THEORIE CINETIQUE RELATIVISTE

S. R. de Groot

Institut de Physique Théorique, Université d'Amsterdam,
Amsterdam, Pays-Bas

(Recibido: julio 19, 1974)

SOMMAIRE: La théorie cinétique relativiste est basée sur une équation de transport relativiste, dont les propriétés de covariance sont discutées. En employant cette équation les lois macroscopiques de conservation et la loi de l'entropie sont déduites. Les coefficients de transport et de l'absorption du son sont déterminés pour des systèmes simples et des mélanges de *particules massives*. La méthode de calculer, qui utilise des développements en série de polynômes de Laguerre associés, est valable pour des sections efficaces arbitraires des particules. Au moyen d'un procédé analogue, mais adapté, les coefficients de transport d'un gaz de particules sans masse, les *neutrinos*, sont également calculés. Un nombre de résultats est fourni pour des systemes concrets des deux genres.

1. INTRODUCTION

La théorie cinétique relativiste constitue une généralisation de la théorie cinétique classique; cette dernière est basée sur l'équation de transport de Boltzmann. Les lois relativistes de conservation de particules, d'énergie et d'impulsion et celle d'entropie sont déduites en utilisant une équation de transport covariante. Les propriétés de symétrie spatiale et temporelle des coefficients de transport sont également prouvées sur cette base.

Le calcul des valeurs des coefficients de transport était d'abord limité à des sections efficaces très spéciales: celles des particules d'Israel. Une méthode utilisant des développements en série de fonctions orthogonales (des polynômes de Laguerre associés) permet de calculer les coefficients de transport pour des sections efficaces arbitraires. L'histoire de la théorie cinétique classique s'est donc répétée: là-aussi on traitait d'abord seulement des particules spéciales: celles de Maxwell, tandis que plus tard la méthode de Chapman et d'Enskog permettait de calculer les coefficients de transport de gaz de molécules avec des interactions arbitraires.

La conductivité thermique, les viscosités, le coefficient de diffusion et celui de diffusion thermique ont été déterminés pour des systèmes simples et des mélanges de particules massives; l'influence des phenomènes de transport sur l'absorption et la dispersion du son a été également envisagée. Comme exemples les sphères rigides, la généralisation relativiste des particules avec des forces de répulsion en puissances inverses de leurs distances, les particules de Maxwell relativistes et celles d'Israel ont été traitées.

Le cas extrêmement relativiste des systèmes de particules sans masse, comme les neutrinos, a été étudié aussi. Les valeurs de la conductivité thermique et des viscosités ont été calculées.

Certains résultats, aussi bien pour les systèmes de particules massives que pour les gaz de neutrinos, peuvent être utilisés afin de résoudre certains problèmes d'ordre astrophysique.

Les méthodes et les resultats décrits dans cet apercu ont été obtenus récemment par le groupe d'Amsterdam. Il s'agit de travaux de W.P.H. de Boer, J. Guichelaar, W.Th. Hermens, P.C. de Jagher, A.J. Kox, W.A. van Leeuwen, P.H. Meltzer, M.A.J. Michels, P.H. Polak, L.G. Suttorp et Ch.G. van Weert.

2. EQUATION DE TRANSPORT

2.1. *Forme de l'équation*. Sur la base de l'équation de continuité et de l'hypothèse du chaos moléculaire on établit l'équation intégro-différentielle de transport:

$$p^{\alpha}\partial_{\alpha}f = \tfrac{1}{2}\int(f'f_1'W' - ff_1W)(d^3p/p^0)(d^3p'/p'^0)(d^3p_1'/p_1'^0), \quad (1)$$

proposée pour la première fois par Lichnerowicz et Marrot. Ici $p^{\alpha}(\alpha=0,1,2,3)$ est la quadri-impulsion, ∂_{α} la dérivée $\partial/\partial x^{\alpha}$ par rapport aux coordonnées $(ct,\ \mathbf{x})$ du temps et de l'espace, $f = f(x,p)$ la fonction de distribution d'une particule avec des coordonnées x^{α} et des impulsions p^{α}. Le membre de droite décrit l'influence des collisions $p, p_1 \to p', p_1'$ et de leurs inverses. Les abréviations signifient les fonctions de distribution $f' = f(x,p')$ etc., et les probabilités de transition $W = W(pp_1|p'p_1')$ et $W' = W(p'p_1'|pp_1)$. Le facteur $\tfrac{1}{2}$ dans (1) provient de l'indiscernibilité des particules.

