

LA ANISOTROPIA EN LA SUPERCONDUCTIVIDAD

R. Baquero

Instituto de Ciencias
Universidad Autónoma de Puebla

RESUMEN

Revisamos brevemente las teorías de anisotropía en la banda superconductor con énfasis particular en las Ecuaciones de Eliashberg y el caso del Al. Revisamos la influencia tanto de la anisotropía en la banda superconductor como de la Superficie de Fermi en tres experimentos: el relajamiento de los espines nucleares de la red, el calor específico a bajas temperaturas y la atenuación ultrasónica tanto de baja como de alta frecuencia, para el caso del Al en estado superconductor. Consideramos brevemente la cuestión de la ambigüedad creada por diferentes resultados experimentales, sobre la cual se ha llamado la atención recientemente.

ABSTRACT

We review briefly the problem of anisotropy in the superconducting band gap with particular emphasis on the Eliashberg gap Equations and on the element Al. We consider the influence of anisotropy in the Superconducting gap and in the Fermi Surface in three experiments: nuclear spin-lattice relaxation rate, low temperature specific heat, and ultrasonic attenuation of low and finite frequency for the case of Al in the superconducting state. We consider very briefly the question of the ambiguity created by different experimental results.

1. LA TEORIA DE LA BANDA PROHIBIDA

La teoría BCS^(1,2) tiene a su base el trabajo de Cooper. Copper logró mostrar que dos electrones, excitados ligeramente por encima del mar de Fermi a $T = 0$ K, pueden formar, en presencia de cualquier interacción atractiva, un estado ligado real. La energía de este estado se encuentra por debajo de la energía de Fermi del metal normal, lo cual indica evidentemente la posibilidad de un nuevo estado base. Estos electrones ligados por una interacción atractiva, reciben el nombre de Pares de Cooper (Fig. 1). Al aparearse los electrones transforman parte de la energía del metal en el estado normal, en energía interna de los

constituyentes del nuevo estado (superconductor): los pares de Cooper. Por lo tanto entre mayor sea el número de pares de Cooper, menor será la energía de este nuevo estado con relación al estado normal. En consecuencia el estado normal será inestable con relación a la formación de los pares de Cooper, y el estado superconductor será el estado base del sistema. Exploremos la posibilidad de un tal estado:

Con el fin de minimizar la energía, es necesario maximizar la energía de amarre de los pares de Cooper y lograr un número de ellos, tan grande como posible. Como el estado base no lleva corriente neta, lo indicado es aparear electrones de impulso opuesto. Así el momento del par es cero. Igualmente, como deseamos que la energía de amarre sea máxima, los electrones deben ser de spin opuesto ya que el término de intercambio reduce la interacción efectiva.

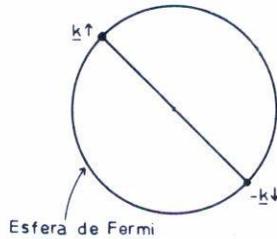


Fig. 1. Los pares de Cooper son estados ligados de dos electrones en estados $\underline{k}\uparrow$, $-\underline{k}\downarrow$ respectivamente, ambos sobre la esfera de Fermi.

A $T = 0$ K, el estado superconductor está formado por pares de Cooper que interactúan entre sí: no hay interacción entre electrones independientes sino que, coherentemente, un par puede ser dispersado solo hacia otro estado de par

$$(\underline{k}\uparrow, -\underline{k}\downarrow) \longrightarrow (\underline{k}'\uparrow, -\underline{k}'\downarrow).$$

De una manera cuantitativa, estas ideas se plasman mejor utilizando el formalismo de la segunda cuantización. Si los operadores $C_{\underline{k}}^{\uparrow}$ y $C_{-\underline{k}}^{\downarrow}$ son los operadores de creación y aniquilación de ondas de Bloch con spin hacia arriba y momento \underline{k} y spin hacia abajo y momento $-\underline{k}$, respectivamente, los operadores de creación y aniquilación de pares de Cooper pueden definirse como:

$$b_{\underline{k}}^+ = C_{\underline{k}\uparrow}^+ C_{-\underline{k}\downarrow}^+ \quad (1.1)$$

$$b_{\underline{k}} = C_{-\underline{k}\downarrow} C_{\underline{k}\uparrow}$$

En términos de estos operadores podemos obtener la energía cinética del sistema:

$$H_0 = \sum_{\underline{k}} 2\varepsilon_{\underline{k}} b_{\underline{k}}^+ b_{\underline{k}} \quad (1.2)$$

donde $2\varepsilon_{\underline{k}}$ es la energía del par de Cooper medida desde el nivel de Fermi e incluye renormalizaciones debidas a interacciones (Self-energy). Los valores de $\varepsilon_{\underline{k}}$ pueden obtenerse, por ejemplo, de la solución auto-consistente de Hartree-Fock para un gas de electrones en un medio positivo (un sistema neutral).

Para el término de interacción obtenemos:

$$H_I = - \sum_{\underline{k}\underline{k}'} V_{\underline{k}\underline{k}'} b_{\underline{k}}^+ b_{\underline{k}'} \quad (1.3)$$

donde $V_{\underline{k}\underline{k}'} = \langle \underline{k}\uparrow, -\underline{k}\downarrow | V | \underline{k}'\uparrow, -\underline{k}'\downarrow \rangle$, es el elemento de matriz del potencial atractivo que da lugar a los pares de Cooper. H_I solo permite dispersión entre pares y es por lo tanto, repetimos, un modelo aproximado.

En este momento, uno puede preguntarse acerca de la posibilidad de la existencia de una interacción atractiva entre los electrones en un metal, ya que es este punto la esencia misma para la existencia real del estado superconductor. Voy a dar un argumento cualitativo para hacer plausible la existencia de esa interacción. Observemos la Fig. 2. Un metal, como sabemos, está compuesto por iones, colocados ordenadamente formando una red, y por electrones que pueden pasearse libremente entre el espacio delimitado por ésta. Imaginemos un electrón colocado entre cuatro iones. La presencia del electrón en ese punto, como se muestra en la figura, va a atraer los iones hacia sí mismo polarizando la red (círculos punteados). En esta forma, en la zona alrededor del electrón, se forma un exceso de carga positiva que atrae hacia ese punto, otro electrón cercano. Así los dos electrones tienen una interacción atractiva. Es oportuno repetir que el argumento no es una analogía siquiera,

sino que sirva para hacer plausible la existencia de la mencionada interacción atractiva entre dos electrones en un metal. Hecho esto, continuaremos con la descripción cuantitativa del estado superconductor que nos hemos propuesto.

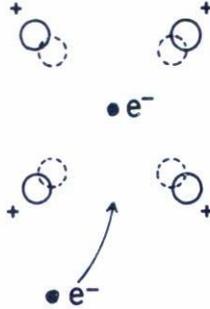


Fig. 2. La presencia de un electrón polariza la red creando una zona de exceso de carga positiva que puede atraer a otro electrón que pasa cerca: la interacción atractiva entre dos electrones en un metal se hace plausible por este modelo.

La Teoría BCS⁽¹⁾ por Bardeen, Cooper y Schrieffer, quienes lograron en 1957 la primera descripción correcta de la superconductividad, hace la hipótesis de que el estado base está descrito por la función de onda:

$$\psi = \prod_{\underline{k}} \left[u_{\underline{k}} + v_{\underline{k}} b_{\underline{k}}^+ \right] \phi_0 \quad (1.4)$$

donde ϕ_0 es el "vacío" (un estado sin pares de Cooper y sin electrones libres). $v_{\underline{k}}^2$ es la probabilidad de que el estado \underline{k} esté ocupado y $u_{\underline{k}}^2$ de que no lo esté. Obviamente:

$$u_{\underline{k}}^2 + v_{\underline{k}}^2 = 1 \quad (1.5)$$

La energía total del sistema se obtiene del valor de expectación del Hamiltoniano total:

$$E \equiv \langle H_0 + H_1 \rangle = 2 \sum_{\underline{k}} \epsilon_{\underline{k}} v_{\underline{k}}^2 - \sum_{\underline{k}\underline{k}'} V_{\underline{k}\underline{k}'} u_{\underline{k}} v_{\underline{k}} u_{\underline{k}'} v_{\underline{k}'}, \quad (1.6)$$

Para obtener el mínimo de energía, vamos a considerar $v_{\underline{k}}$ como un parámetro variacional condicionado a (1.5). La minimización de la energía con respecto al parámetro $v_{\underline{k}}$ nos da:

$$v_{\underline{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_{\underline{k}}}{(\epsilon_{\underline{k}}^2 + \Delta_{\underline{k}}^2)^{1/2}} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_{\underline{k}}}{E_{\underline{k}}} \right) \quad (1.7)$$

donde

$$\Delta_{\underline{k}} \equiv \sum_{\underline{k}'} V_{\underline{k}\underline{k}'}, u_{\underline{k}}, v_{\underline{k}}, \quad , \quad E_{\underline{k}} = (\epsilon_{\underline{k}}^2 + \Delta_{\underline{k}}^2)^{1/2} \quad (1.8)$$

$E_{\underline{k}}$ es la energía de las cuasipartículas (como se verá más adelante). Si en la fórmula para $\Delta_{\underline{k}}$ (1.8) insertamos (1.5) y (1.7); obtenemos finalmente:

$$\Delta_{\underline{k}} = \sum_{\underline{k}'} \frac{V_{\underline{k}\underline{k}'}}{2E_{\underline{k}'}} \Delta_{\underline{k}'}, \quad (1.9)$$

Este es el estado fundamental de la teoría BCS: Es una ecuación integral no-lineal, para el ancho de la banda prohibida .

