

Logros en ciencias de la complejidad en el IFUNAM: Una recopilación incompleta

D. Boyer

*Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México,
04510 Ciudad de México, México.*

Received 25 April 2020; accepted 20 May 2020

A pesar de que la complejidad se suele considerar como un paradigma joven, que irrumpió hace poco en áreas muy diversas de la ciencia, la investigación en sistemas complejos tiene una larga tradición en México. Se inició en el Instituto de Física en los años 70. A lo largo de cuatro décadas, Germinal Cocho fue un actor central del desarrollo de las ciencias de la complejidad en el país, mediante un incansable labor docente, de divulgación, de formación y de creación de interés por la inter-disciplina, dentro y fuera de la UNAM. Aquí presentamos una breve revisión, necesariamente incompleta, de logros obtenidos en varias áreas de la complejidad en el Instituto de Física por Germinal Cocho y sus numerosos colaboradores y colegas.

Descriptores: Sistemas complejos; dinámica no lineal; redes; procesos estocásticos.

Despite the fact that complexity is often seen as a young paradigm, which recently burst into very diverse areas of science, research on complex systems has a long tradition in Mexico. It began at the Institute of Physics in the 1970s. Over four decades, Germinal Cocho was a central actor in the development of the complexity sciences in the country, through tireless teaching, dissemination, training and creation of interest in inter-discipline, inside and outside UNAM. Here we present a brief and necessarily incomplete review of achievements in various areas of complexity at the Institute of Physics by Germinal Cocho and his numerous collaborators and colleagues.

Keywords: Complex systems; nonlinear dynamics; networks; stochastic processes.

PACS: 89.75.-k; 89.75.Hc; 89.75.Kd; 05.45.-a; 02.50.-r; 87.23.-n; 87.17.-d

1. Los precursores

En 1973, es decir, 17 años antes de la creación del Departamento de Sistemas Complejos del Instituto de Física (IF), Rafael Pérez Pascual publica durante una estancia posdoctoral en Rochester una carta en la revista *Nature*, en colaboración con Leon Glass. En esta contribución se muestra la capacidad del cerebro de integrar correlaciones locales para visualizar formas globales. Esto permite que la información más relevante sobre las trayectorias de sistemas dinámicos bi-dimensionales se pueda revelar con patrones de interferencia de puntos aleatorios [1]. Estos patrones de interferencia resultan de gran interés para su uso como estímulos en experimentos neuro-fisiológicos. Este acontecimiento se puede considerar quizás como el punto de partida de la investigación en dinámica no lineal y física biológica en el IF. Durante los siguientes años, Pérez Pascual y Glass publicarán varios artículos, entre los cuales cabe destacar una carta en *Physical Review Letters* en 1982, demostrando que los osciladores no lineales forzados periódicamente exhiben una gran riqueza de fenómenos genéricos, tales como enganche de fase, bi-estabilidad, bifurcaciones de duplicación de periodo y caos [2]. Posteriormente, los autores observarán estos mismos fenómenos en cultivos de células cardiacas periódicamente estimuladas.

Un poco más tarde, Jorge Lomnitz Adler, físico nuclear de formación, se empieza a interesar por las propiedades dinámicas y estadísticas de los sismos, las cuales son básicamente desconocidas en esa época. Él es pionero en proponer una analogía entre la sismología y los fenómenos críticos de

la termodinámica estadística. En 1985, introduce un modelo de fallas elementales acopladas entre sí, donde emplea la teoría de la percolación para predecir la posibilidad de sismos de enorme magnitud respecto al promedio y derivar la ley empírica de Gutenberg-Richter [3]. Esta ley relaciona la frecuencia de los sismos con su magnitud y Lomnitz predice además el valor correcto de su parámetro principal para regiones sísmicamente activas. Refinando su propuesta, Lomnitz introduce a principios de los años 90 una serie de modelos de fracturas sísmicas basados en autómatas celulares [4], es decir, procesos espacio-temporales discretos que siguen reglas simples de evolución. Así mismo, clasifica sus modelos de fallas en no menos de 40 clases, de las cuales sólo unas pocas exhiben distribuciones en leyes de potencia inversa y por lo tanto pueden reproducir observaciones. Es notable que Lomnitz llegue a estos resultados usando la teoría del escalamiento de los fenómenos críticos y haciendo analogías con las transiciones de fase líquido-gas. Su clasificación incluye también como caso particular el modelo de avalanchas en pilas de arena introducido unos pocos años antes por Bak, Tang y Wiesenfeld, el cual marcó el inicio de la aventura de los fenómenos críticos autoorganizados. Jorge Lomnitz fallece prematuramente a finales del año 1993, dos meses después de la publicación de su artículo [4]. A partir de 1996 el IF y la Academia Mexicana de Ciencias otorgarán el premio que lleva su nombre a jóvenes científicos con contribuciones destacadas en dinámica no lineal y campos afines a los sistemas complejos.

