momento de inercia respecto al eje y es de 101 unidades de masa por cuadrado de longitud. Este caso resulta particularmente instructivo para reflexionar sobre la elección conveniente de la región de integración que minimice el trabajo de cálculo, ya que la orientación de los planos inclinados sugiere naturalmente una región de tipo 2 para el cálculo directo de la magnitud física. Si bien la región podría haberse definido de tipo 1, esto implicaría dividir el sólido en tres partes, incrementando el trabajo de cálculo.

4.3. Integración de regiones de tipo 3

4.3.1. Caso 3-I: Flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada

En cálculo vectorial, el teorema de la divergencia relaciona la integral de flujo de un campo vectorial \mathbf{F} a través de una superficie cerrada S con una integral triple de la divergencia de \mathbf{F} sobre el sólido E encerrado por dicha superficie² [18]:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \text{div } \mathbf{F} dV. \tag{12}$$

Evaluar el flujo directamente mediante una integral de superficie puede resultar no trivial, pues requiere calcular normalizaciones y flujos sobre cada una de las caras que conforman S . En contraste, el teorema de la divergencia simplifica el procedimiento al convertir el problema en la integración de un escalar -la divergencia de \mathbf{F} - sobre el volumen, reduciendo todo el cálculo a una única integral triple.

La Fig. 7 ilustra el cálculo del flujo del campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy \mathbf{i} + (y^2 + e^{x^2}) \mathbf{j} + \sin(xy) \mathbf{k},$$

a través de la superficie cerrada S que delimita la región E , acotada por el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ y los planos $z = 0$, $y = 0$ y $y + z = 2$ [14]. La función densidad f ingresada en la interfaz corresponde a la divergencia del campo

($\text{div } \mathbf{F} = 3y$) y la región de integración, más apropiada para expresar E , es de tipo 3-I:

$$E = \left\{ (x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x^2, 0 \leq y \leq 2 - z \right\}. \tag{13}$$

Los valores $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$ mostrados debajo del gráfico de área, en el plano XZ , corresponden a las intersecciones de la parábola con el eje x . El valor del flujo a través de la superficie cerrada es de $184/35$ unidades de campo por cuadrado de longitud. Nótese que las etiquetas en *Mathematical Expression* siguen la notación presentada en la Tabla I para la región de tipo 3-I. Este caso ilustra la aplicación de la interfaz en problemas de cálculo vectorial.

4.3.2. Caso 3-II: bicilindro de Steinmetz

La Fig. 8 presenta el cálculo del volumen del sólido de Steinmetz formado por la intersección de los cilindros $y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + z^2 = 1$ [16–18]. La región de integración de tipo 3-II se expresa como:

$$E = \left\{ (x, y, z) \mid -1 \leq z \leq 1, -\sqrt{1 - z^2} \leq x \leq \sqrt{1 - z^2}, -\sqrt{1 - z^2} \leq y \leq \sqrt{1 - z^2} \right\}. \tag{14}$$

A pesar de su enunciado breve, este problema resulta complejo en su representación gráfica. Incluso en los textos clásicos suele recomendarse el uso de herramientas informáticas para su análisis. Debido a la simetría del sólido, la región también podría haberse definido de tipo 2-II. El volumen del sólido es $16/3$ unidades cúbicas.