La solución trivial: $\Delta_{\underline{k}} \equiv 0$, corresponde al estado normal. Si suponemos la existencia de una solución no-trivial $\Delta_{\underline{k}} \neq 0$, lo cual corresponde al estado superconductor, la energía total del sistema en ese estado E_s , será:

$$E_s = \sum_{\underline{k}} \left[\epsilon_{\underline{k}} \left(1 - \frac{\epsilon_{\underline{k}}}{E_{\underline{k}}} \right) - \frac{1}{2} \frac{\Delta_{\underline{k}}^2}{E_{\underline{k}}} \right] \quad (1.10)$$

Como es de esperar puede demostrarse que:

$$E_s < E_n \quad (1.11)$$

lo cual reitera el hecho de que el estado normal a $T = 0$ K es inestable con respecto al estado superconductor. Es decir, a $T = 0$ K un metal es superconductor, lo cual sucede en el caso general. Para explorar un poco las propiedades de este nuevo estados vamos a estudiar el modelo:

$$\begin{aligned} \Delta_{\underline{k}} &= \Delta = \text{const.} & |E_{\underline{k}}| < \theta_D \\ &= 0 & |E_{\underline{k}}| > \theta_D \end{aligned} \quad (1.12)$$

donde θ_D es la temperatura de Debye en unidades de energía. Podemos obtener una expresión para E_S usando la fórmula (1.10) con algunas aproximaciones: la densidad de estados $N(\epsilon_K)$ la tomamos aproximadamente igual a su valor sobre el nivel de Fermi (que suponemos constante) en el intervalo $|\epsilon_K| < \theta_D$. Integrando (1.10) obtenemos:

$$E_S = E_n - N(o) \theta_D \left[(\theta_D^2 + \Delta^2)^{1/2} - \theta_D \right] \quad (1.13)$$

Si suponemos que $\Delta \ll \theta_D$ como sucede en muchos superconductores, obtenemos una expresión aproximada:

$$E_S \cong E_n - \frac{1}{2} N(o) \Delta^2 \quad (1.14)$$

donde $N(o)$ es la densidad de estados sobre la superficie de Fermi. El espectro de ocupación y de excitación de las cuasipartículas que se obtienen aparece en la figura No. 3. Al compararlo con el del estado normal apreciamos diferencias en ambos espectros. La ocupación en el estado superconductor a $T = 0$ K toma la forma de una distribución normal a $T \neq 0$ K ($k_B T \sim \Delta$). La existencia de una banda prohibida, en el espectro de excitación, explica la rigidez del condensado ante perturbaciones de diversa índole.

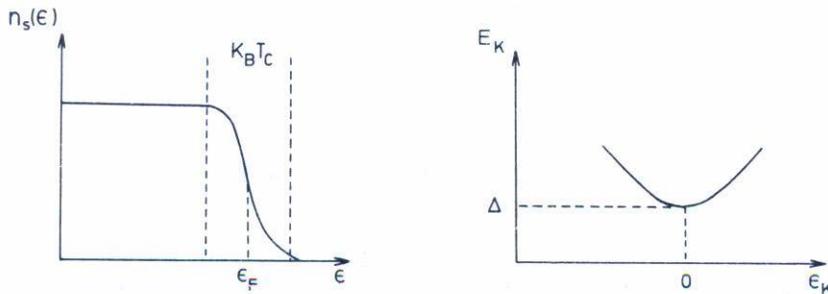


Fig. 3. Espectro de ocupación $n_s(\epsilon)$ y de excitación de las cuasipartículas en el estado superconductor. El cero de energía está en el nivel de Fermi.

La resistencia no se manifiesta en el estado superconductor en corriente directa porque si el potencial es muy bajo la energía que éste suministra al sistema electrónico no es suficiente para desligar un par de electrones (o romper un Par de Cooper). En consecuencia los electrones no pueden interactuar individualmente con el sistema fonónico y como es esta interacción la razón de que se manifieste resistencia, ésta no se manifiesta*. Otra propiedad del estado superconductor es el Efecto Meissner. Este efecto consiste en el comportamiento diamagnético perfecto del metal que puede visualizarse como la formación dentro del superconductor de una imagen del campo magnético externo de signo opuesto de tal manera que el campo no penetra dentro del superconductor ($B=0$). Esto crea una repulsión efectiva del imán, el cual entonces flota sobre la superficie del metal. Esto es muy importante en aplicaciones como el famoso tren japonés, entre otras. La teoría BCS explica bastante bien el comportamiento de un superconductor, aunque como veremos más adelante, el experimento muestra algunas desviaciones de ella. Veamos aún el caso del campo crítico H_C , que es el campo magnético que al aplicársele a un superconductor suministra tanta energía al sistema electrónico que rompe todos los pares de Cooper y acaba con el comportamiento superconductor. Este campo depende de la temperatura. Por argumentos termodinámicos puede mostrarse que:

$$E_n - E_s = H_C^2 (0) / 8\pi \quad (1.15)$$

Obtenemos la relación: (con ayuda de 1.14)

$$H_C(0) = 2[\pi N(0)]^{1/2} \Delta_0 \quad (1.16)$$

donde $H_C(0)$ y Δ_0 son los valores del campo magnético crítico y de Δ_0 a temperatura de 0 K.

* Esto ha permitido la creación de grandes campos magnéticos por bobinas superconductoras, tecnológicamente irrealizables por técnicas convencionales debido a la necesidad de disipar grandes cantidades de calor rápidamente.

Si se usan en esta expresión valores experimentales de $N(0)$ y Δ_0 , se obtienen valores de H_c en razonable acuerdos con el experimento.

Es interesante observar que la energía de condensación $E_n - E_s$ no es una función analítica de la constante de acoplamiento $N(0)V$, de tal manera que un tratamiento perturbativo, que parta de la fase normal, no podría encontrar este resultado al menos que sumase un número infinito de diagramas de Feynman correspondientes. Siguiendo las mismas líneas de análisis podemos introducir la dependencia de la temperatura. Para los propósitos de este artículo los detalles no son importantes. El lector interesado puede consultar la referencia 3, cuyo planeamiento hemos seguido esencialmente, en este punto.

2. MECANISMOS PARA LA INTERACCION EFECTIVA ENTRE LOS ELECTRONES Y SOLUCION DE LA ECUACION PARA LA BANDA PROHIBIDA

Hemos hecho plausible una interacción atractiva entre dos electrones en un metal. También hemos establecido la ecuación para la banda prohibida. Para poder obtener el valor de la banda prohibida que, en general, puede depender de k y de T , es necesario conocer la interacción efectiva entre los electrones. Hay dos factores esenciales en el potencial:

- a. la interacción electrón-fonón (e-f)
- b. la interacción electrón-electrón (e-e)

El efecto isótopo indica obviamente que la interacción e-e vía el intercambio de un fonón juega un papel importante. Bardeen y Pines⁽⁴⁾ mostraron que el elemento de matriz $-V_{k, k+q}$ para la dispersión de un electrón con momento k (onda de Bloch) a otro con momento k' , por medio del intercambio de un fonón de momento q , es: (Ver figura No. 4).

$$-V_{k, k+q} = \frac{2h \omega_k |M_k|^2}{(\epsilon_k - \epsilon_{k+q})^2 - h^2 \omega_k^2} \quad (2.1)$$

donde $h\omega_k$ es la energía del fonón y M_k es el elemento de matriz para la dispersión de un solo electrón por un fonón.

Esta expresión da lugar a una interacción atractiva siempre que $|\epsilon_k - \epsilon_{k+q}| < h\omega_k \sim \theta_D$, la energía de Debye. En cuanto a esta interac-

ción, el modelo BCS hace las siguientes hipótesis:

$$1) -V_{\underline{k}, \underline{k} + \underline{q}}^{\text{ph}} = -2 |M_{\underline{k}}|^2 (\hbar\omega_{\underline{k}})^{-1}, \quad |E_{\underline{k}}| + |E_{\underline{k} + \underline{q}}| < \theta_D \quad (2.2)$$

$$= 0 \text{ en toda otra región}$$

T_C crece con la masa del isótopo.

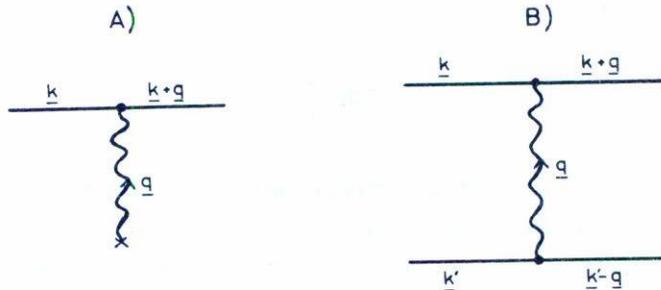


Fig. 4. A) dispersión de un solo electrón por un fonón. B) interacción de dos electrones por medio del intercambio de un fonón.

- 2) La energía de Coulomb se toma como un promedio de tal manera que es constante para la región donde $|E_{\underline{k}}| + |E_{\underline{k} + \underline{q}}|$ es menor que θ_D y 0 en otras regiones.

Más exactamente:

$$-V_{\underline{k}, \underline{k}'} = - (V_{\underline{k}, \underline{k}'}^{\text{ph}} + V_{\underline{k}, \underline{k}'}^{\text{C}}) = -V \quad \text{si } |E_{\underline{k}}|, |E_{\underline{k}'}| < \theta_D \quad (2.3)$$

$$= 0 \text{ en otras regiones.}$$

De donde, tomando la densidad de estados energéticos como constante sobre la superficie de Fermi, se deduce:

$$\Delta = \frac{\theta_D}{\text{Sinh} \frac{1}{N(0)V}} \sim 2\theta_D \exp \left(- \frac{1}{N(0)V} \right) \quad (2.4)$$

la última expresión vale en el límite de acoplamiento débil: $N(0)V \ll 1$. Para el caso de $T \neq 0$, BCS da:

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\theta_D} \frac{\tanh \left[\frac{(\epsilon^2 + \Delta^2)^{1/2}}{2k_B T} \right]}{(\epsilon^2 + \Delta^2)^{1/2}} d\epsilon \quad (2.5)$$

Usando $\lim_{T \rightarrow T_c} \Delta(T) = 0$, puede obtenerse T_c de:

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\theta_D} \frac{\tanh(\epsilon/2k_B T_c)}{\epsilon} d\epsilon \quad (2.6)$$

$$k_B T_c = 1.14 \theta_D e^{-\frac{1}{N(0)V}} \quad (2.7)$$

Esta ecuación reproduce el efecto isótopo ya que θ_D depende del isótopo. Combinando (2.4) y (2.7), se obtiene:

$$2 \Delta(T=0) = 3.52 k_B T_c \quad (2.8)$$

conocida como "ley de los estados correspondientes". Esta ley no se confirma por el experimento en todos los casos, lo cual era de esperarse por las simplificaciones hechas. La Teoría BCS da sin embargo excelentes resultados cuando se compara, en general, con los experimentos.