2.2. *Probabilité de transition et matrices de diffusion*. La matrice S de diffusion de particules est définie comme

$$S(pp_1|p'p_1') \equiv \langle\infty\, p'p_1'\,|\,pp_1 - \infty\rangle \quad , \quad (2)$$

où les deux états du membre de droite sont des états de particules libres aux temps ∞ et $-\infty$. La matrice S de diffusion est liée aux matrices R et T par les relations

$$S(pp_1|p'p_1') = \tfrac{1}{2}p^0p_1^0\{\delta^{(3)}(p-p')\,\delta^{(3)}(p_1-p_1') +$$

$$+\,\delta^{(3)}(p_1-p')\,\delta^{(3)}(p-p_1')\} + R(pp_1|p'p_1') \quad , \quad (3)$$

$$R(pp_1|p'p_1') = -i\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p+p_1-p'-p_1')\,T(pp_1|p'p_1') \quad . \quad (4)$$

En écrivant l'équivalence des probabilités de transition en fonction de T et de W on en trouve la relation:

$$W(pp_1 | p'p_1') = (2\pi)^{10}\hbar^2\, \delta^{(4)}(p + p_1 - p' - p_1') \left| T(pp_1 | p'p_1') \right|^2 \quad ,(5)$$

essentielle dans la théorie cinétique.

2.3. *Normalisation bilatérale et unitarité.* On suppose que les états propres qui figurent dans la matrice S (2) forment un système complet, ce qui implique que la matrice S est unitaire. Cette propriété se traduit, si l'on utilise les relations (3), (4) et (5), par la propriété suivante de la probabilité de transition W:

$$\int W(d^3p'/p'^0)(d^3p_1'/p_1'^0) = \int W'(d^3p'/p'^0)(d^3p_1'/p_1'^0) \quad , \qquad (6)$$

égalité qui porte le nom de normalisation bilatérale.

2.4. *Probabilité de transition et section efficace.* La section efficace différentiele σ d'une collision est directement liée au carré de la matrice T de transition. Ceci permet d'écrire la relation (5) comme

$$W(pp_1 | p'p_1') = 2!\, s\, \delta^{(4)}(p + p_1 - p' - p_1')\, \sigma \quad , \qquad (7)$$

où s est le carré de la quadri-impulsion totale $p^\alpha + p_1^\alpha = p'^\alpha + p_1'^\alpha$. Pour des particules sans spin la section efficace différentielle dépend uniquement de s et de l'angle de diffusion θ dans le repère du centre d'impulsion. Ces variables sont les mêmes pour la collision $pp_1 \to p'p_1'$ et son inverse. On a donc l'égalité de W et W', ou, écrite explicitement, la propriété

$$W(pp_1 | p'p_1') = W(p'p_1' | pp_1) \quad , \qquad (8)$$

dite du bilan détaillé.

2.5. *Forme alternative de l'équation de transport.* Avec (7), (8) et des intégrations on peut écrire l'équation de transport (1) sous la forme alternative:

$$p^\alpha \partial_\alpha f = \int (f'f_1' - ff_1)\, \sigma F d\Omega\, (d^3p_1/p_1^0) \quad , \qquad (9)$$

avec l'abbréviation

$$F \equiv \{(p_\alpha p_1^\alpha)^2 - (mc)^4\}^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

(où m est la masse des particules) et Ω l'angle solide de diffusion dans le repère du centre d'impulsion.

2.6. *Covariance de la fonction de distribution*. L'évolution d'un gaz de N particules est décrite par l'ensemble de N lignes d'univers. Le nombre des lignes d'univers, qui coupent un élément de surface $\Delta^3\Sigma$ d'une tri-surface du genre espace, des particules à quadri-impulsion $(p^\alpha, p^\alpha + \Delta p)$ est donné par

$$\Delta N(x,p) = m^{-1} \int_{\Delta^4 p} \int_{\Delta^3 \Sigma} \left[\sum_{i=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(4)}\{x - x_i(\tau)\}\, \delta^{(4)}\{p - p_i(\tau)\}\, d\tau \right] p^\alpha d^3\Sigma_\alpha d^4 p \,, \tag{11}$$

où τ est le temps propre. L'expression entre crochets droits est un scalaire de Lorentz et est indépendante de $\Delta^3\Sigma$. Après des intégrations sur τ et p^0, la moyenne statistique sur les positions et les impulsions de (11) peut être écrite comme

$$< \Delta N(x,p) > = \int_{\Delta^3 p} \int_{\Delta^3 \Sigma} f(x,p)\, p^\alpha d^3\Sigma_\alpha d^3 p / p^0 \quad , \tag{12}$$

où p^0 est égal à $(\mathbf{p}^2 + m^2 c^2)^{\frac{1}{2}}$ et où la fonction $f(x,p)$ représente l'expression

$$< \sum_{i=1}^{N} \delta^{(3)}\{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)\}\, \delta^{(3)}\{\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t)\} > = f(\mathbf{x};\mathbf{p},t): \quad . \tag{13}$$

Celle-ci est la fonction de distribution, introduite au début dans l'équation de transport. Elle est un scalaire de Lorentz parce que les autres facteurs de (12) le sont. En outre l'expression

$$f(\mathbf{x},\mathbf{p},t)\, p^\alpha d^3\Sigma_\alpha d^3 p / p^0 \quad , \tag{14}$$

qui figure dans (12) est le nombre moyen des lignes d'univers à impulsions $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p} + d\boldsymbol{p})$ qui croisent l'élément de surface $d^3\Sigma_\alpha$ du genre espace au point $(ct, \boldsymbol{x})$ de l'espace-temps. L'expression (14) est un des éléments de la théorie cinétique relativiste.