Entender el mundo biológico desde un punto de vista físico es uno de los retos más grandes en el área de la com-

plejidad. En los años 80, Germinal Cocho se da cuenta de la gran importancia de las restricciones físicas, tanto estructurales como dinámicas, que las moléculas y las células imponen sobre los procesos de evolución y morfogénesis en los organismos vivos. En colaboración con Rafael Pérez Pascual y José Luis Rius, Germinal Cocho se enfoca en el estudio de los patrones de colores de la piel de animales como problema paradigmático de auto-organización biológica. Los autores suponen que los patrones corresponden a estados estables de mínima energía en películas compuestas de dos tipos de células, donde el primer tipo es homofílico, es decir, con interacciones de señalización atractivas entre células pero no con el medio extracelular, mientras que las células del segundo tipo tienden a repelerse y adherirse a la matriz extracelular [5]. Ellos modelan este sistema mediante unidades discretas y un modelo de Ising en un campo externo con interacciones que decaen con la distancia. Se muestra que la minimización de la energía da lugar a dominios de células separados casi periódicamente por células del otro tipo, las cuales deben estar lo más separadas posible dadas ciertas restricciones. En dos dimensiones, el carácter discreto del sistema da lugar a patrones intrincadamente ordenados, cuya complejidad aumenta con el alcance de las interacciones. El modelo reproduce exitosamente patrones periódicos de piel de ratones, felinos y serpientes. Otros patrones menos ordenados se pueden explicar por un movimiento errático de las células durante una etapa temprana del desarrollo; luego éstas se “congelan” en posiciones fijas desordenadas. Estableciendo una analogía entre el movimiento celular y a una temperatura, los autores de [5] notan que la distribución espacial de los pigmentos de la piel de ciertas lagartijas, como el monstruo de Gila, es parecida a los dominios fractales de espines del modelo de Ising cerca de su temperatura crítica, donde ocurre una transición de fase orden-desorden. Ellos exploran entonces otra hipótesis, inspirada de los procesos de solidificación fuera de equilibrio, donde la formación de patrones es rápida, completamente fuera de equilibrio y por lo tanto dominada por efectos dinámicos y no por principios de minimización. Así mismo, los autores emplean autómatas celulares con reglas sencillas que generan arreglos sucesivos de células para formar patrones bidimensionales. Además de reproducir los patrones de rayas y rombos de las serpientes, los autómatas generan patrones que empiezan con puntos en la parte alta del cuerpo y se transforman en rayas en la parte baja, como ocurre en muchos peces. Estas ideas novedosas serán ampliamente retomadas por la comunidad científica de la dinámica no lineal en años posteriores.

2. Caos, difusión y anomalías

El estudio de los sistemas dinámicos nos enseña que los patrones más complicados pueden tener su origen en reglas muy simples. Por ejemplo, partículas con dinámicas deterministas regulares pueden adquirir repentinamente comportamientos caóticos cuando un parámetro atraviesa un umbral. Un cambio de este tipo puede traer consecuencias importantes sobre