Thouless⁽⁵⁾ mostró que para acoplamiento fuerte $N(0)V \gg 1$, (T) puede expresarse como:

$$\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} = \tanh \frac{T_c \Delta(T)}{T \Delta(0)} \quad (2.9)$$

Finalmente, y como ya mencionamos, aunque la teoría BCS, con sus simplificaciones extraordinarias y solo un parámetro para ajustar $N(0)V$, dá resultados muy buenos, existen desviaciones en ciertos casos que la teoría no puede explicar y que tiene que corregirse estudiando con más cuidado la interacción responsable de la superconductividad.

3. DESVIACIONES DE LA TEORIA BCS

Para ilustrar las desviaciones de la teoría BCS que son, en general, pequeñas, voy a estudiar el campo magnético crítico, la atenuación ultrasónica y el relajamiento de los espines de los iones de la red, a título de ejemplos.

En el primer caso, consideraré la función de desviación definida como:

$$D(t) = \frac{H_c(T)}{H_c(0)} - \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right] \quad (3.1)$$

que es convencional utilizar. El campo crítico $H_c(T) = H_c(0) \left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right]$, para muchos superconductores y $D(t)$ describe obviamente la desviación de este resultado.

En la figura No. 5, tomada de la referencia 6, tenemos un resumen de las características de las desviaciones que se presentan de la teoría BCS en este caso. Son de dos tipos: el primer tipo se debe a la fortaleza de la interacción electrón-fonón. Las desviaciones positivas son características del acoplamiento fuerte (Pb,Bi), mientras que las desviaciones negativas son características del acoplamiento débil (Al,Tl). En la figura No. 6 puede verse como al dopar un elemento como el Pb con Bi (de acoplamiento más fuerte) se produce una desviación de la curva hacia arriba, mientras que al doparlo con Tl (de acoplamiento débil) se produce una desviación hacia abajo⁽⁷⁾. Volviendo a la figura No. 5, vemos como, por debajo de la curva marcada BCS (con características de acoplamiento débil), se encuentra otra con $\langle a^2 \rangle = .04$. Más tarde veremos que este otro tipo de desviación se debe a la anisotropía de la banda prohibida (a su dependencia con la dirección en la esfera de Fermi) y definiremos el parámetro a . Ambas desviaciones se presentan experimentalmente.

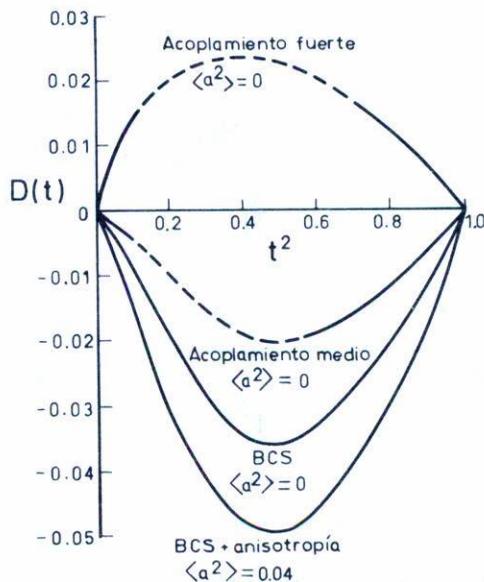


Fig. 5. La función de desviación

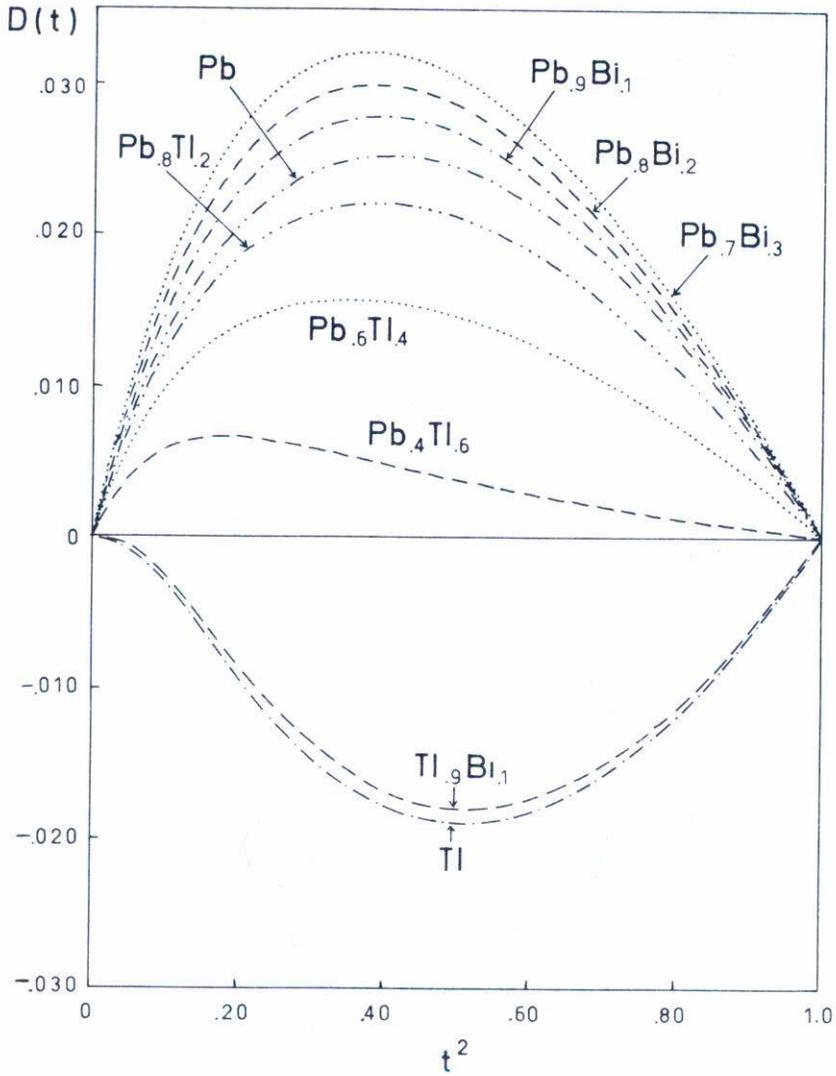


Fig. 6. Función de desviación para la serie de compuestos binarios a base de Tl, Pb y Bi cuyo acoplamiento se hace más débil hacia abajo de la curva (Ref. 7).

En el caso de la atenuación ultrasónica, de baja frecuencia, las desviaciones de la teoría BCS, son menos espectaculares. En la figura No. 7 podemos observar su carácter. La atenuación ultrasónica es una propiedad selectiva: los electrones que atenúan la onda tienen $\mathbf{k} \perp \mathbf{q}$, el vector de la onda ultrasonora.

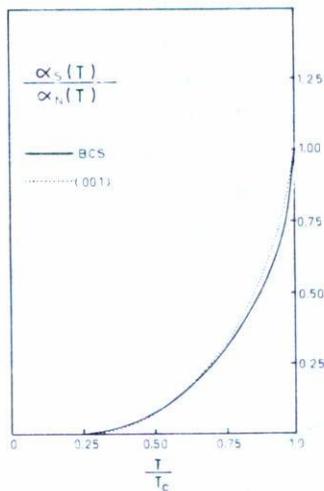


Fig. 7. Desviaciones de la atenuación ultrasónica de baja frecuencia de la teoría BCS, debidas a la anisotropía en la banda.

A medida que baja la temperatura, la energía térmica disponible para romper pares de Cooper es menor y esto favorece la participación en la atenuación ultrasónica de los electrones en aquellas zonas de la Superficie de Fermi, donde la banda superconductorora tiene un menor ancho. Al subir la energía de tal manera que $k_B T \gtrsim \Delta_{\max}$, todos los electrones con $\mathbf{k} \perp \mathbf{q}$ pueden participar. Este es el origen de las desviaciones: desde muy bajas temperaturas la atenuación indicaría una banda más pequeña de la que se deduciría de los resultados cerca de T_c , la temperatura crítica de transición⁽⁸⁾. Finalmente, el caso del relajamiento de los espines de los iones de la red: calculado con la teoría BCS, diverge donde el experimento muestra un máximo. Al introducir la anisotropía la divergencia desaparece. El cálculo de esta función da un acuerdo aceptable con el experimento, aún suponiendo una superficie esférica de Fermi⁽⁹⁾. Sin embargo, la anisotropía en la superficie de Fermi tiene también una contribución importante^(10,19). A este ejemplo volveremos más tarde.

4. ANISOTROPIA: LA TEORIA DE MARKOWITZ-KADANOFF

El punto de partida para la explicación de las desviaciones bajo la hipótesis de que la banda prohibida es anisotrópica, fue el trabajo de Anderson⁽¹¹⁾ quien consideró el efecto que las impurezas podrían tener sobre los pares de Cooper. Las impurezas acortan el camino libre medio y la energía de dispersión puede ser mayor que la energía de la banda superconductor. En este caso los electrones pueden ser dispersados en cualquier dirección con, esencialmente, la misma probabilidad y la anisotropía ya no se manifiesta. Vemos en la figura No. 8 el resultado de un experimento de absorción en el infrarrojo⁽¹²⁾. A medida que se introduce impurezas la discontinuidad se hace más abrupta, señal de que la anisotropía desaparece.

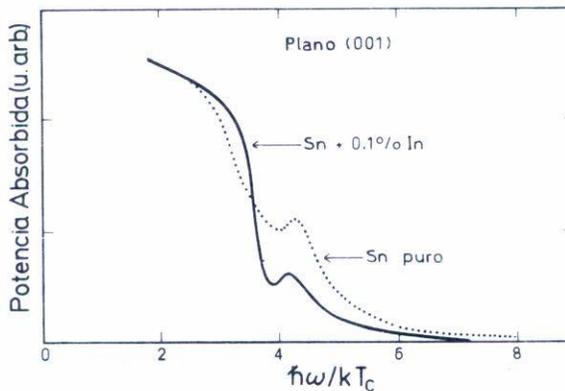


Fig. 8. Absorción en el infrarrojo. En Sn puro la discontinuidad tiene estructura. Impurezas de In hacen la discontinuidad abrupta (Ref. 12).