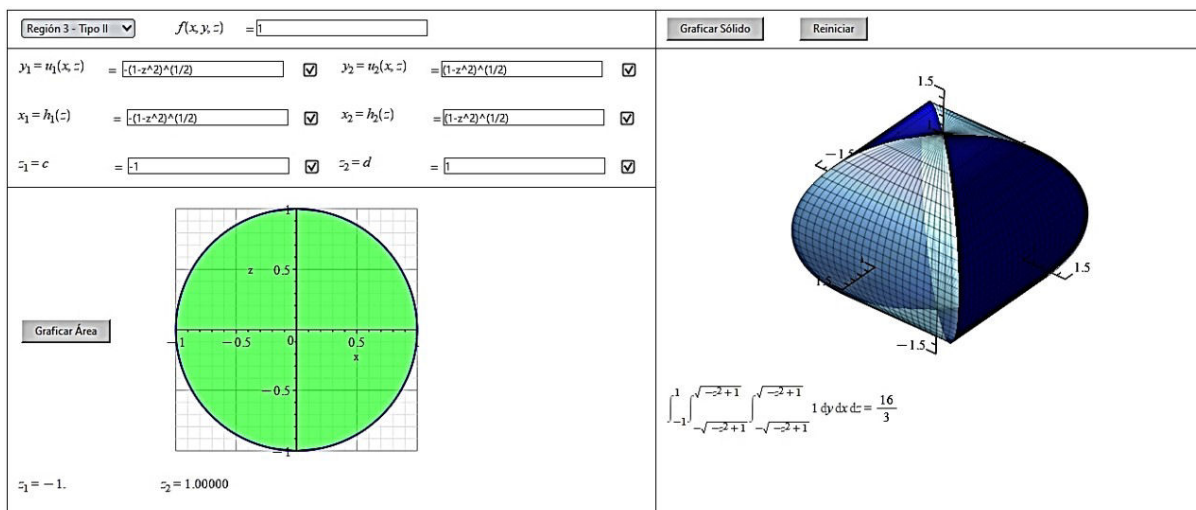


FIGURA 8. Visualización en la GUI del bicilindro de Steinmetz. La proyección circular de la región en el plano xz se muestra en el gráfico de área, mientras que el sólido tridimensional permite apreciar la simetría respecto al eje z . Las superficies laterales correspondientes a los cilindros $y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + z^2 = 1$ se representan con distintas tonalidades de azul, facilitando la identificación de las fronteras del sólido y la correcta interpretación de los límites de integración de la región tipo 3-II.

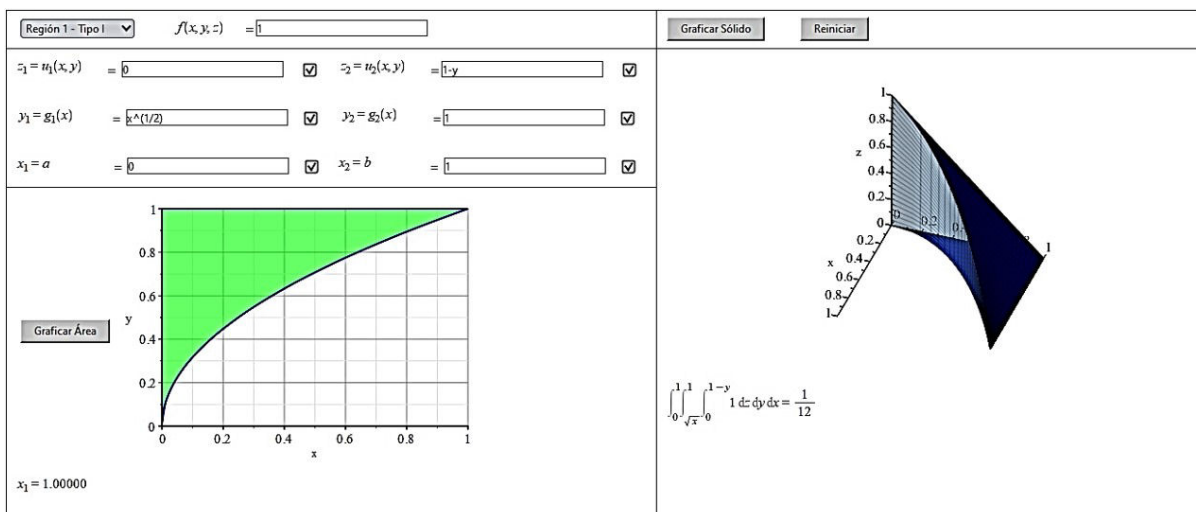


FIGURA 9. Representación del sólido en la GUI para la integral iterada en configuración inicial (orden 1, región tipo 1-I).

4.4. Integral iterada de 6 órdenes

Reescribir una integral triple en sus seis órdenes posibles constituye un ejercicio desafiante que requiere comprensión espacial de la región de integración. La Fig. 9 muestra la representación geométrica de la integral [14]:

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z) dz dy dx, \quad (15)$$

donde E es el sólido delimitado por los planos $x = 0, z = 0, z + y = 1$ y el cilindro parabólico $x = y^2$, con función densidad unitaria.

La integral en (15) corresponde naturalmente al orden 1 para una región de tipo 1-I (ver Tabla I). Para generar la visualización en la GUI, se selecciona **Región 1 - Tipo I** en el

Combo Box, se ingresan los límites correspondientes y se activan los botones **Graficar área** y **Graficar Sólido**. A partir de esta configuración inicial, las herramientas de visualización de la interfaz -rotación del sólido y remoción selectiva de caras- facilitan la identificación de los límites de integración para los cinco órdenes restantes.