3. LOIS MACROSCOPIQUES COVARIANTES

3.1. *Lois de conservation*. A partir des cinq grandeurs microscopiques conservées (les cinq "invariants de collision" 1 et p^α avec $\alpha = 0, 1, 2, 3$) on trouve, au moyen de l'équation de transport (1) ou (9), les lois de conservation macroscopiques correspondantes. Elles sont satisfaites par les expressions statistiques du quadri-courant de masse M^α et du tenseur d'énergie-impulsion $T^{\alpha\beta}$ et elles indiquent que les divergences de ces grandeurs s'annulent:

$$M^\alpha \equiv mc\int p^\alpha f d^3p/p^0 \quad , \quad \partial_\alpha M^\alpha = 0 \quad , \tag{15}$$

$$T^{\alpha\beta} \equiv c\int p^\alpha p^\beta f d^3p/p^0 \quad , \quad \partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \quad . \tag{16}$$

Dans le dernier cas $\alpha = 0$ exprime la loi de conservation d'énergie et $\alpha = 1, 2, 3$ la loi de conservation d'impulsion, tandis que T^{00} représente une densité d'énergie, cT^{0k} $(k = 1, 2, 3)$ un courant d'énergie, $c^{-1}T^{k0}$ une densité d'impulsion et T^{kl} $(k, l = 1, 2, 3)$ un courant d'impulsion (tenseur de pression).

3.2. *Loi de l'entropie*. Le quadri-courant d'entropie est défini comme

$$S^\alpha = -kc\int p^\alpha (\ln h^3 f - 1)\, f d^3p/p^0 \quad , \tag{17}$$

où k est la constante de Boltzmann et h une constante qui rend $h^3 f$ sans dimension. Au moyen de différentiations par rapport aux coordonnées de l'espace-temps on en déduit le bilan d'entropie, qui exprime que la densité d'entropie ne change pas uniquement à cause du courant d'entropie, mais aussi à cause de la production locale d'entropie.

$$\sigma_s = \partial_\alpha S^\alpha \geqslant 0 \quad . \tag{18}$$

L'équilibre peut être caractérisé par la disparition de σ_s, tandis qu'en dehors de l'équilibre un théorème-*H* relativiste est valable. On le prouve à partir de l'équation de transport, si l'on utilise aussi la propriété (6) de la normalisation bilatérale.

3.3. *Equation de transport linéarisée*. Pour calculer la production d'entropie on se sert de la fonction de distribution

$$f = f^{(0)}(1+\phi) \quad , \tag{19}$$

où $f^{(0)}$ a la même forme que la fonction de distribution de l'équilibre (la fonction de Jüttner), mais avec les fonctions thermodynamiques T, la température, U^α la quadri-vitesse hydrodynamique et ρ, la densité (ou alternativement μ le potentiel chimique), qui dépendent des coordonnées de l'espace-temps, et où ϕ est une fonction de correction que l'on trouve en première approximation, dite d'Enskog, à partir de l'équation de transport "linéarisée":

$$p^\alpha \partial_\alpha f^{(0)} = -f^{(0)} \int f_1^{(0)} (\phi + \phi_1 - \phi' - \phi_1') \, \sigma F \, d\Omega \, d^3 p_1 / p_1^0 \equiv - f^{(0)} \mathcal{L}[\phi] \quad . \tag{20}$$

Ici $\mathcal{L}$ est appelé l'opérateur de collision linéarisé. On trouve pour la production d'entropie, en utilisant les formules (17-20),

$$\sigma_s = -\Pi(\partial_\alpha U^\alpha/T) - I_q^\alpha \left[(\partial_\alpha T/T^2) + (DU_\alpha/c^2 T)\right] - \overset{0}{\Pi}{}^{\alpha\beta} < \partial_\alpha U_\beta > /T \geqslant 0 \quad , \tag{21}$$

une expression bilinéaire dans les flux thermodynamiques: Π (un tiers de la trace du tenseur de pression visqueuse), I_q^α (le quadri-courant de chaleur) et $\overset{0}{\Pi}{}^{\alpha\beta}$ (la partie à trace zero du tenseur de pression visqueuse) et les "forces" thermodynamiques correspondantes: $\partial^\alpha U_\alpha/T$ (où U^α est la quadri-vitesse hydrodynamique), $\partial_\alpha T/T^2 + DU_\alpha/c^2 T$ (le gradient de température et la contribution relativiste d'Eckart, où $D \equiv U^\beta \partial_\beta$) et $< \partial_\alpha U_\beta >/T$ (la partie à trace nulle du tenseur du gradient de la vitesse hydrodynamique). Le terme d'Eckart peut être écrit de facon alternative:

$$DU^\alpha/c^2 T = -(1/\rho h T) \, \Delta^{\alpha\beta} \partial_\beta P \quad , \tag{22}$$

ce qui montre qu'il est proportionnel au gradient de la pression P; la grandeur h est l'enthalpie (qui comprend l'énergie de repos c^2), la quantité ρ est la densité et $\Delta^{\alpha\beta}$ est le projecteur $g^{\alpha\beta} + c^{-2}U^{\alpha}U^{\beta}$ avec $g^{\alpha\beta}$ le tenseur métrique (diag. $(-1,1,1,1)$).