Teoría de Markowitz-Kadanoff. Para el caso cuando el acoplamiento es débil Markowitz-Kadanoff⁽¹³⁾ propusieron tratar, en base a la teoría BCS, el problema de la anisotropía por medio de un potencial separable:

$$V(\underline{k}, \underline{k}') = (1 + a_{\underline{k}}) V_{\text{BCS}}(1 + a_{\underline{k}'}) \quad (4.1)$$

$$a(\underline{k}) \equiv \frac{\Delta_{\underline{k}} - \langle \Delta_{\underline{k}} \rangle}{\langle \Delta_{\underline{k}} \rangle} \equiv a_{\underline{k}} \quad (4.2)$$

El parámetro de anisotropía $a(\underline{k})$ tiene un promedio igual a cero sobre la superficie de Fermi.

$a(\kappa)$ no depende de la temperatura, sólo de κ . Las desviaciones más pequeñas que las cantidades termodinámicas tienen de la teoría BCS, pueden expresarse como una serie en el parámetro de anisotropía y, a primer orden en V , son proporcionales a $\langle a^2 \rangle$.

Usando esta teoría, Markowitz y Kadanoff (Ver figura No. 9) pudieron explicar por qué T_C decrece al introducir algunas pocas impurezas en el metal (primera parte de la curva). En esta zona, la llamada zona del camino libre medio, T_C decrece debido a que las impurezas acortan el camino libre medio hasta hacerlo menos a la distancia de coherencia (dimensión lineal característica de la correlación de los electrones en el estado superconductor, o de la "órbita" de los pares de Cooper). Este hecho decrece la correlación bajando T_C que es precisamente una medida de esta energía. La curva cambia después (zona del efecto de valencia) debido a que al aumentar la concentración de impurezas, éstas ya no actúan como centros independientes de dispersión, lo cual puede introducir incluso cambios químicos del material. En este caso, como muestra la figura, si el material extraño es electro-positivo (menos electrones libres) sube T_C y si es electro-negativo, T_C baja.

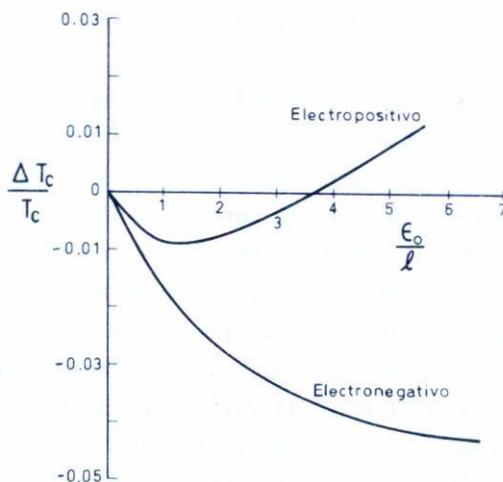


Fig. 9. Dependencia del cambio relativo en la temperatura crítica $\frac{\Delta T_c}{T_c}$ en función del inverso del camino libre medio $l \cdot \epsilon_0$ es la longitud de coherencia.

Usando esta teoría Clem⁽¹⁴⁾ calculó el efecto de la anisotropía en varias funciones termodinámicas. Sus resultados están en términos de $\langle a^2 \rangle$. Esencialmente, Clem supone una banda superconductora con un valor mínimo Δ_{\min} y uno máximo Δ_{\max} y con una distribución uniforme. Este modelo se conoce como "el modelo de dos bandas". Clem hace la distinción entre propiedades selectivas y no selectivas. Las últimas son aquellas donde todos los electrones disponibles participan, como el relajamiento de los espines nucleares de la red por interacción con los electrones y las selectivas son en las que sólo participa una cierta clase de electrones, siendo el tunelamiento de electrones libres una de las más típicas. (De acuerdo al criterio de Bennett, aceptado comúnmente, sólo aquellos electrones sobre la Superficie de Fermi que forman, en el espacio κ , un ángulo de 5° alrededor de la dirección de tunelamiento, participan en muestras no muy delgadas.) Estos experimentos son muy importantes. Más tarde me volveré a referir a ellos.

La teoría elaborada por Clem se usa mucho para comparar los resultados experimentales. Por medio de la comparación de la teoría y el experimento, se han atribuido diferentes valores de $\langle a^2 \rangle$ a los diferentes metales. En la tabla No. 1 presentamos dichos valores, para el Al y el In. (tomado de la referencia 6).

Ciertamente existen variaciones de $\langle a^2 \rangle$ que son grandes y, según Bostock y MacVicar⁽⁶⁾, están por encima de la incertidumbre experimental.

Este hecho, ha permitido concluir a esos mismos autores, recientemente, que la falta de consistencia entre los valores de la anisotropía obtenida por medio de diferentes técnicas experimentales, indica que la existencia misma de anisotropía en la banda prohibida está en duda.

Esta aseveración refleja la necesidad de un poco de más trabajo experimental para hacer un juicio sobre la anisotropía real que ha de atribuirse a cada material y la dificultad que existe al traducir resultados de los experimentos en valores de la banda superconductora en una dirección determinada del espacio κ . Existe sin embargo, una teoría microscópica bien fundada sobre la anisotropía de la banda superconductora que no dudo que el progreso experimental tienda a confirmar. Paso, en seguida, a exponer brevemente esa teoría. Se trata de las Ecuaciones de Eliashberg que son, esencialmente, la solución exacta de un problema de muchos cuerpos.

TABLA No. 1

(según K. Milkove, citado en la referencia 6).

Aluminio

Método	<a ² > min	
	In	Al
Radiación electromagnética	0.01	0.02
Atenuación ultrasónica	0.0003	0.011+0.002
Atenuación ultrasónica	0.01	0.02
Calor específico	0.01	0.010+0.003
Campo magnético crítico	0.027	0.013
Conductividad térmica	0.0008	ninguna
Dispersión por impurezas y deformación plástica	0.021	0.009
Dispersión por la frontera	0.027	0.016
Tunelamiento	--	0.009
Tunelamiento	--	0.001

5. LAS ECUACIONES DE ELIASHBERG

5.1 Introducción

Primero una introducción que creo conveniente. Las matemáticas involucradas son difíciles y no es conveniente entrar en detalles. Tampoco es necesario. Creo que puedo explicar la herramienta utilizada de una forma esquemática. Para obtener las ecuaciones de Eliashberg utilizamos el formulismo de las funciones de Green, convenientemente definidas. Las funciones de Green son el valor esperado en el estado base de combinaciones apropiadas de operadores de campo que resumen en forma muy adecuada la información acerca de un sistema físico (permiten calcular el estado base, el espectro de excitación, el valor esperado de cualquier operador y, eventualmente, toda la termodinámica). Esencialmente, podríamos pensar las funciones de Green como la probabilidad de que si agregamos en un momento t y un punto \underline{X} una partícula más en el estado \underline{k} a un sistema, ésta se encuentre en otro tiempo t' y otro punto \underline{X}' en otro estado \underline{k}' . Sucede que las funciones de Green tienen la enorme ventaja de poderse tratar en forma diagramática, es decir, asociando un cierto diagrama a una expresión matemática. Entonces la probabilidad referida puede visualizarse como la suma de las probabilidades —no estoy siendo muy exacto— de que la partícula no interactúa, más la probabilidad de que interactúa con el sistema como un todo, más la probabilidad de que cree una excitación en el sistema e interactúa con ella durante el tiempo en que tarda en decaer, etc... Esto gráficamente puede escribirse así (en el caso de un gas de electrones⁽¹⁵⁾):

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagrammatic expansion of the Green function} \\
 & \text{Equation (5.1.1)}
 \end{aligned}$$

Cada una de las líneas es una expresión matemática. La misma línea - siempre significa la misma expresión.

Es conveniente, para mejorar esas expresiones definir una cantidad que se llama auto energía propia $\Sigma \equiv$ 

$$\text{diagram of shaded circle} \equiv \text{diagram of wavy line} + \text{diagram of wavy line and circle} \quad (\text{en aproximación de Hartree-Fock a primer orden, aquí}). \quad (5.1.2)$$

y resumir la expresión para la función de Green como:

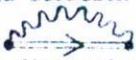
$$\text{diagram of two parallel lines} \equiv \text{diagram of one line} + \text{diagram of one line and shaded circle} \quad (5.1.3)$$

que se llama Ecuación de Dyson. La ecuación de Dyson es una ecuación auto-consistente para la función completa de Green y es muy conveniente para trabajar aproximaciones. Uno puede ver cómo una aproximación a primer orden de Σ puede generar una suma infinita de expresiones de cierto tipo para G .

Como vimos anteriormente, las desviaciones de la teoría BCS deben buscarse en un tratamiento más realista del potencial $V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$. Por lo tanto uno debe partir de un Hamiltoniano que describa correctamente el gas de electrones, el gas de fonones, la interacción electrón-fonón y la repulsión electrón-electrón:

$$H = H_e + H_f + H_{e-f} (+H_{e-e}) \quad (5.1.4)$$

Para deducir ecuaciones más apropiadas para la banda prohibida superconductor se parte del Hamiltoniano compuesto de los tres primeros términos y el último se introduce como una perturbación.

Las ecuaciones de Eliashberg son esencialmente la suma de un número infinito de diagramas selectos para la interacción electrón-fonón cuya precisión es del orden de $(\frac{m}{M})^{1/2}$ donde m es la masa del electrón y M la del ión, por medio del método descrito más arriba. Más exactamente ahora, sumamos la ecuación de Dyson: $G^{-1} = G_0^{-1} - \Sigma$ con la condición de Nambu $\Sigma =$  donde G es una función de Green matricial de 2×2 en cuya diagonal se encuentran las funciones de Green propias para espín hacia arriba y hacia abajo respectivamente y en los

elementos no diagonales se encuentran otras funciones conocidas como las amplitudes anómalas de Gorkov. La suma de un número infinito de términos selectos ("Nido" o sea con $\omega \sim \omega_0$) da directamente las ecuaciones de Eliashberg que aparecen más abajo una vez introducida la interacción H_{e-e} , en forma aproximada. Estas ecuaciones vienen a reemplazar la ecuación para la banda prohibida obtenida en la Teoría BCS. Espero haber dejado una idea acerca del proceso involucrado en la deducción de estas ecuaciones, sobre todo acerca de sus bases y de su precisión.