Orden 2. La proyección en el plano XY mostrada en el gráfico de área permite identificar directamente los límites para reescribir la integral manteniendo z fijo. Se observa que y varía desde $y_1 = 0$ hasta $y_2 = 1$, mientras que x está delimitado por la recta $x_1 = 0$ y la parábola $x_2 = y^2$. La integral en el orden 2 resulta:

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} \int_0^{1-y} f(x, y, z) dz dx dy. \quad (16)$$

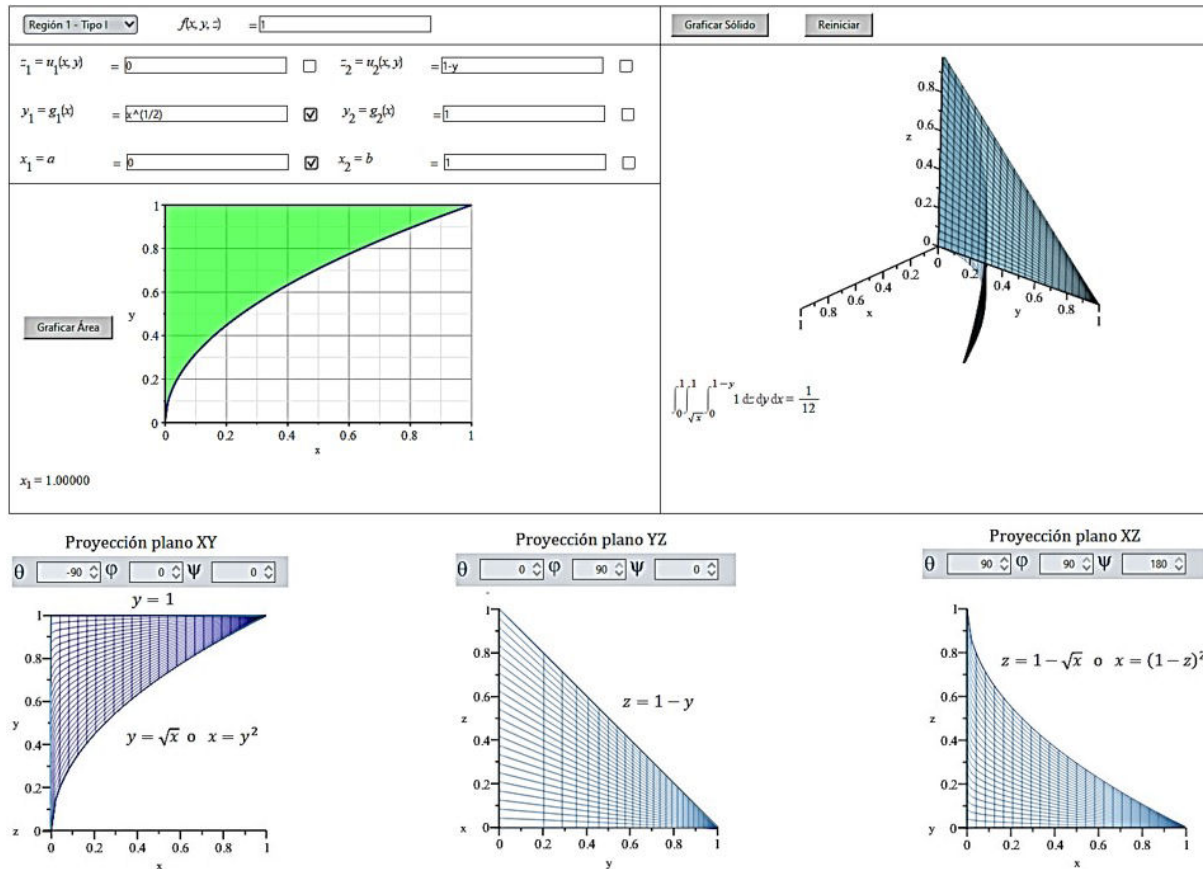


FIGURA 10. Remoción selectiva de caras en la GUI y proyecciones del sólido sobre los planos coordenados mediante rotación. Los ángulos de visualización indicados en cada proyección corresponden a las opciones nativas de rotación de Maple.