4. SYSTEMES SIMPLES DE PARTICULES MASSIVES

4.1. Coefficients de transport. L'équation de transport linéarisée (20) a une solution de la forme

$$\phi = A\partial_{\alpha}U^{\alpha} - B^{\alpha}\Delta_{\alpha\beta}[(\partial^{\beta}T/T) + (DU^{\beta}/c^2)] + C^{\alpha\beta}<\partial_{\alpha}U_{\beta}> , \quad (23)$$

où les fonctions A, B^{α} et $C^{\alpha\beta}$ sont à déterminer à partir de l'équation de transport. Quand cette solution est introduite dans les définitions des flux thermodynamiques on obtient des lois linéaires reliant ces flux aux forces thermodynamiques

$$\pi = -\eta_v \partial_{\alpha}U^{\alpha} \quad , \quad (24)$$

$$I_q^{\alpha} = -\lambda\Delta^{\alpha\beta}(\partial_{\beta}T + c^{-2}T\,DU_{\beta}) \quad , \quad (25)$$

$$\overset{0}{\Pi}{}^{\alpha\beta} = -2\eta <\partial^{\alpha}U^{\beta}> \quad . \quad (26)$$

avec les coefficients de transport: η_v la viscosité de volume, λ la conductivité thermique et η la viscosité ordinaire. On a, par example,

$$\lambda = -c(3T)^{-1}\Delta_{\alpha\beta}\int B^{\alpha}p^{\beta}(p_{\gamma}U^{\gamma} + mh)\, f^{(0)}d^3p/p_0 \quad . \quad (27)$$

Comme les trois termes de (23) sont indépendants, B^{α} même doit satisfaire l'équation de transport. En outre l'invariance de Lorentz requiert pour B^{α} la forme

$$B^{\alpha} = B\Delta^{\alpha\beta}p_{\beta} \quad , \quad (28)$$

de sorte qu'on n'a donc qu'à déterminer B pour trouver la conductivité thermique. L'équation de transport pour B est alors de la forme:

$$\mathfrak{L}[B\Delta^{\alpha\beta}p_\beta] = -(kT)^{-1}(p_\gamma U^\gamma + mh)\,\Delta^{\alpha\beta}p_\beta \quad . \tag{29}$$

Notre "*méthode des fonctions orthogonales*" permet de trouver λ (27) à partir de (28) et (29) (avec la définition de $\mathfrak{L}$ (20)). D'abord on écrit B (qui est une fonction de $\tau \equiv -(p_\alpha U^\alpha + mc^2)/kT$, c'est-à-dire l'énergie cinétique dans le repère propre de U^α, divisée par kT) comme série en polynômes de Laguerre associés $L_m^{3/2}$:

$$B(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m L_m^{3/2}(\tau) \quad . \tag{30}$$

Maintenant il faut donc trouver les coefficients b_m. A cette fin on multiplie (29) par $L_n^{3/2}\, p_\alpha f^{(0)}$ et l'on intègre sur $d^3\mathbf{p}/p^0$. Ainsi au lieu de l'équation intégro-différentielle (29) on obtient un nombre infini d'équations algébriques pour les b_m:

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m b_{mn} = \rho^{-1}\beta_n \quad . \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{31}$$

Ici les coefficients β_n deviennent des fonctions thermodynamiques connues. Les grandeurs b_{mn} sont appelées des symbôles de crochets. Ce sont des intégrales qui contiennent la section efficace $\sigma(s,\theta)$. Nous les avons calculés pour un nombre d'interactions entre les particules, caractérisées par la section efficace: des "sphères rigides" (où σ est une constante), des particules qui sont la généralisation relativiste du cas où elles se repoussent avec une force inversément proportionnelle à une puissance de la distance, des particules de Maxwell relativistes et des particules d'Israel. On calcule des approximations successives en se limitant dans (31) à une nombre fini de termes m et d'équations algébriques n. (Le procédé est "convergent" de la même manière que le procédé analogue dans la théorie non-relativiste.) Pour des sphères rigides ayant un diamètre a nous trouvons en première approximation et en écrivant seulement le terme non-relativiste et la correction en c^{-2}:

$$[\lambda]_1 = (75/64)(1/a^2)(k^3T/\pi m)^{\frac{1}{2}}\left(1 + (13kT/16mc^2)\right) \quad , \qquad (32)$$

$$[\eta]_1 = (5/16)(1/a^2)(mkT/\pi)^{\frac{1}{2}}\left(1 + (25kT/16mc^2)\right) \quad . \qquad (33)$$

La viscosité de volume est de l'ordre de c^{-4} seulement. (Des approximations plus avancées ont été obtenues, également pour les autres modèles, pour les trois coefficients de transport.)