Las ecuaciones de Eliashberg a $T = 0$ K isotrópicas (no dependientes de κ) son⁽¹⁶⁾:

$$\begin{aligned} \Delta(\omega)Z(\omega) &= \int_0^{\omega_C} d\omega' \operatorname{Re} \left[\frac{\Delta(\omega')}{[\omega'^2 - \Delta^2(\omega')]^{1/2}} \right] [K_+(\omega, \omega') - \mu^*] \quad (5.1.5) \\ \{1-Z(\omega)\} &= \int_0^{\omega_C} d\omega' \operatorname{Re} \left[\frac{\omega'}{[\omega'^2 - \Delta^2(\omega')]^{1/2}} \right] K_-(\omega, \omega') \\ K_{\pm}(\omega, \omega') &= \int_0^{\infty} d\nu \alpha^2(\nu)F(\nu) \left(\frac{1}{\omega' + \omega + \nu + i0^+} + \frac{1}{\omega' - \omega + \nu - i0^+} \right) \end{aligned}$$

Es muy interesante observar estas ecuaciones. En particular debe uno notar que toda distinción entre diferentes materiales solo aparece en la densidad espectral $\alpha^2 F$ y en el parámetro μ^* .

Tanto la función $\alpha^2 F$ como el parámetro μ^* pueden determinarse por medio de experimentos de tunelamiento. La forma de hacerlo es la siguiente: La corriente I en función del voltaje aplicado V puede obtenerse en función de la banda $\Delta(\omega)$ que es solución de las ecuaciones de Eliashberg. Empezando con un modelo para $\alpha^2 F$ y μ^* se emplean en las ecuaciones de Eliashberg y se obtiene de ellas $I(V)$. Se reforma $\alpha^2 F$ y μ^* de acuerdo a una comparación de $I(V)$ con el experimento hasta que los resultados coincidan. Así se obtienen $\alpha^2 F$ y μ^* .

Los resultados para el plomo, son satisfactorios y confirman la validez de estas ecuaciones. A este proceso se le llama invertir las Ecuaciones de Eliashberg.

5.2 La función densidad espectral

La función densidad espectral que aparece en las ecuaciones de Eliashberg, está definida de la forma:

$$\alpha^2(\nu)F(\nu) = \frac{\int \frac{dS_{\underline{\kappa}'}}{\hbar|V_{\underline{\kappa}'}|} \int \frac{dS_{\underline{\kappa}}}{\hbar|V_{\underline{\kappa}}|} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} |g_{\underline{\kappa}, \underline{\kappa}'}^{\lambda}|^2 \delta(\nu - \omega_{\lambda}(\underline{\kappa}' - \underline{\kappa}))}{\int \frac{dS_{\underline{\kappa}}}{\hbar|V_{\underline{\kappa}}|}} \quad (5.2.1)$$

Las integraciones son sobre la superficie de Fermi, sobre estados finales e iniciales. $V_{\underline{\kappa}}$ es la velocidad de Fermi, $D_{\underline{\kappa}}$ el elemento de superficie. El índice λ es el índice de la rama fonónica y $g_{\underline{\kappa}, \underline{\kappa}'}^{\lambda}$ es la constante de acoplamiento de la dispersión electrón-fonón:

$$g_{\underline{\kappa}, \underline{\kappa}'}^{\lambda} = -i \left| \frac{\hbar \Omega}{2MN\omega_{\lambda}(\underline{\kappa}' - \underline{\kappa})} \right|^{1/2} \varepsilon_{\lambda}(\underline{\kappa}' - \underline{\kappa}) \cdot \left\{ \sum_{\underline{\kappa}_n} \sum_{\underline{\kappa}_n'} a_{\underline{\kappa}_n}^* a_{\underline{\kappa}_n}(\underline{\kappa}) (\underline{\kappa}' + \underline{\kappa}_n, -\underline{\kappa} - \underline{\kappa}_n) \langle p' | W | p \rangle \right\} \quad (5.2.2)$$

$\varepsilon_{\lambda}(\underline{\kappa}' - \underline{\kappa})$ es el vector de polarización, W el pseudopotencial y

$$| \underline{\kappa} \rangle = \frac{1}{\Omega^{1/2}} e^{i\underline{\kappa} \cdot \underline{x}} \sum_{\underline{\kappa}_n} e^{i\underline{\kappa}_n \cdot \underline{x}} a_{\underline{\kappa}_n}(\underline{\kappa}) \quad (5.2.3)$$

es una onda plana ortogonalizada donde $\underline{\kappa}_n$ representan los vectores inversos de la red. La constante de acoplamiento $g_{\underline{\kappa}, \underline{\kappa}'}^{\lambda}$ describe la dispersión de un electrón sobre la superficie de Fermi en un estado $\underline{\kappa}$ a otro estado $\underline{\kappa}'$ también sobre la superficie de Fermi, por la creación o destrucción de un fonón de frecuencia $\omega_{\lambda}(\underline{\kappa}' - \underline{\kappa})$.

En el cálculo de $\alpha^2 F$ entran entonces tres factores: el cálculo de la Superficie de Fermi de donde obtenemos $dS_{\underline{\kappa}}, V_{\underline{\kappa}}$ y $a_{\underline{\kappa}_n}(\underline{\kappa})$, el cálculo del pseudopotencial de donde obtenemos los elementos matriz $\langle p' | W | p \rangle$ y la dinámica de la red que puede obtenerse de las constantes de fuerza de Born-Von Kármán de donde salen $\omega_{\lambda}(\underline{\kappa})$ y $\varepsilon_{\lambda}(\underline{\kappa})$. Estos cálculos se han

hecho para el plomo⁽¹⁷⁾, entre otros, para el cual existen resultados experimentales⁽¹⁸⁾. El acuerdo es muy bueno.

5.3 Anisotropía en la Banda Superconductora

Para inducir la anisotropía es necesario considerar una función $\alpha^2 F$ que depende de la dirección. Podemos escribir nuevamente la fórmula para esta función en la forma:

$$\alpha^2(\nu)F(\nu) = \frac{\int \frac{dS_{\underline{k}}}{\hbar|\underline{v}_{\underline{k}}|} \alpha_{\underline{k}}^2(\nu)F_{\underline{k}}(\nu)}{\int \frac{dS_{\underline{k}}}{\hbar|\underline{v}_{\underline{k}}|}} \quad (5.3.1)$$

donde $\alpha_{\underline{k}}^2(\nu)F_{\underline{k}}(\nu)$, que queda definida por esta expresión, se llama la densidad espectral direccional. Esta función es muy útil. Por ejemplo, la masa efectiva anisotrópica se calcula como:

$$\frac{m_{\underline{k}}^*}{m} = 1 + \lambda_{\underline{k}} \quad (5.3.2)$$

con
$$\lambda_{\underline{k}} = 2 \int_0^{\infty} \frac{\alpha_{\underline{k}}^2(\omega)F_{\underline{k}}(\omega)d\omega}{\omega}$$

donde m es la masa del electrón libre.

Esta misma función es necesaria para calcular la anisotropía en la banda superconductora. Esta anisotropía tiene tres fuentes principales: La superficie real de Fermi y las funciones de onda electrónicas, por un lado; el espectro fonónico, por otro y, especialmente, la interacción electrón-fonón.

La interacción electrón-fonón es una fuente muy importante de anisotropía aunque la superficie real de Fermi se ha mostrado como una contribución importante en Al, por ejemplo⁽¹⁹⁾.

Las ecuaciones de Eliashberg propias para el cálculo de la banda prohibida superconductora son muy complicadas. Hasta ahora nadie ha encontrado una forma de iterarles hasta su convergencia. Para resolver estas ecuaciones se ha obtenido $\Delta(\omega)$ y $Z(\omega)$ de las ecuaciones anisotró-

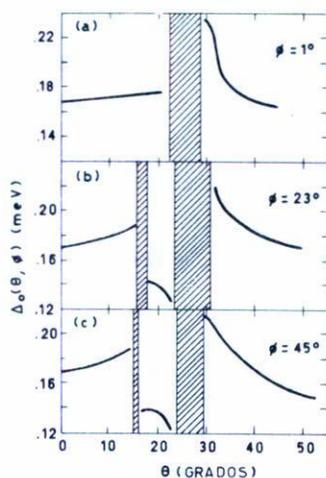


Fig. 10. La banda superconductora en tres arcos diferentes sobre la 1/48 de la Superficie de Fermi del Al.

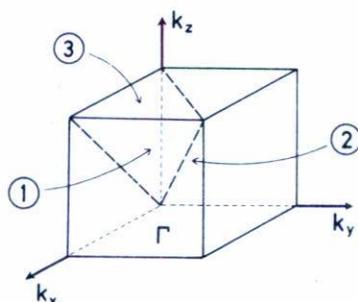


Fig. 11. La zona irreducible sobre la superficie de Fermi mencionada en la texto está determinada por los planos:

$$k_x = k_z \quad k_x = k_y \quad k_z = \text{Const.}$$

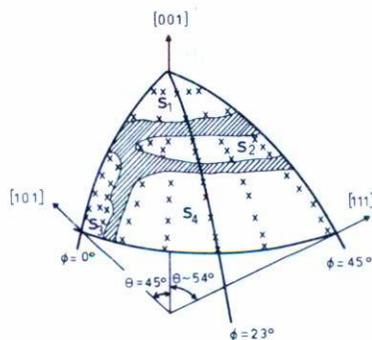


Fig. 12. Los 62 puntos donde fueron calculados los valores para la banda prohibida en el Al Superconductor (Ref. 24).

picas de Eliashberg y con esas soluciones se ha iterado una vez las ecuaciones anisotrópicas. Este procedimiento fue sugerido por Bennett⁽²⁰⁾. Las Ecuaciones de Eliashberg para $\Delta(\underline{\kappa}, \omega)$ en la forma original pueden encontrarse, por ejemplo, en las referencias 16 y 21.