las propiedades estadísticas de transporte de estas partículas. Por otra parte, cuando un sistema no lineal se encuentra sometido a una fuerza periódica en el tiempo y por lo tanto es llevado fuera de sus estados de equilibrio, éste puede moverse en una dirección dada aún cuando el forzamiento sea completamente simétrico. Este fenómeno es el bien conocido efecto matraca, predicho por Feynman en los 60. Este movimiento dirigido puede ocurrir por ejemplo cuando existe una asimetría espacial en un potencial de interacción, a pesar de que el sistema sienta una fuerza media nula. En el año 2000, José Luis Mateos publica una carta en *Physical Review Letters* donde estudia la dinámica newtoniana de una partícula en un potencial periódico asimétrico y sujeta a una fuerza externa periódica en el tiempo [6]. Debido al forzamiento periódico, las trayectorias se vuelven rápidamente caóticas y las partículas adquieren una velocidad promedio positiva por el efecto matraca. Sin embargo, por encima de una amplitud de forzamiento crítica, Mateos descubre que el signo de la corriente se invierte y que esta transición coincide con una segunda transición caos-periodicidad para las velocidades de la partícula. Cerca de la transición del lado caótico, la dinámica combina episodios periódicos y caóticos (régimen de intermitencia), y la difusión resultante es anómala, es decir, muy diferente a la del movimiento browniano, el proceso difusivo clásico de la física. Del lado periódico, de periodo cuatro, la velocidad media es negativa. En los siguientes años, este estudio atraerá la atención de la comunidad científica puesto que permite entender con un modelo simple un mecanismo básico de inversión de la corriente en sistemas fuera de equilibrio, lo cual tiene diversas aplicaciones, desde la segregación de partículas de masas diferentes hasta problemas de uniones de Josephson en materia condensada.

A principios de los años 2000, Alberto Robledo se interesa en aplicar los métodos del Grupo de Renormalización de la física estadística al estudio de las dinámicas de sistemas no lineales que se encuentran en el borde del caos. En colaboración con Fulvio Baldovin, en particular, demuestra que la sensibilidad a las condiciones iniciales del bien conocido mapa logístico no es exponencial en el borde del caos, sino dada por un crecimiento q -exponencial, es decir, una ley de potencia del tiempo [7]. Estos autores determinan también que el nuevo exponente de Lyapunov asociado a este crecimiento es igual a una tasa de producción de entropía no-extensiva, estableciendo de esta manera un vínculo fértil entre el caos determinista y extensiones de la física estadística de Boltzmann-Gibbs. Se descubrieron luego analogías entre estas transiciones hacia el caos y varias transiciones críticas de la física, como la transición vítrea. Posteriormente, estas analogías serán de gran utilidad para estudiar problemas interdisciplinarios como la criticalidad auto-organizada, las redes complejas, la teoría de juegos, la evolución de sistemas ecológicos, o las distribuciones de rango de tipo Zipf-Benford, que son algunos temas que abordaremos más adelante.

También a principios de este siglo, Gabriel Ramos Fernández, entonces estudiante de doctorado en biología

en la Universidad de Pensilvania, realiza, por invitación de Octavio Miramontes, una estancia de investigación de tres meses en el Departamento de Sistemas Complejos del IF con el apoyo de una cátedra Tomás Brody. Éste es el inicio de una colaboración que involucrará varios investigadores del Departamento, entre ellos Germinal Cocho, y que desembocará en varias colaboraciones internacionales. Ramos Fernández lleva a cabo trabajos de campo sobre monos araña en la reserva Punta Laguna en la península de Yucatán. Analizando datos con José Luis Mateos, Octavio Miramontes, Germinal Cocho, Hernán Larralde y Bárbara Ayala, advierten que las trayectorias que recorren estos animales son erráticas [8], pero no se parecen a movimientos brownianos. Los movimientos se asemejan más bien a caminatas de Lévy, esto es, procesos conformados por una sucesión de desplazamientos aleatorios de longitudes muy variables sin una escala característica, donde los pasos más largos son menos probables pero dominan las trayectorias. Estos procesos son conocidos por generar una difusión anómala no gaussiana, con propiedades fractales y que ha sido de utilidad, por ejemplo, para modelar el transporte turbulento o series financieras. Su observación en un contexto ecológico constituye una novedad y provoca cierta inquietud: los autores de [8] plantean la hipótesis, sustentada en la literatura, de que los patrones de Lévy representan una estrategia óptima de búsqueda aleatoria para encontrar alimentos. En un estudio posterior, los mismos autores y Denis Boyer exponen un modelo en el cual un caminante con conocimiento de su entorno va de un sitio (árbol con frutas) a otro siguiendo reglas deterministas, con el propósito de minimizar la distancia recorrida y maximizar la cantidad de recursos obtenidos [9]. Cuando los sitios están distribuidos al azar y contienen recursos en cantidades muy variables, las trayectorias generadas son efectivamente de tipo Lévy. Con la distribución de riqueza de recursos del bosque de Yucatán, que es conocida, las caminatas de Lévy generadas por el modelo son muy parecidas a las trayectorias reales de los monos. Este modelo de caminatas deterministas reproduce también correctamente la distribución de los tiempos de permanencia en cada sitio y predice que las trayectorias maximizan la distancia de dispersión de semillas por los animales, lo cual constituye un mecanismo importante de estructuración espacial y de conservación en comunidades vegetales.