Orden 3. La Fig. 10 ilustra el cilindro parabólico $x = y^2$ y la proyección del sólido en el plano YZ , obtenida mediante la rotación del sólido o la remoción selectiva de caras para visualizar únicamente la superficie proyectada. Esta vista revela que y varía desde $y_1 = 0$ hasta $y_2 = 1$, que z se extiende desde $z_1 = 0$ hasta $z_2 = 1 - y$, mientras que x está acotado por atrás por el plano $x_1 = 0$ y por delante por el cilindro parabólico $x_2 = y^2$. La integral se reescribe como:

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{y^2} f(x, y, z) dx dz dy. \quad (17)$$

Orden 4. Manteniendo x fijo, la geometría regular del sólido sugiere que y puede expresarse directamente en función de z mediante la recta $y = 1 - z$. La integral resulta:

$$\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{y^2} f(x, y, z) dx dy dz. \quad (18)$$

Orden 5. La proyección del sólido en el plano XZ , obtenida rotando el sólido para una vista frontal desde el eje y negativo, revela una región delimitada por una parábola. Aunque gráficamente se observa la conexión entre z y x , la relación analítica no es evidente a partir de las superficies $z + y = 1$ y $x = y^2$. Eliminando la variable y entre ambas ecuaciones se

obtiene $x = (1 - z)^2$, que corresponde a la parábola visualizada. De la proyección se identifican los límites: x varía desde $x_1 = 0$ hasta $x_2 = 1$, y z desde $z_1 = 0$ hasta $z_2 = 1 - \sqrt{x}$. Para los límites en y , empleando la remoción selectiva de caras, se tiene que por la izquierda está el cilindro parabólico $y_1 = \sqrt{x}$ y por la derecha el plano $y_2 = 1 - z$:

$$\int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{x}} \int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x, y, z) dy dz dx. \quad (19)$$

Orden 6: Finalmente, manteniendo y fijo, la variable z varía desde $z_1 = 0$ hasta $z_2 = 1$, mientras que x se extiende desde la recta $x_1 = 0$ hasta la parábola $x_2 = (1 - z)^2$. La integral correspondiente se expresa como:

$$\int_0^1 \int_0^{(1-z)^2} \int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x, y, z) dy dx dz. \quad (20)$$

Una vez reescritas las seis integrales, los límites correspondientes a cada orden pueden ingresarse en la interfaz para verificar que generan el mismo sólido y el mismo resultado de la integral $1/12$, corroborando así la equivalencia de las expresiones. La capacidad de la GUI para remover selectivamente caras del sólido y rotar la visualización resulta fundamental en este proceso, permitiendo a los estudiantes explorar la geometría desde múltiples perspectivas y establecer

conexiones entre las representaciones gráficas y las expresiones analíticas de los límites de integración.

5. Aspectos a considerar y limitaciones

Al introducir los valores que definen la integral en los Text Area se debe tener especial cuidado en el uso de caracteres, notaciones y paréntesis. Deben introducirse las notaciones de texto plano que por defecto utiliza Maple, las cuales son similares a las estandarizadas en múltiples programas de programación y cálculo.

Si en los Text Area se ingresan funciones que no corresponden al tipo de región seleccionado, el programa no se ejecutará correctamente. Por ejemplo, en la opción **Región 1 - Tipo I**, los límites respecto a y deben ser funciones de x , no de y . Asimismo, las funciones que definen la región no deben presentar discontinuidades dentro del dominio especificado; de detectarse alguna, el programa no se ejecuta.

Si el integrando no tiene solución exacta, se muestra únicamente la representación analítica de la integral o resuelve solo la parte integrable, mostrando la integral que no puede resolverse. Aunque la definición de integral es clara respecto al orden de los límites, si estos se colocan intercambiados, el programa se ejecuta porque Maple los lee. En los gráficos e intersecciones es indiferente el orden y los grafica correctamente, pero puede proporcionar un resultado erróneo en la representación analítica de la integral y su evaluación.

Dado que la interfaz se elaboró en una hoja de trabajo de Maple, no se dispone de opciones de protección del archivo. Si el usuario no está familiarizado con Maple o con el manejo computacional, los componentes son sensibles a ser borrados o modificados accidentalmente, lo que puede alterar el funcionamiento de la hoja y su propósito.

6. Conclusiones

Se diseñó en una hoja de trabajo de Maple una interfaz para el análisis y visualización de integrales triples aplicable en cursos de cálculo multivariable, cálculo vectorial y en problemas de física. La interfaz permite abordar los problemas de ejemplo y propuestos sobre integrales triples en coordenadas rectangulares en regiones simples presentes en textos tradicionales, abarcando incluso aquellos donde el autor recomienda usar herramientas de graficación, quedando como tarea del estudiante completar los procedimientos intermedios de los ejercicios.