4.2. Propagation du son. L'absorption et la dispersion du son ont été étudiées également. Le coefficient d'absorption calculé est

$$\alpha = (\omega^2/2\rho c_{s0}^3)\{\lambda(k/mc_p c_v)\left(1 - (c_p T/h)\right)^2 + \left((4\eta/3) + \eta_v\right) c^2/h\} \qquad (34)$$

où ω est la fréquence circulaire, c_{s0} la vitesse de propagation $\{(c_p/c_v)(kT/m)(c^2/h)\}^{\frac{1}{2}}$ en première approximation et c_p et c_v sont les chaleurs spécifiques. Pour des sphères rigides on obtient avec (32-33) :

$$\alpha = (7/32)(3/5\pi)^{\frac{1}{2}}(\omega^2 m^2/kT\rho a^2)\left(1 + (135kT/112mc^2)\right) \quad . \qquad (35)$$

La vitesse de propagation ne montre une dispersion qu'à partir de la seconde approximation.

5. MELANGES DE PARTICULES MASSIVES

5.1. Production d'entropie. Lois linéaires. Un mélange binaire a une production d'entropie (laissant de côté les termes visqueux, donnés plus haut)

$$\sigma_s = -\bar{I}_q^{\alpha}\left((\partial_\alpha T/T^2) + (DU_\alpha/c^2T)\right) - I_1^{\alpha}\,[\{\partial_\alpha(\mu_1 - \mu_2)\}_T +$$

$$+ \left((h_1 - h_2)/c^2\right) DU_\alpha](1/T) \quad . \qquad (36)$$

Ici $\bar{I}_q^{\alpha} = I_q^{\alpha} - (h_1 - h_2)I_1^{\alpha}$ est le flux de chaleur et I_1^{α} le flux de diffusion de la composante 1 (celle de la composante 2 est égale à $-I_1^{\alpha}$). Dans la force thermodynamique de la diffusion apparaissent les gradients des potentiels chimiques μ_1 et μ_2 et un terme relativiste (de l'ordre de c^{-2}) du même genre que le terme d'Eckart de la force thermodynamique de conduction thermique. Les lois linéaires deviennent

$$\overline{I}_q^{\,\alpha} = -L_{qq}\Delta^{\alpha\beta}\left((\partial_\beta T/T) + (DU_\beta/c^2)\right) - L_{q1}\Delta^{\alpha\beta}[\{\partial_\beta(\mu_1 - \mu_2)\}_T +$$

$$+ \left((h_1 - h_2)/c^2\right) DU_\beta] \quad , \tag{37}$$

$$I_1^{\alpha} = -L_{1q}\Delta^{\alpha\beta}\left((\partial_\beta T/T) + (DU_\beta/c^2)\right) - L_{11}\Delta^{\alpha\beta}[\{\partial_\beta(\mu_1 - \mu_2)\}_T +$$

$$+ \left((h_1 - h_2)/c^2\right) DU_\beta] \quad . \tag{38}$$

Les quatre coefficients de transport qui figurent dans les formules sont liés aux coefficients conventionnels: la conductivité thermique $\lambda = L_{qq}/T$, le coefficient de diffusion thermique $D_T = (\rho/Tn^2 m_1 m_2 c_1 c_2) L_{1q}$, celui de l'effet Dufour $D_T' = (\rho/Tn^2 m_1 m_2 c_1 c_2) L_{q1}$ et celui de la diffusion $D = \{(\partial\mu_1/\partial c_1)\, p, T/\rho c_2\} L_{11} = (kT\rho^2/nm_1 m_2 \rho_1 \rho_2) L_{11}$. (Ici n est la densité totale des particules, m_1 et m_2 sont les masses des particules des deux composantes, ρ_1 et ρ_2 les densités des composantes et c_1 et c_2 les fractions de masse $c_1 = \rho_1/\rho$, $c_2 = \rho_2/\rho$.)