La referencia 21 es particularmente completa acerca del problema del acoplamiento fuerte. Voy a escribir solo las ecuaciones una vez simplificadas, según la sugerencia de Bennett:

$$\begin{aligned} \Delta(\underline{\kappa}, \omega) Z(\underline{\kappa}, \omega) &= \int_0^{\omega_C} d\omega' \operatorname{Re} \left[\frac{\Delta(\omega')}{\sqrt{\omega'^2 - \Delta^2(\omega')}} \left[\kappa_+(\omega, \omega'; \underline{\kappa}) - N(0) U_C \right] \right] \\ \left[1 - Z(\underline{\kappa}, \omega) \right] \omega &= \int_0^{\omega_C} d\omega' \operatorname{Re} \left[\frac{\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - \Delta^2(\omega')}} \right] \kappa_-(\omega, \omega'; \underline{\kappa}) \quad (5.3.3) \\ \kappa_{\pm}(\omega, \omega'; \underline{\kappa}) &= \int_0^{\infty} dv \alpha_{\underline{\kappa}}^2(v) F_{\underline{\kappa}}(v) \left(\frac{1}{\omega' + \omega + v + i0^+} \pm \frac{1}{\omega' - \omega + v - i0^+} \right) \end{aligned}$$

Estas ecuaciones son válidas tanto para acoplamiento fuerte como para acoplamiento débil⁽²²⁾. Para el caso de acoplamiento fuerte fueron resueltas para el Pb⁽¹⁷⁾, por este proceso. Para el caso del acoplamiento débil estas ecuaciones fueron simplificadas considerablemente⁽²³⁾ y resueltas para el caso del Aluminio⁽²⁴⁾. Reproduzco estos resultados en la figura No. 10. Los resultados están presentados sobre la $\frac{1}{48}$, o sea la zona irreducible, de la Superficie de Fermi para elementos cúbicos centrados en volumen (bcc) como es Al. Es $\frac{1}{48}$ parte de la esfera completa como resultado de que el grupo cúbico tiene 48 elementos de simetría⁽²⁵⁾. La zona irreducible escogida está definida en la región $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z \geq 0$, del espacio $\underline{\kappa}$ con el punto Γ como origen y las coordenadas a lo largo de las direcciones cristalinias $\{1,0,0\}$. La zona irreducible aparece en la figura No. 11 y explica la escala usada en la figura No. 10. En la figura No. 12, se muestran otra vez estos resultados en una forma más ilustrativa. Ahí están marcados los puntos donde fueron resueltas las ecuaciones simplificadas de Eliashberg. Por medio de esta solución se calcula $\langle \alpha^2 \rangle = .0187$ que debe compararse con los valores de la Tabla No. 1.

En lo que sigue de esta charla, voy a presentar los resultados que nosotros hemos obtenidos para el Al superconductor, tomando en cuenta la Superficie real de Fermi⁽²⁶⁾ en tres experimentos diferentes: la razón de relajamiento de los espines nucleares de la red por interacción con los electrones y el calor específico a bajas temperaturas⁽¹⁹⁾, ambas propiedades no selectivas, y la atenuación ultrasónica, una propiedad selectiva a baja⁽²⁷⁾ y alta⁽²⁸⁾ frecuencia.

Antes de pasar a ello quiero, sin embargo, llamar la atención sobre el hecho —a manera de conclusión— de que las Ecuaciones de Eliashberg constituyen un problema de muchos cuerpos, resuelto en forma exacta, esencialmente, que relaciona directamente la banda prohibida superconductor a parámetros microscópicos de los metales. La relación es a través de un funcional que no ha encontrado forma analítica sino numérica, pero totalmente bien fundada físicamente y esencialmente exacta. El valor de la banda $\Delta(\kappa)$ que resulta de resolver estas ecuaciones contiene aproximaciones de método y solo es exacto dentro de la medida en que el método lo es (la sugerencia de Bennett, en este caso). En este punto existe posibilidad de progreso. Creo que sería más difícil encontrar ejemplos reales donde las ecuaciones de Eliashberg no valgan. Existe una dificultad mayor en deducir $\Delta(\kappa)$ desde los resultados experimentales. En general ha sido la teoría de Markowitz-Kadanoff la más utilizada para comparar teoría y experimento y $\langle a^2 \rangle$ suele ser el resultado, como ya lo mencioné. Esta teoría no relaciona —y así está concebida— $\Delta(\kappa)$ con parámetros fundamentales. En este sentido, y dado que los electrones que intervienen en diferentes experimentos de carácter selectivo provienen de diferentes zonas de la superficie de Fermi, una comparación de los experimentos con esta teoría podría dar la sensación de incongruencia (véase ref. 6).

Por otro lado, una comparación con los resultados que emanan de la solución de las ecuaciones de Eliashberg puede presentarse a inexactitudes. Así por ejemplo, los resultados obtenidos por Leavens y Carbotte para el Al, sin introducir la superficie real de Fermi⁽²³⁾ son estudiados por Blackford⁽²⁹⁾ en experimentos de tunelamiento. La comparación da un acuerdo excelente. Al introducir la Superficie de Fermi en sus cálculos, Leung et al⁽²⁴⁾ encontraron valores que difieren bastante de los anteriores, cuando lo esperado era encontrarlos más exactos.

Es posible que esta aparente ambigüedad tenga su explicación en dificultades inherentes a la caracterización de las muestras in situ, pero también a los criterios usados para determinar la zona de la superficie de Fermi que intervienen en cada experimento. Estos criterios de selección, lo mismo que la influencia de las impurezas en la muestra (que acortan el camino libre medio) podrían ser objeto de mayor análisis. Paso a analizar brevemente las funciones termodinámicas propuestas.

6. INFLUENCIA DE LA ANISOTROPIA EN LA SUPERFICIE DE FERMI Y DE LA BANDA SUPERCONDUCTORA EN LA TERMODINAMICA DEL ALUMINIO EN ESTADO SUPERCONDUCTOR

6.1 Razón de relajamiento de los espines nucleares de la red.

El experimento consiste en alinear los espines de los iones de la red por medio de un campo magnético aplicado y, una vez alineados, dejar que se termalice su orientación. Debido al efecto Meissner que consiste en que el superconductor crea una imagen del campo exterior de tal manera que $B = 0$ dentro del material (se comporta como un material diamagnético perfecto), el metal no podría alinearse en el estado superconductor.

Por esta razón se aplica un campo suficientemente fuerte (mayor que el campo crítico) de tal manera que aún si $T < T_c$ el metal se encuentra en el estado normal y los espines nucleares pueden alinearse. Después de alineados se anula el campo y la muestra pasa al estado superconductor inmediatamente. Así el relajamiento de los espines se produce en el estado superconductor. Los datos de Leavens y Carbotte⁽²³⁾ fueron usados por Carbotte y Truant⁽³⁰⁾ para calcular el efecto de la anisotropía de la banda en esta función termodinámica. Ellos no incluyeron el efecto de la superficie real de Fermi. Lograron, sin embargo que la divergencia logarítmica obtenida por la Teoría BCS desapareciese⁽¹⁴⁾. Sus resultados están en acuerdo razonable con los experimentos conocidos de Hebel y Slichter⁽³¹⁾ y de Anderson y Redfield⁽³²⁾.

La anisotropía de la banda superconductora probablemente no varía mucho con la temperatura⁽²³⁾. Puede definirse, en consecuencia, una función de anisotropía que no varía con la temperatura. Ya había definido:

$$a(\Omega) \equiv \frac{\Delta(T, \Omega) - \langle \Delta(T, \Omega) \rangle}{\langle \Delta(T, \Omega) \rangle} \quad (6.1.1.)$$

Tomamos el promedio de cualquier función definida sobre la superficie de Fermi por medio de la fórmula:

$$F(\Delta(T,\Omega)) = \int P(a) F[\langle \Delta(T,\Omega) \rangle (1+a)] da \quad (6.1.2)$$

$P(a)$ es la función de distribución de la anisotropía y es tal que $P(a)$ da es la fracción de la densidad total de estados electrónicos sobre la superficie de Fermi para la cual la anisotropía está entre a y $a+da$.

En las fórmulas anteriores, la función $\Delta(T,\Omega)$ es la banda prohibida superconductora, T es la temperatura, Ω es un ángulo que localiza un punto sobre la superficie de Fermi. $\langle \rangle$ que quiere decir "promedio sobre la superficie de Fermi".

La función $P(a)$ calculada por Leavens y Carbotte⁽²³⁾ muestra mucho más estructura que la distribución uniforme propuesta por Clem⁽¹⁴⁾. Sin embargo, hemos encontrado⁽¹⁹⁾ que ni en el relajamiento de los espines nucleares de la red ni en el calor específico a baja temperatura, que trataremos en seguida, los detalles de $P(a)$ influyen fuertemente sobre los resultados. En la figura No. 13 mostramos la función $P(a)$ ya referida, superpuesta por una versión muy simplificada de la misma con la cual reproducimos esencialmente el mismo resultado. Aquí volvemos a encontrar un ejemplo de la dificultad que existe para atribuir anisotropía a la banda superconductora desde los resultados experimentales: muchos detalles se pierden y por ello más que atribuir a un material una cierta anisotropía en base a un experimento, debe buscarse si una cierta anisotropía teóricamente bien fundamentada, es consistente con todos los experimentos realizados sobre un determinado material. Los datos se han ido, poco a poco, acumulando para el aluminio —el metal que nos interesa— y aunque, en ciertos casos, un mayor esfuerzo experimental sería deseable, la imagen que va surgiendo parece adaptable.