En la práctica docente, la interfaz no solo facilita la presentación de clases más atractivas e interactivas, sino que también optimiza el tiempo de clase, el cual puede ser destinado a retroalimentación y profundización de los contenidos. Asimismo, constituye un recurso de apoyo en la elaboración de diferentes exámenes con sus respectivas claves de respuestas. Se destaca también que, gracias a las opciones de desactivar las paredes del sólido mediante las Check Box, es posible ilustrar tanto superficies definidas sobre regiones planas como aquellas que resultan de la intersección entre ellas, ampliando sus aplicaciones didácticas.

Como trabajo futuro, se contempla extender la interfaz a integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas, así como desarrollar módulos complementarios para integrales de línea y superficie, completando así un conjunto de herramientas digitales para el curso completo de cálculo multivariable. Asimismo, se considera la implementación de versiones equivalentes en plataformas de software libre, como SageMath, Python o GeoGebra.

El archivo Maple Worksheet de la interfaz y los códigos implementados en el Combo Box y los Button se encuentran disponibles en: <https://doi.org/10.5281/zenodo.17258879>.

i. Para un campo vectorial $\mathbf{F} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$, la divergencia se define como $\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

1. J. Stewart, *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas*, 6th ed. (Cengage Learning, México, 2008).
2. R. A. Tarmizi, Visualizing students' difficulties in learning calculus, *Procedia Soc. Behav. Sci.* **8** (2010) 377, <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.053>
3. O. Iparraguirre-Villanueva, et al., Integration of GeoGebra Calculator 3D with Augmented Reality in Mathematics Education for an Immersive Learning Experience, *Int. J. Eng. Pedagog.* **14** (2024) 92, <https://doi.org/10.3991/ijep.v14i3.47323>
4. M. Y. Tufail and S. Gul, GUI of Complex plane on Excel spreadsheets, *Rev. Mex. Fis. E* **22** (2025) 010208, <https://doi.org/10.31349/RevMexFisE.22.010208>
5. F. Arriaga *et al.*, Implementación de una herramienta com-

putacional para el estudio de problemas de fuerzas centrales, *An. AFA* **30** (2018) 73, <https://doi.org/10.31527/analesafa.2018.29.3.73>

6. D. H. Penalver-Vidal, D. L. Romero-Antequera, and F. S. Granados-Agustín, Interface para esqueletizado y suavizado de interferogramas, *Rev. Mex. Fis. E* **59** (2013) 18-22, <https://rmf.smf.mx/ojs/index.php/rmf-e/article/view/4693>.
7. A. Razzak and Z. Uddin, GUI of vector analysis on spreadsheets for students and teachers, *Rev. Mex. Fis. E* **20** (2023) 010208, <https://doi.org/10.31349/RevMexFisE.20.010208>
8. S. Gul and M. Y. Tufail, GUI for conic sections: parabola, ellipse and hyperbola, *Rev. Mex. Fis. E* **21** (2024) 010203, <https://doi.org/10.31349/RevMexFisE.21.010203>

9. N. Karjanto and H. S. Husain, Not Another Computer Algebra System: Highlighting wxMaxima in Calculus, *Mathematics* **9** (2021) 1317, <https://doi.org/10.3390/math9121317>
10. Y. Montilla-López, F. Suárez-Carreño, and B. Linares-Rodríguez, Visualización del campo electrostático con Excel y Maple para la enseñanza en ingeniería, *Rev. Bras. Ensino Fis.* **47** (2025) e20240362, <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2024-0362>
11. G. Ortigoza-Capetillo, Animaciones en Matlab y Maple de ecuaciones diferenciales parciales de la física-matemática, *Rev. Mex. Fis. E* **53** (2007) 56, <https://rmf.smf.mx/ojs/index.php/rmf-e/article/view/4539>.
12. P. Carvalho *et al.*, Exploring concepts of definite integrals in two variables using GeoGebra, *Res. Discov. Educ.* **3** (2024) 189, <https://doi.org/10.1007/s44217-024-00290-9>
13. R. Larson and B. H. Edwards, Cálculo 2 de varias variables, 9th ed. (McGraw-Hill Interamericana, México, 2010).
14. J. Stewart, Cálculo de varias variables: Trascendentes tempranas, 6th ed. (Cengage Learning, México, 2008).
15. G. Strang and E. J. Herman, Cálculo volumen 3 (OpenStax, Houston, 2022), <https://openstax.org/details/books/calculus-volume-3>
16. C. H. Edwards and D. E. Penney, Cálculo con geometría analítica (Pearson Educación, México, 1996).
17. G. B. Thomas *et al.*, Thomas' Calculus, 14th ed. (Pearson, Boston, 2018).
18. L. Leithold, El cálculo, 7th ed. (Oxford University Press - Harla México, México, 1998).