5.2. *Coefficients de transport*. La symétrie pour le renversement du temps des équations de mouvement microscopiques s'écrit pour les probabilités de transition comme

$$W(p p_1 | p' p_1') = W(-p', -p_1' | -p, -p_1) \quad . \tag{39}$$

Ceci implique une symétrie du système des coefficients de transport dont un exemple est

$$L_{1q} = L_{q1} \quad , \tag{40}$$

ce qui prouve que les coefficients de diffusion thermique D_T et celui de l'effet Dufour sont égaux. Les relations comme (40) sont des généralisations relativistes des relations réciproques d'Onsager. Quand on a des systèmes soumis à des champs magnétiques externes le nombre de phénomènes s'accroît et les relations réciproques sont modifiées. (Si l'on admet des réactions chimiques ou nucléaires et des phénomènes de relaxation on a encore d'autres lois linéaires que celles données ici.) Les coefficients de diffusion et de diffusion thermique ont été calculés pour certaines sections efficaces. Pour des sphères rigides de diamètres a_1 et a_2 nous trouvons par exemple (en première approximation), avec l'abbréviation $a_{12} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$:

$$[D]_1 = (3/8)(kT/\pi m)^{\frac{1}{2}} (1/na_{12}^2)\left(1-(11kT/16mc^2)\right) \quad , \tag{41}$$

$$\begin{aligned}[D_T]_1 = {} & (15/8)(mk/\pi T)^{\frac{1}{2}} \{[(\rho_1-\rho_2)a_{12}^2 + \rho_1 a_1^2 - \rho_2 a_2^2] \div \\ & \div [16\rho_1\rho_2 a_1^2 a_2^2 + 29(\rho_1^2 a_1^2 + \rho_2^2 a_2^2)a_{12}^2 + 42\rho_1\rho_2 a_{12}^4]\} \times \\ & \times \{1 + [2864\rho_1\rho_2 a_1^2 a_2^2 + 5075(\rho_1^2 a_1^2 + \rho_2^2 a_2^2)a_{12}^2 + 7286\rho_1\rho_2 a_{12}^4](kT/mc^2) \div \\ & \div [16(16\rho_1\rho_2 a_1^2 a_2^2 + 29(\rho_1^2 a_1^2 + \rho_2^2 a_2^2)a_{12}^2 + 42\rho_1\rho_2 a_{12}^4)]\} \ . \end{aligned} \tag{42}$$

5.3. *Propagation du son*. L'absorption du son dans les mélanges dépend non seulement de la conductivité thermique et des viscosités, mais également des coefficients de diffusion et de diffusion thermique.

6. GAZ DE NEUTRINOS

Le caz des gaz de neutrinos est intéressant du point de vue des applications en astrophysique. Comme leur masse est zéro, leur vitesse est égale à celle de la lumière. On se trouve donc toujours en régime extrêment relativiste. C'est une des raisons pour laquelle le calcul des coefficients de transport n'est pas complètement analogue à celui des coefficients de transport d'un système de particules massives.

6.1. *L'interaction faible*. Les neutrinos sont soumis uniquement à l'interaction faible. On pourrait prendre comme hamiltonien:

$$H = 2^{-\frac{1}{2}} G\overline{\psi}_\nu \gamma_\alpha (1-\gamma_5)\psi_\nu \overline{\psi}_\nu \gamma^\alpha (1-\gamma_5)\psi_\nu \tag{43}$$

avec G la constante de couplage de l'interaction faible, ψ_ν les opérateurs-spineurs et γ_a et γ_5 les matrices de Dirac. La section efficace correspondante est

$$\sigma = (G^2 E^2 / 4\pi^2 \hbar^4 c^4) \quad , \tag{44}$$

avec E l'énergie totale des deux neutrinos, qui subissent une collision, dans le repère du centre d'impulsion.

6.2. *Coefficients de transport*. Leur calcul est basé sur l'équation de transport pour des particules avec une masse m égale à zéro. Ceci implique que la fonction F (10) est simplement égale à $2s$ et aussi que le premier terme de ϕ (23) est absent. Pour cette raison la viscosité de volume disparaît. Au lieu du développement en série (30), nous écrivons

$$B(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m L_m^3(\tau) \quad , \tag{45}$$

avec des polynômes de Laguerre associés, différents de ceux de (30) et appropriés pour les neutrinos. Le paramètre τ est égal à $-p_a U^a / kT$ dans le cas des particules sans masse. La conductivité thermique devient

$$\lambda = -\tfrac{1}{3} kc \int B(\tau) L_1^3(\tau)\, \Delta_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta f^{(0)} d^3p / p^0 \tag{46}$$

Dans la méthode de calculer on utilise un procédé analogue à celui du cas des particules massives, où l'on transforme l'équation intégro-différentielle en un système d'équations algébriques, qu'on résout en approximations successives. Le résultat pour la première approximation est

$$[\lambda]_1 = (3/80)(\pi\hbar^4 c^5 / G^2 kT^2) \quad , \quad [\eta]_1 = (3/184)(\pi\hbar^4 c^3 / G^2 kT) \quad . \tag{47}$$