La expresión para la razón del relajamiento de los espines nucleares de la red en el estado superconductor y en el estado normal es⁽¹⁴⁾:

$$\frac{R_S(T)}{R_N(T)} = \frac{1}{K_B T} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\omega) [1-f(\omega)] \{ \langle n(T,\Omega,\omega) \rangle^2 + \langle \bar{n}(T,\Omega,\omega) \rangle^2 \} \quad (6.1.3)$$

donde K_B es la constante de Boltzman y $f(\omega)$ es la distribución de Fermi-Dirac. La función

$$n(T, \Omega, \omega) = \text{Re} \left(\frac{\omega}{[\omega^2 - \Delta_0^2(T, \Omega)]^{1/2}} \right) \quad (6.1.4)$$

es la densidad anisotrópica de cuasipartículas y el otro factor es la función, relacionada con ésta:

$$\bar{n}(T, \Omega, \omega) = \text{Re} \left(\frac{\Delta_0(T, \Omega)}{[\omega^2 - \Delta_0^2(T, \Omega)]^{1/2}} \right) \quad (6.1.5)$$

En la figura No. 14 mostramos los resultados obtenidos. La inclusión de la anisotropía de la superficie de Fermi (además de la anisotropía en la interacción electrón-fonón) tiene el efecto de cambiar el máximo de la curva de 1.9 a 1.7, lo cual es un efecto menor, aunque no despreciable. La anisotropía no puede cambiar la forma de la curva. Este resultado está en mejor acuerdo con los resultados experimentales de Hebel y Slichter⁽³¹⁾ que con los de Anderson y Redfield⁽³²⁾.

Sería deseable que se hicieran más experimentos de este tipo para propiciar una examen más detenido de estos resultados.

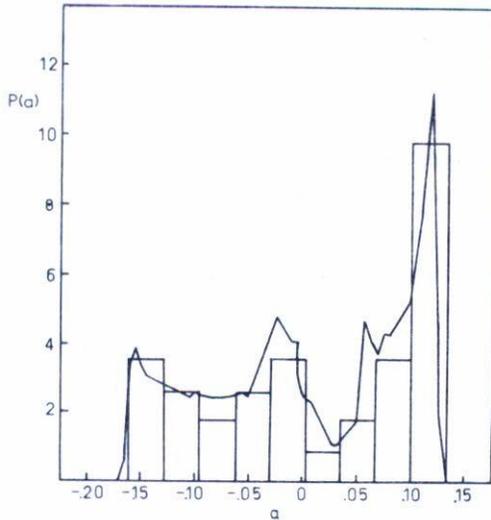


Fig. 13. $P(a)$ para el Al con una versión muy simplificada de la misma.

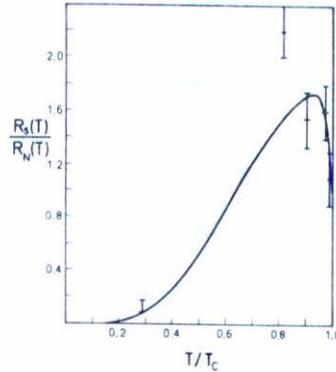


Fig. 14. Razón del relajamiento de los espines nucleares de la red para el Al superconductor.

6.2 El calor específico a bajas temperaturas

El calor específico del Al a bajas temperaturas fue considerado por Leavens y Carbotte⁽²³⁾ sin tomar en cuenta la superficie real de Fermi y por Baquero y Carbotte⁽¹⁹⁾ introduciendo este efecto adicional. El método es el mismo del usado en el relajamiento de los espines nucleares de la red, razón por la cual me limitaré a los resultados.

El calor específico a bajas temperaturas se calcula a partir de la expresión⁽¹⁴⁾:

$$C_S = 2N(0)k_B\beta^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \omega^2 f(\omega) [1-f(\omega)] \langle n(T, \Omega, \omega) \rangle \quad (6.2.1)$$

$\beta \equiv \frac{1}{k_B T}$ es la única cantidad no introducida con anterioridad.

La figura No. 15 hace una comparación entre los diferentes resultados obtenidos. La curva de abajo es el resultado de la teoría BCS. La de arriba toma en cuenta la anisotropía tanto de la superficie de Fermi como de la banda⁽¹⁹⁾. La línea cortada corresponde a la teoría de Clem con $\langle a^2 \rangle = 0.007$ (abajo) y $\langle a^2 \rangle = 0.013$ respectivamente. La línea punteada es el resultado despreciando la anisotropía de la superficie de Fermi⁽²³⁾.

El experimento realizado por Ducla Soares⁽³³⁾ arroja datos que no se ajustan a una sola curva de este tipo. Las dos curvas cortadas mencionadas arriba son el resultado de un ajuste de los datos experimentales

a la teoría de Clem de manera tal que los datos queden comprendidos entre las dos curvas.

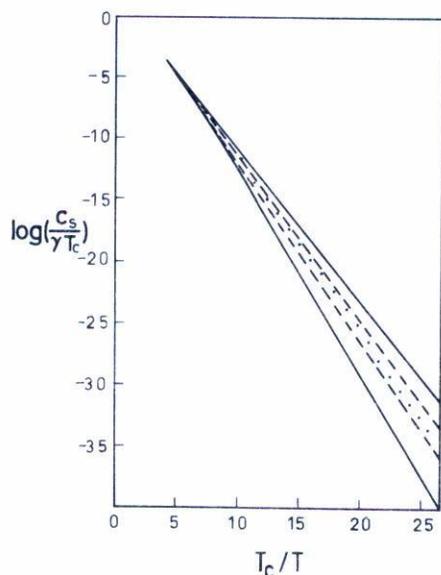


Fig. 15. Diferentes resultados obtenidos para C_v . (Ver texto).

La curva punteada que no incluye la anisotropía en la superficie de Fermi debe ser comparada con la curva superior de la figura que incluye los efectos tanto de la anisotropía de la banda como la de la superficie real de Fermi. En este caso, la contribución de la superficie real de Fermi tiene un efecto comparable a la interacción electrón-fonón. Estas últimas conclusiones teóricas, sin embargo, están fuera de los resultados experimentales tal como se conocen hoy en día⁽³³⁾. Aquí nuevamente sería deseable contar con más datos experimentales.

6.3 La atenuación ultrasónica

La atenuación ultrasónica es la única propiedad selectiva que he incluido en este artículo. Selectiva quiere decir que no todos los electrones sobre la superficie de Fermi pueden intervenir en el fenómeno. En la atenuación ultrasónica se trata de un pulso que se crea en el metal y que se propaga a lo largo de la red en forma de una onda sonora, esto es, dando lugar a cambios en la densidad local debido a vibraciones inducidas en los iones de la red.

En otro lenguaje, se trata de la generación coherente de fonones de un mismo vector \underline{q} y una misma energía $\hbar\omega_{\underline{q}}$. La relación de dispersión es tal que $\omega_{\underline{q}}$ es proporcional a q y la constante de proporcionalidad es la velocidad del sonido. La energía del fonón es del orden de MeV o incluso menor. La energía de los electrones sobre la superficie de Fermi es del orden de eV. Cuando la energía del fonón es mucho menor que la energía de la banda, hablamos de baja frecuencia. En el caso contrario hablamos de alta frecuencia. En ambos casos la energía de la onda (del fonón) es tan pequeña que solo puede inducir transiciones de un electrón sobre la superficie de Fermi en un estado $\underline{\kappa}$ a otro $\underline{\kappa}'$ esencialmente también sobre la superficie de Fermi. Los electrones que pueden realizar ese tipo de transiciones conservando también el momento total son aquellos que están perpendiculares a la dirección de \underline{q} sobre la superficie de Fermi y forman un círculo máximo sobre ésta. Esta regla de selección se ilustra en la figura No. 16.

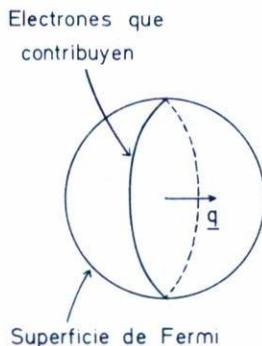


Fig. 16. Regla de Selección para la atenuación ultrasónica.

6.3.1. La atenuación ultrasónica de baja frecuencia⁽²⁷⁾

En el caso cuando la onda ultrasonora tiene una energía pequeña con respecto a la banda prohibida superconductor, la atenuación de la onda se realiza por la absorción de energía por parte del gas de electrones vía la interacción electrón-fonón.

Los únicos electrones disponibles para el proceso son las cuasi-partículas creadas por energía térmica. Su número depende exclusivamente

de la temperatura. A $T=0$ K no hay cuasi-partículas y los fonones creados tienen una vida media infinita. A medida que sube la temperatura la onda va siendo atenuada por los electrones libres que se van creando. Al llegar a la temperatura crítica todo el sistema electrónico interviene. La curva que se obtiene aparece en la figura No. 7, ya mencionada.

La razón por la cual se atenúa la onda es por la creación de un campo eléctrico debido a que el desplazamiento de los iones que la onda induce no es seguido inmediatamente por los electrones. Los centros de carga no coinciden y se crea un campo local que acelera los electrones. La dispersión de éstos termaliza la energía en las direcciones posibles y la onda se atenúa.

Como mencioné más arriba, la anisotropía crea una desviación de la teoría BCS como la presentada en la figura No. 7. Los experimentos realizados por Ducla-Soares⁽³³⁾ dan una anisotropía de la banda consistente con los datos de Leavens y Carbotte⁽²³⁾. En el criterio de selección empleado⁽³³⁾ se toma en cuenta la contribución de impurezas (que acortan el camino libre medio) a través de un ensanchamiento dentro del círculo de la figura No. 16 para obtener un cinturón de ancho finito.

Una variación del resultado, dependiendo del ancho de este cinturón, puede apreciarse y la contribución de la anisotropía de la superficie real de Fermi puede ser grande en ciertas direcciones⁽³⁴⁾.