En los años siguientes, la literatura sobre procesos de Lévy aumentará considerablemente y en este tema los monos mexicanos serán un ejemplo clásico. Además, este sistema será de utilidad para entender la movilidad humana. En 2011, Boyer, en colaboración con los biólogos Peter Walsh (Cambridge) y Meg Crofoot (UC Davis), encontró similitudes entre la movilidad individual de primates y de humanos ciudadanos [10]. En ambos casos, el análisis de datos revela que los individuos desarrollan con el tiempo sus actividades en áreas bastante limitadas y que, en estas áreas, visitan diferentes lugares con frecuencias que varían mucho de un lugar al otro. Estas frecuencias siguen una distribución en leyes de potencia, análoga a una distribución de Lévy o de Zipf. En

una carta en *Physical Review Letters*, Denis Boyer y Citlali Solís Salas muestran que estas mismas propiedades pueden emerger en un modelo de caminante aleatorio con memoria, donde los sitios visitados en el pasado se vuelven a visitar de manera preferente [10]. En particular, este modelo analíticamente soluble genera una difusión ultra-lenta (logarítmica con el tiempo), en contraste con la bien conocida ley lineal con el tiempo de Smoluchowski-Einstein para la difusión sin memoria.

3. El “Germi-fit”

A principios del siglo XXI, Germinal Cocho no deja de interrogarse sobre el origen de las distribuciones en leyes de potencia y su carácter universal. Él concentra sus esfuerzos sobre las distribuciones de rango. Un ejemplo bien conocido es la ley empírica de Zipf: si se ordenan las diferentes palabras que aparecen en un texto de la más frecuente (de rango 1) a la menos frecuente, la frecuencia de aparición de cada palabra en el texto es aproximadamente inversamente proporcional a su rango. En colaboración con Gustavo Martínez Mekler, Roberto Álvarez, Manuel Beltrán del Río, Ricardo Mansilla y Pedro Miramontes, se dedican a analizar una variedad de distribuciones que provienen de la física, la biología, la lingüística, las ciencias sociales e incluso de obras de arte [11]. Ellos descubren que las tan usadas leyes de Zipf no ofrecen una descripción satisfactoria en la mayoría de los casos: la ley de potencia describe bien el cuerpo de la distribución pero no la cola, donde se encuentran los elementos de rangos altos o menos frecuentes. Los autores introducen una función beta generalizada de dos parámetros, para la cual acuñan el término DGBD (por sus siglas en inglés). De manera no-oficial, algunos llamarán esta función el “Germi-fit”. Esta descripción recupera las leyes de potencia y exponenciales como casos particulares. Empleando la DGBD, se obtiene una muy buena descripción de distribuciones de secuencias genéticas, ocurrencia de notas en composiciones musicales, áreas en cuadros de pintores, áreas de distribución de especies, rankings mundiales de universidades, de revistas por factor de impacto, poblaciones de municipios, rangos de nodos por sus conexiones en redes complejas, entre otros. Se especula que la DGBD puede emerger cuando subsistemas o procesos heterogéneos múltiples se correlacionan entre sí a través de restricciones, como sucede en muchos sistemas complejos.

Gerardo García Naumis y Germinal Cocho ilustran esta idea con un ejemplo sencillo: ellos muestran que el ordenamiento de productos de números tomados de un ensamble finito, donde el número de factores es constante, lleva a distribuciones exponenciales “estiradas” que se describen bien con la DGBD [12]. Posteriormente, Germinal Cocho, Jorge Flores, Carlos Gershenson, Carlos Pineda y Sergio Sánchez retoman el problema de Zipf en lingüística, estudiando por primera vez cómo el rango de las palabras cambiaron a lo largo de los siglos en diferentes idiomas europeos [13]. El rango de las palabras más usadas cambia muy poco

en el tiempo, mientras que las palabras del cuerpo del idioma tienen variaciones de rango más grandes. Las palabras de la cola de la distribución, que son las más específicas, presentan variaciones considerables de rango. Los autores simulan la evolución de un idioma con un modelo estocástico, donde la frecuencia de uso de cada palabra sigue una caminata aleatoria gaussiana con variaciones proporcionales al rango. Estos procesos explican la universalidad observada en la diversidad de rangos en idiomas.