La convergence des approximations successives est moins rapide que pour les systèmes de particules massives, mais, en revanche, on peut plus facilement calculer des approximations d'un ordre élevé. Nous avons calculé les quinze premières approximations et une limite supérieure de la conductivité thermique et de la viscosité. Ceci donne comme résultats:

$$\lambda = 0,14(\pi\hbar^4 c^5/G^2 kT^2)\ , \quad \eta = 0,0252(\pi\hbar^4 c^3/G^2 kT) \tag{48}$$

ou bien, si l'on introduit les valeurs des constantes:

$$\lambda = 5\times 10^{57}(1/T^2)(\mathrm{g\,cm/s^3K})\ , \quad \eta = 9,3\times 10^{35}(1/T)(\mathrm{g/cm\,s})\ . \tag{49}$$

Un cas pratique est une tempétature T de 10^{11}K, ce qui correspond à une énergie de 10 MeV. Alors les dernières expressions donnent

$$\lambda = 5\times 10^{35}(\mathrm{g\,cm/s^3\,K})\ , \quad \eta = 9,3\times 10^{24}(\mathrm{g/cm\,s})\ . \tag{50}$$

Ce sont des valeurs nettement plus élevées que celles pour des systèmes "terrestres", qui pour le cas (académique pour des systemes terrestres) $T = 10^{11}$K seraient 10^9 et 10^2 (unités c. g. s. comme dans les formules), mais seulement 10^{-3} et 10^{-3} respectivement pour le cas réaliste d'une température de 300K.

7. REMARQUES FINALES

7.1. *Applications possibles.* Les coefficients de transport et le coefficient d'absorption du son de gaz relativistes de particules massives peuvent jouer un rôle important en astrophysique, où les circonstances physiques sont souvent telles que les méthodes non-relativistes ne suffisent pas. La connaissance de la formule de l'absorption du son, par exemple, permet d'estimer que la masse minimale d'une galaxie est de 10^{11} masses solaires. La physique des neutrinos joue un rôle prépondérant dans la discussion de la phase initiale de l'univers. Pour la compréhension des phénomènes en jeu on a besoin des coefficients de transport, en particulier de la viscosité.

7.2. *Réalisations et limitations.* On a donc vu qu'il est possible de construire une théorie cinétique de l'équilibre et des phénomènes de transport dans le cadre de la relativité restreinte. Les lois macroscopiques et des expressions pour les coefficients de transport peuvent être déduites. La méthode décrite nous permet de trouver ces coefficients de transport pour systèmes relativistes de particules avec des sections efficaces arbitraires.

Finalement je voudrais faire remarquer qu'à des températures élevées des processus comme l'ionisation, le rayonnement et la création de particules ont lieu. Leur influence sur les phénomènes de transport n'a guère été considérée dans la théorie cinétique relativiste actuelle.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier vivement les professeurs T. D. Lee et M. A. Ruderman de l'Université Columbia d'avoir attiré mon attention sur l'importance en astrophysique de connaître des coefficients de transport d'un gaz de neutrinos. J'exprime également ma profonde gratitude à Madame M. Suttorp-Zwolle pour ses remarques importantes et à Mademoiselle A. Kitselar pour l'exécution minutieuse du travail typographique.

Ce travail est le résultat de recherches qui font partie du programme de la "Stitching voor fundamenteel onderzoek der materie (F.O.M.)", qui est subventionnée par la "Nederlandse organisatie voor zuiver-wetenschappelijk onderzoek (Z.W.O.)".

BIBLIOGRAPHIE

Théorie

1. A. Lichnerowicz et R. Marrot, C.R. Acad. Sci. Paris 210 (1940) 759.
2. W. Israel, J. Math. Phys. 4 (1963) 1163.
3. S.R. de Groot, C.G. van Weert, W.Th. Hermens et W.A. van Leeuwen, Phys. Lett. 26A (1968) 345.
4. S.R. de Groot, C.G. van Weert, W.Th. Hermens et W.A. van Leeuwen, Phys. Lett. 26A (1968) 439.
5. S.R. de Groot, C.G. van Weert, W.Th. Hermens et W.A. van Leeuwen, Physica 40 (1968) 257.
6. S.R. de Groot, C.G. van Weert, W.Th. Hermens et W.A. van Leeuwen, Physica 40 (1969) 581.
7. S.R. de Groot, C.G. van Weert, W.Th. Hermens et W.A. van Leeuwen, Physica 42 (1969) 309.
8. C. G. van Weert, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. B73 (1970) 381, 397, 500, 517.
9. W.A. van Leeuwen et S.R. de Groot, Physica 51 (1971) 1.
10. W.A. van Leeuwen et S.R. de Groot, Physica 51 (1971) 16.
11. W.A. van Leeuwen et S.R. de Groot, Physica 51 (1971) 32.