6.3.2. La atenuación ultrasónica a alta frecuencia^(28,34)

El punto interesante en el caso de alta frecuencia es la posibilidad de ruptura de pares por la onda misma. En este caso la atenuación existe incluso a 0 K. En la teoría BCS, si uno cambia la frecuencia de la onda ultrasonora desde $\omega_{\max} < 2\Delta$ a $\omega_{\max} > 2\Delta$, uno obtiene una clara discontinuidad para el valor donde $\omega = 2\Delta$ ⁽³⁵⁾, debido a que la onda rompe pares de Cooper y esas cuasi-partículas empiezan a participar en la atenuación. El trabajo de Bobetic⁽³⁵⁾ ha sido extendido por Baquero, Brito y Carbotte⁽³⁴⁾ para tomar en cuenta tanto la anisotropía en la banda superconductoras como la anisotropía en la superficie real de Fermi. En la última referencia, se encuentra una estructura en la atenuación

que mapea bien la anisotropía de la banda sobre la superficie de Fermi. Voy a ilustrar esta idea⁽³⁶⁾: supongamos que, dentro del cinturón donde se encuentran los electrones que participan en la atenuación ultrasónica, la banda es anisotrópica de tal manera (como el caso del Al, por ejemplo⁽³⁴⁾) que cambie notoriamente de valor de una parte del cinturón a otra.

Supongamos además, que hay una región 1 donde $\Delta=1$ y una región 2 donde $\Delta=2$. Al variar la frecuencia de 0 a 5, por ejemplo, vamos a medir primero una atenuación cero. Al llegar a 2, súbitamente los electrones de la región 1 van a participar. Así obtenemos una primera discontinuidad en la atenuación. Entre $\omega=2$ y $\omega \leq 4$ la atenuación va a decrecer esencialmente como $1/\omega$, pero al llegar a $\omega=4$ se produce otra discontinuidad que refleja la entrada de un nuevo grupo de electrones en el proceso, los de la región 2. Así vemos como un análisis detallado de la estructura de la función de atenuación ultrasónica para alta frecuencia podría dar buen indicio de la anisotropía en la banda. El mismo análisis se aplica a los Grupos de Neutrones⁽³⁷⁾. Desgraciadamente, los experimentos existentes para Al⁽³⁸⁾ no permiten aún ese análisis detallado que sería necesario. Los resultados de Lyall et al⁽³⁸⁾ sólo muestran un ensanchamiento en la transición pero no su estructura. La atenuación ultrasónica de alta frecuencia promete ser, sin embargo, una buena prueba para la anisotropía. Más trabajo experimental sería deseable aquí también.

Nuestros resultados para este caso se muestran en la figura No. 17. Debemos anotar aquí que las discontinuidades que aparecen dependen de manera crítica del modelo que se usa para $\Delta(\kappa)$.

Esta es una circunstancia fortuita ya que ayuda mucho a precisar los resultados cuando se conoce un experimento.

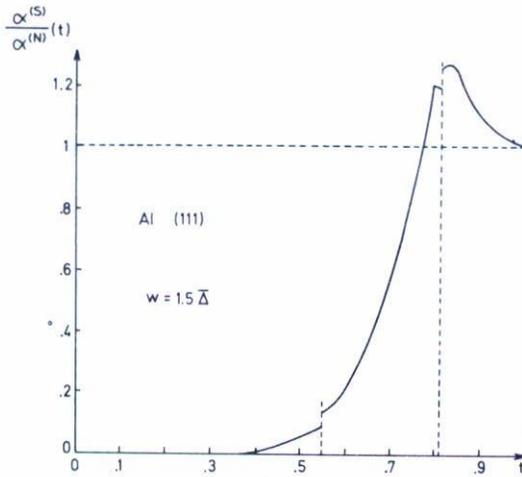


Fig. 17. La atenuación ultrasónica de alta frecuencia.

7. CONCLUSION

Hemos revisado en este artículo el problema de la anisotropía en la superconductividad, en forma breve.

Hemos revisado la teoría BCS, introducido la anisotropía en forma fenomenológica a través del trabajo de Markowitz-Kadanoff y de Clem.

Posteriormente hemos mostrado como las ecuaciones de Eliashberg constituyen una sólida base teórica para la anisotropía de la banda superconductor y hemos particularizado en el caso del Al. Usando este ejemplo, hemos tratado de poner en evidencia la dificultad asociada con la interpretación de los datos experimentales para atribuir un valor $\Delta(\kappa)$ a un material. Creo, sin embargo, que el trabajo futuro, experimental para disipar puntos dudosos y complementar datos donde faltan, y teórico, para precisar los criterios de selección y la contribución de impurezas, lo mismo que para mejorar los métodos de solución de la Ecuaciones de Eliashberg, irá poco a poco dejando una imagen clara de la anisotropía atribuible a cada material y su influencia en el comportamiento del mismo en diferentes situaciones. Las referencias que he incluido no son ciertamente exhaustivas. Las he seleccionado de acuerdo a mi propio trabajo en Al, pero creo que, incluyen, de manera general,

"lo que hay que conocer" en este aspecto de la superconductividad. No he incluido las características de tunelamiento (la propiedad selectiva por excelencia). La razón es la brevedad. Este problema se encuentra tratado brevemente en la referencia 39 y será tratado en más detalle en una publicación futura.

AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer algunos comentarios del Prof. J.P. Carbotte acerca de este trabajo y al Dr. E. Sansores por la lectura crítica del manuscrito.

REFERENCIAS

1. J. Bardeen, L.N. Cooper y J.R. Schrieffer, Phys. Rev. 108 (1957) 1175.
2. Algunos textos útiles son:
 - P.L. Taylor, A Quantum Approach to the Solid State, Prentice Hall, Inc. Caps. 5 y 6.
 - W. Jones and N.H. March, Theoretical Solid State Physics, Cap. 8 Vol. II (Interscience monographs and texts in Physics and Astronomy Vol. XIV, R.E. Marshak, ed., 1973).
 - G. Richayzen, Theory of superconductivity (Interscience monographs and texts in Physics and Astronomy, Vol. XXVII, R.E. Marshak, ed.).
 - J.R. Schrieffer, Theory of superconductivity, W.A. Benjamin, Inc. 1964.
3. D.H. Douglas Jr. and L.M. Falicov, The superconducting energy gap.
4. J. Bardeen and D. Pines, Phys. Rev. 99 (1955) 1140.
5. D.J. Thouless, Phys. Rev. 117 (1960) 1256.
6. J.L. Bostock and M.L.A. Mac Vicar, in Anisotropy effects in superconductors, H.W. Weber ed., 1976, page 213.
7. J. Daams, J.P. Carbotte y R. Baquero. Aceptado para publicación en J. Low Temp. Phys.
8. D.M. Ginsberg and L.C. Hebel, Non equilibrium properties, Chap. 4, in Superconductivity, R.D. Park, ed.
9. C.R. Leavens and J.P. Carbotte, Solid State Commun. 9 (1971) 75. También referencia 23.
10. H.K. Leung, PhD Thesis, Mc.Master University (1974). También referencia 24.
11. P.W. Anderson, Phys. Chem. Solids 11 (1956) 26.
12. P.L. Rickards, Phys. Rev. Lett 7 (1961) 412.
13. D. Markowitz and L.P. Kadanoff, Phys. Rev. 131 (1963) 563.
14. J.R. Clem, Ann. Phys. 40 (1966) 268.
15. A.L. Fetter and J.D. Walecka, Quantum theory of many particle systems, Mc.Graw-Hill book Company.
16. J.P. Carbotte, Anisotropy effects in superconductors, H.W. Weber, ed., 1976, página 183, y referencias citadas allí.
17. P. Tomlinson and J.P. Carbotte, Phys. Rev. B13 (1976) 4738.
18. W.L. McMillan and J.M. Rowell, Tunneling and strong coupling superconductivity in Superconductivity Vol. 1, R.D. Park ed.

19. R. Baquero and J.P. Carbotte, *Can J. Phys.* 54 (1976) 1530.
20. A.J. Bennett, *Phys. Rev.* 140A (1965) 1902.
21. D. Scalapino, The electron-phonon interaction and strong coupling superconductors, in *Superconductivity* Vol. 1., R.D. Park ed.
22. En este punto es interesante definir qué se entiende por acoplamiento débil y fuerte. Existen varios criterios más o menos equivalentes (Ver referencia 21, pág. 450): la magnitud de λ (como el valor medio de λ_k definido en el texto) da el crecimiento relativo de la masa efectiva del electrón por interacción electrón-fonón. Otro criterio menos riguroso es la relación T/θ_D y finalmente, en teoría BCS, un elemento es "débil" si el parámetro $N(0)v_s \leq 25$. Así los acoplamientos en Pb y Hg resultan fuertes, mientras en Al, In, Sn resultan débiles.
23. C.R. Leavens and J.P. Carbotte, *Annals of Phys.* 70 (1972) 338.
24. H.K. Leung, J.P. Carbotte and C.R. Leavens, *J. Low Temp. Phys.* (aceptado).
25. Véase, por ejemplo, M. Tinkham, *Group Theory and Quantum Mechanics*, Mc.Graw-Hill, 1964.
26. R. Brito y R. Baquero, *Boletín de la Soc. Mex. de Física*, 3 (1978) 134.
27. R. Brito y R. Baquero, *Boletín de la Soc. Mex. de Física*, 3 (1978) 137.
28. R. Baquero, *Boletín de la Soc. Mex. de Física*, 3 (1978) 138.
29. B.L. Blackford, *J. Low Temp. Phys.* 23 (1976) 43.
30. J.P. Carbotte y P.T. Truant, *Can. J. Phys.* 50 (1972) 563.
31. L.G. Hebel y C.P. Slichter, *Phys. Rev.* 113 (1959) 1504.
32. A.G. Anderson y A.G. Redfield, *Bull. Am. Phys. Soc.* 2 (1957) 388.
33. Ducla-Soares, PhD. Thesis, Univ. de Grenoble (1971).
34. R. Baquero, R. Brito y J.P. Carbotte (por publicarse).
35. V.M. Bobetic, *Phys. Rev.* 136 (1964) A1535.
36. K.M. Hong y J.P. Carbotte, *Solid State Comm.* 22 (1977) 299.
37. R. Baquero y J.P. Carbotte (por publicarse).
38. K.R. Lyall, D.J. Meredith y E.R. Dobbs, *J. Phys. F: Metal Phys.* 6 (1976) 807.
39. M. Maya, J.A. Pérez y R. Baquero, *Boletín de la Soc. Mex. de Física*, 3 (1978) 135.