Cabe resaltar que este desarrollo de una descripción estadística y estocástica de la lingüística, utilizando métodos de la física estadística, fue uno de los últimos intereses de Germinal Cocho. Su último artículo fue publicado en junio de 2019, poco después de su muerte, en colaboración con Rosalío Rodríguez y los autores de [13]. En ese estudio se modelaron las variaciones temporales del rango de una palabra como un proceso markoviano descrito por una ecuación maestra [14]. Después de derivar la ecuación de Fokker-Planck asociada, se encontraron tanto soluciones estacionarias como dependientes del tiempo, que permitieron analizar las diferencias entre la frecuencia de aparición de una palabra y su ley DGBD asintótica. Para rangos intermedios, la dinámica de rango es muy similar entre idiomas indoeuropeos y bien descrita por el modelo estocástico.

4. El nuevo paradigma de las redes complejas

Desde hace más de dos décadas, la teoría de las redes complejas está cambiando la manera de describir y entender los sistemas complejos. En sistemas sociales, por ejemplo, diferentes tipos de interacciones entre personas definen conexiones que pueden variar considerablemente en cantidad e intensidad de una persona a otra. La heterogeneidad y la topología de las interacciones juegan un papel esencial en los fenómenos colectivos y dinámicos que pueden desenvolverse en una red. En 2002, Octavio Miramontes y Bartolo Luque (Madrid) investigan teóricamente por primera vez el efecto de la movilidad de largo alcance sobre la propagación de una enfermedad en una población, un problema lamentablemente de gran actualidad en este año 2020 [15]. Cuando los individuos se mueven localmente, tienen un número limitado de interacciones. Si de vez en cuando hacen viajes a lugares lejanos, éstos interactúan con nuevos vecinos y cambian las probabilidades de infección. Miramontes y Luque muestran que basta que una fracción muy pequeña de agentes viajen para que el umbral epidémico se rebase y una enfermedad se vuelva endémica en todo el sistema. Este fenómeno está relacionado con el efecto de mundo pequeño en redes complejas: si se añade una pequeña fracción de conexiones de largo alcance al azar en una red regular cristalina, la distancia media (topológica) entre dos nodos de la red decrece drásticamente. Unos años más tarde, Gabriel Ramos Fernández, Denis Boyer y Vian Gómez llevan a cabo el primer estudio dedicado al análisis de redes de contactos formadas por sistemas de agentes móviles [16]. En su modelo, los agentes navegan en un ambiente complejo que contiene sitios con recursos;

se definen conexiones entre agentes cuando coinciden en un mismo lugar, aunque no interactúen explícitamente. Resulta que ciertos ambientes favorecen la emergencia de redes de contactos complejas, caracterizadas por una alta cohesión, una distribución heterogénea del número de conexiones por nodo, la presencia de muchos triángulos y la formación de “cliques” o comunidades compuestas de agentes mucho más conectados entre sí que con los demás. Estas propiedades se observan en casi todas las redes sociales reales. Este modelo permitió reproducir propiedades de redes sociales en primates y entender las restricciones impuestas por el medio ambiente sobre la estructuración social de grupos.

En 2009, Rafael Barrio en colaboración con Gerardo Iñiguez, János Kertész y Kimmo Kaski (Helsinki) propone un modelo de formación de opiniones en sociedades humanas. En una red, cada individuo modifica su opinión como resultado de las interacciones con sus vecinos, además rompe conexiones con vecinos de opiniones demasiado diferentes y establece nuevos enlaces más afines a través de amigos o al azar [17]. En esta coevolución de opiniones y redes la separación entre escalas de tiempo es crucial. Cuando la tasa de formación o ruptura de conexiones es mucho más lenta que la dinámica de opinión, la red se auto-organiza en varias comunidades formadas por agentes que alcanzan un consenso, con opiniones cercanas. Con un modelo similar, Barrio, Dunbar (Oxford) y colaboradores estudiaron luego los efectos de las mentiras sobre la fragmentación de redes sociales. Ellos distinguen dos tipos de opiniones: las públicas y las privadas; así los enlaces entre agentes se refuerzan o debilitan según la diferencia entre sus opiniones públicas. Las simulaciones muestran que, sorprendentemente, cierta cantidad de mentiras permite a las redes alcanzar una máxima cohesión [18]. También en temas de dinámica social, en 2014, Marcelo del Castillo y colaboradores ponen en evidencia el carácter intermitente en el tiempo de los conflictos violentos entre humanos. Durante un conflicto, los intervalos de tiempo que separan los episodios de pérdidas de vidas humanas siguen una distribución caracterizada por dos leyes de potencia, la cual parece ser universal puesto que resulta ser la misma para guerras en épocas y lugares muy diferentes [19].