12. W.A. van Leeuwen, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. B74 (1971) 122, 134, 150, 269, 276.
13. W.Th. Hermens, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. B74 (1971) 376, 387, 461, 478.
14. W.A. van Leeuwen, P.H. Polak et S.R. de Groot, Phys. Lett. 37A (1971) 323.
15. J. Guichelaar, W.A. van Leeuwen et S.R. de Groot, Physica 59 (1972) 97.
16. W.Th. Hermens, W.A. van Leeuwen, Ch.G. van Weert et S.R. de Groot, Physica 60 (1972) 472.
17. S.R. de Groot et L.G. Suttorp, *Foundations of Electrodynamics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1972.
18. W.A. van Leeuwen, P.H. Polak et S.R. de Groot, C.R. de l'Académie des Sciences 274A (1972) 431.
19. W.A. van Leeuwen, P.H. Polak et S.R. de Groot, Physica 63 (1973) 65.
20. P.H. Polak, W.A. van Leeuwen et S.R. de Groot, Physica 66 (1973) 455.
21. Ch.G. van Weert, P.C. de Jagher et S.R. de Groot, Physica 66 (1973) 474.
22. J. Guichelaar, W.A. van Leeuwen et S.R. de Groot, Physica 68 (1973) 342.
23. W.A. van Leeuwen et S.R. de Groot, Lett. al Nuovo Cimento 6 (1973) 470.
24. J. Guichelaar, W.A. van Leeuwen et S.R. de Groot, Phys. Lett. 43A (1973) 323.
25. Ch.G. van Weert, W.A. van Leeuwen et S.R. de Groot, Physica 69 (1973) 441.
26. S.R. de Groot, Acta Physica Austriaca, Suppl. 10 (1973) 529 (The Boltzmann Equation, Proceedings of the International Symposium: "100 Years Boltzmann Equation", Vienne, 1972, Réd. E.G.D. Cohen et W. Thirring).
27. S.R. de Groot, Z. Physik 262 (1973) 349.
28. S.R. de Groot, *The Onsager Relations. Theoretical Basis*, Conférence à Bussaco, le 25 juillet 1973. International Symposium of the foundations of continuum thermodynamics, Réd. J.J. Delgado Domingos, M. Nina et J.H. Whitelaw). A publier par MacMillan Company.
29. S.R. de Groot, Physica 69 (1973) 12 (numéro dédié à Cornelis J. Gorter).
30. W.A. van Leeuwen, A.J. Kox et S.R. de Groot, Phys. Lett. 47A (1974) 31.
31. A.J. Kox, W.A. van Leeuwen et S.R. de Groot, Phys. Lett. 47A (1974) 221.

32. J. Guichelaar, Sound propagation in a relativistic gas mixture. A publier dans Physica.
33. W.A. van Leeuwen, P.H. Meltzer et S.R. de Groot, Coefficients de transport d'un gaz de neutrinos. A publier dans les C.R. Acad. Sc. Paris A.
34. J. Guichelaar, On relativistic kinetic gas theory XIII. Sound propagation in a multi-component mixture. A publier dans Physica.
35. S.R. de Groot, W.A. van Leeuwen et P.H. Meltzer, Transport coefficients of a neutrino gas. A publier dans Il Nuovo Cimento.

Applications

36. C.W. Misner et D.H. Sharp, Phys. Lett. 15 (1965) 279.
37. C.W. Misner, Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 533.
38. C.W. Misner, Astrophys. J. 151 (1968) 431.
39. S. Weinberg, Astrophys. J. 168 (1971) 175.
40. M. Ruderman, Accad. Nazionale dei Lincei, 157 (1971) 1.
41. T. de Graaf, Accad. Nazionale dei Lincei, 368 (1971) 81.
42. R.A. Matzner, C.W. Misner, Astrophys. J. 171 (1972) 415.
43. T. de Graaf, ***Neutrinos in the Universe, Vistas in Astronomy*** 15, Réd. A. Beer, Pergamon Press, Oxford, 1973, p. 161-181.

ABSTRACT

Relativistic kinetic theory is based on a relativistic transport equation, of which the covariant character is discussed. By employing this equation the macroscopic conservation laws and the entropy law are derived. The transport coefficients and the absorption coefficient of sound waves are determined for simple systems and mixtures of *massive particles*. The method for their calculation, which makes use of series developments in terms of associated Laguerre polynomials, is valid for arbitrary cross-sections of the particles. With the help of an analogous procedure, but adapted to the special purpose, the transport coefficients of a gas of massless particles, *neutrinos*, are also calculated. A number of results is provided for specific systems of both kinds.

RESUMEN

La teoría cinética relativista se basa en una ecuación de transporte relativista, de la que se discute el carácter covariante. Empleando esta ecuación se obtienen las leyes de conservación y de entropía. Se determinan los coeficientes de transporte y de absorción de ondas de sonido para sistemas simples y mezclas de *partículas masivas*. El método para su cálculo, que usa desarrollos en serie en términos de polinomios asociados de Laguerre, es válido para secciones arbitrarias de las partículas. Se calculan también los coeficientes de transporte de un gas de partículas sin masa, neutrinos, con la ayuda de un procedimiento análogo pero adaptado a éste propósito especial. Se proporcionan varios resultados para sistemas específicos de ambos tipos.