Cabe mencionar de igual manera la gran importancia de la teoría de las redes complejas en el estudio y el entendimiento de la biología de sistemas, donde uno de los principales problemas no resueltos es de entender cómo la información contenida en los genes se traduce en fenotipos para un organismo. La dinámica de expresión de los genes puede ser modelada con redes de regulación donde los genes interactúan unos con otros por activación o inhibición a través de tablas lógicas, de manera similar a un autómata celular. Las células, inicialmente indiferenciadas, pueden alcanzar con el tiempo distintos estados estacionarios correspondientes a tipos celulares, los cuales se pueden ver como los atractores o “mínimos de energía” de un sistema dinámico de muy alta dimensión. Entre los diversos estudios de importancia que se realizan en el IF sobre este tema, en 2012, Carlos Villarreal, en colaboración con Pablo Padilla del IIMAS y Elena

Álvarez-Buylla del IE, propone un método estocástico para construir tal paisaje de energía para cualquier red de regulación [20]. Ellos aplican con éxito su método a la flor *Arabidopsis thaliana*, cuya red de regulación genética es conocida, recuperando así los distintos tipos de células correspondientes a diferentes órganos (pétalos, carpelos, sépalos ...), tanto en flores silvestres como en mutantes. Además reproducen la secuencia temporal con la cual estas diferentes configuraciones se alcanzan en plantas reales.

En un contexto muy diferente, Alberto Robledo se propuso usar en el 2011 herramientas de redes complejas para re-visitar la dinámica cerca de los atractores caóticos y de esta manera poner el caos en otra perspectiva [21]. En colaboración con Lucas Lacasa, Bartolo Luque y Fernando Ballesteros, él aplicó el llamado algoritmo de “visibilidad horizontal” que transforma cualquier serie de tiempo discreta (ahí la trayectoria caótica de un mapa) en una red, donde los

nodos representan las entradas de la serie de tiempo. Usando técnicas del grupo de renormalización, los autores encuentran relaciones notables entre los sistemas dinámicos no lineales y las redes complejas. En particular, las redes generadas por el atractor de Feigenbaum muestran características universales. Su distribución de grado puede ser calculada y estas redes optimizan su entropía.

5. Conclusión

Sería necesario mucho más espacio para poder mencionar todos los trabajos sobresalientes sobre sistemas complejos producidos en el entorno de Germinal Cocho. Con esta breve recopilación se buscó hacer patente la vitalidad y variedad de la investigación en esta área a lo largo de los años, que debe mucho a la pasión y vitalidad de pioneros como Germinal.

1. L. Glass and R. Pérez-Pascual, Perception of random dot interference patterns, *Nature* **246** (1973) 360. <https://doi.org/10.1038/246360a0>
2. L. Glass and R. Pérez-Pascual, Fine structure of phase locking, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1772. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.48.1772>
3. J. Lomnitz-Adler, Asperity models and characteristic earthquakes, *Geophys. J. Inter.* **83** (1985) 435. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1985.tb06496.x>
4. J. Lomnitz-Adler, Automaton models of seismic fracture: constraints imposed by the magnitude-frequency relation, *J. Geophys. Res.* **98** (1993) 17745. <https://doi.org/10.1029/93JB01390>
5. G. Cocho, R. Pérez-Pascual, and J. L. Rius, Discrete systems, cell-cell interactions and color pattern of animals. I. Conflicting dynamics and pattern formation, *J. Theo. Bio.* **125** (1987) 419; [https://doi.org/10.1016/S0022-5193\(87\)80211-4](https://doi.org/10.1016/S0022-5193(87)80211-4) id. II. Clonal theory and cellular automata, 437. [https://doi.org/10.1016/S0022-5193\(87\)80212-6](https://doi.org/10.1016/S0022-5193(87)80212-6)
6. J. L. Mateos, Chaotic Transport and Current Reversal in Deterministic Ratchets, *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 258. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.258>
7. F. Baldwin and R. Robledo, Universal renormalization-group dynamics at the onset of chaos in logistic maps and nonextensive statistical mechanics, *Phys. Rev. E* **66** (2002) 045104(R); <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.66.045104> id., Nonextensive Pesin identity: *Exact renormalization group analytical results for the dynamics at the edge of chaos of the logistic map*, id. **69** (2004) 045202(R). <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.69.045202>
8. G. Ramos-Fernández *et al.*, Lévy walk patterns in the foraging movements of spider monkeys (*Ateles geoffroyi*), *Behav. Ecol. Sociobiol.* **55** (2004) 223. <https://doi.org/10.1007/s00265-003-0700-6>
9. D. Boyer *et al.*, Scale-free foraging by primates emerges from their interaction with a complex environment, *Proc. R. Soc. Lond. B* **273** (2006) 1743. <https://doi.org/10.1098/rspb.2005.3462>
10. D. Boyer, M. C. Crofoot, and P. Walsh, Non-random walks in monkeys and humans, *J. R. Soc. Interface*, rsif20110582 (2011) <https://doi.org/10.1098/rsif.2011.0582>; D. Boyer, C. Solis-Salas, Random walks with preferential relocations to places visited in the past and their application to biology, *Phys. Rev. Lett.* **112** (2014) 240601. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.240601>
11. G. Martínez-Mekler, R. A. Martínez, M. B. Beltrán del Río, R. Mansilla, P. Miramontes, and G. Cocho, Universality of rank-ordering distributions in the arts and sciences, *PLoS ONE* **4** (2009) e4791. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0004791>
12. G. G. Naumis and G. Cocho, Tail universalities in rank distributions as an algebraic problem: The beta-like function, *Physica A* **387** (2008) 84. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2007.08.002>
13. G. Cocho, J. Flores, C. Gershenson, C. Pineda, and S. Sánchez, Rank diversity of languages: generic behavior in computational linguistics, *PLoS ONE* **10** (2015) e0121898. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0121898>
14. G. Cocho, R. F. Rodríguez, S. Sánchez, J. Flores, C. Pineda, and C. Gershenson, Rank-frequency distribution of natural languages: A difference of probabilities approach, *Physica A* **532** (2019) 121795. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.121795>
15. O. Miramontes and B. Luque, Dynamical small world behavior in an epidemical model of mobile individuals, *Physica D* **168-169** (2002) 379. [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(02\)00525-0](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(02)00525-0)
16. G. Ramos-Fernández, D. Boyer, and V. P. Gómez, A complex social structure with fission-fusion properties can emerge from a simple foraging model, *Behav. Ecol. Sociobiol.* **60** (2006) 536. <https://doi.org/10.1007/s00265-006-0197-x>

17. G. Iñiguez, J. Kertész, K. K. Kaski, and R. A. Barrio, Opinion and community formation in coevolving networks, *Phys. Rev. E* **80** (2009) 066119. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.80.066119>
18. G. Iñiguez, T. Govezensky, R. Dunbar, K. Kaski, and R. A. Barrio, Effects of deception in social networks, *Proc. R. Soc. B* **281** (2014) 20141195. <https://doi.org/10.1098/rspb.2014.1195>
19. S. Picoli, M. del Castillo-Mussot, H. V. Ribeiro, E. K. Lenzi, and R. S. Mendes, Universal bursty behaviour in human violent conflicts, *Sci. Rep.* **4** (2014) 4773. <https://doi.org/10.1038/srep04773>
20. C. Villarreal, P. Padilla-Longoria, and E. R. Alvarez-Buylla, General Theory of Genotype to Phenotype Mapping: Derivation of Epigenetic Landscapes from N-Node Complex Gene Regulatory Networks, *Phys. Rev. Lett.* **109** (2012) 118102. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.118102>
21. B. Luque, L. Lacasa, F. J. Ballesteros, and A. Robledo, Feigenbaum graphs: a complex network perspective of chaos, *PLoS One* **6** (2011) e22411. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0022411>