

## DETERMINACION DE LA RELACION ENTRE LA VELOCIDAD DE PROPAGACION DE UNA ONDA EN UNA CUERDA Y SU MASA Y TENSION

Ricardo R. Boullosa y Héctor Riveros R.

Centro de Instrumentos,

Universidad Nacional Autónoma de México

(recibido 1° de mayo 1977)

### ABSTRACT

Resonance frequencies (up to the 15 th mode) are used to measure the velocity of propagation of waves in vibrating strings as function of it's mass per unit lenght and tension. These frecuencies are used to induce the desired relation.

### RESUMEN

Se propone como práctica escolar un procedimiento que utiliza los armónicos de la frecuencia fundamental de vibración en una cuerda, para medir la velocidad de propagación de ondas transversales en función de su masa/longitud y la tensión.

### 1. INTRODUCCION

Aunque las propiedades de la cuerda vibrante son bastante conocidas<sup>(1,2,3)</sup>, y se usa comunmente como demostración en clase<sup>(4,5)</sup>, consideramos que no se ha hecho suficiente énfasis en la precisión con que se puede medir la frecuencia de los modos normales considerados como resonancias.

Debido a que este experimento da resultados experimentales bastante precisos, permite inducir a partir de ellos una relación empírica entre la velocidad de propagación de una onda, la masa y la tensión en una cuerda. Por otro lado es fácil justificar por medio de un análisis dimensional la forma de la expresión obtenida a partir del proceso de inducción.

Se debe mencionar, sin embargo, que el nivel escolar que se supone para esta práctica, no permite deducir la ecuación de onda. Los

conceptos que se suponen conocidos o con los cuales el alumno está familiarizado, son los de frecuencia, longitud de onda, reflexión en un extremo y resonancia.

## 2. DESARROLLO

El procedimiento para establecer ondas estacionarias de diferentes frecuencias, consiste en hacer circular una corriente alterna por un alambre cerca del cual se coloca un imán permanente. La interacción entre la corriente y el campo magnético constante da la fuerza necesaria para obligar al alambre a vibrar. La frecuencia de la corriente alterna se varía con un generador de audio.

En estas condiciones, se tendrá resonancia en el alambre cuando el tiempo  $t$  que tarda la onda en ir y volver de un extremo al otro -- (una distancia igual al doble de la longitud del alambre:  $2\ell$ ) es un múltiplo entero de un período  $\tau$ :

$$v = \text{espacio/tiempo} = e/t \text{ de donde:}$$

$$t = e/v = 2\ell/v = n \tau$$

en donde  $v$  es la velocidad de la onda en la cuerda; invirtiendo la ecuación anterior, se tiene:

$$\frac{v}{2\ell} = \frac{1}{n\tau} = \frac{f_n}{n} \quad \text{o lo que es lo mismo:} \quad \frac{nv}{2\ell} = f_n \quad (1)$$

De lo cual se ve que la frecuencia  $f_n$  es proporcional a  $n$ ; además como  $v = \lambda_n f_n$  para cualquier tipo de onda:

$$\frac{nv}{2\ell} = f_n = \frac{n \cdot \lambda_n \cdot f_n}{2\ell}; \quad \lambda_n \cdot n = 2\ell \quad \text{que es} \quad (2)$$

otra forma de expresar la condición de resonancia.

En la discusión anterior aparece la velocidad de propagación  $v$ , y hasta este momento no se ha establecido de qué depende. Para hallar las variables que la determinan es conveniente hacer algunas conside-

raciones con respecto a las dimensiones; para esto imagínese una cuerda tensa, como se sabe, el hecho de estar tensada permite el paso a través de ella de una onda. Si se aumentara la tensión la onda viajaría más rápidamente, lo cual permite predecir que la velocidad dependerá de la tensión (T). Si la cuerda es lo suficientemente delgada para ser totalmente flexible sería probable que la velocidad no dependiera de la forma de la sección transversal, sin embargo, sí podría ser que el área de la sección transversal (A) influyera en ella. También sería lógico pensar que la velocidad podría depender de la masa a través de la densidad ( $\rho$ ) del material de la cuerda, en este caso se puede definir una densidad lineal en vez de una densidad volumétrica: la masa de un elemento de la cuerda de longitud  $dx$  es:  $dm = \rho A \cdot dx$  y se define:  $\rho A = m_\ell = \text{masa/longitud}$ .

Habiendo considerado intuitivamente todos los factores que pueden influir fuertemente en la velocidad, se puede decir que, es probable que la velocidad depende de los parámetros: Tensión (T) área de la sección transversal (A),  $m_\ell = \text{masa/longitud}$  y  $\rho = \text{densidad}$ ; y cuyas dimensiones son:

$$\boxed{T} = \text{Kg m/seg}^2 ; \quad \boxed{A} = \text{m}^2 ; \quad \boxed{m_\ell} = \text{Kg/m} ; \quad \boxed{\rho} = \text{Kg/m}^3$$

Ahora bien, la única combinación de estos parámetros que tiene dimensiones de velocidad (m/seg) es:  $v = \text{cont.} \sqrt{\frac{T}{\rho A}} = \text{cont.} \sqrt{\frac{T}{m_\ell}}$ . Esta expresión coincide con lo que intuitivamente se espera que la velocidad dependa.

Tomando en consideración las ecuaciones (1) y (2) y lo anteriormente expuesto, se concluye que si se obtienen  $n$  frecuencias de resonancia ( $f_n$ ), (con la tensión y  $m_\ell$  constantes) y se grafica  $f_n$  contra  $n$ , se obtendrá una recta (por 1) de cuya pendiente se obtiene la velocidad de propagación ( $v$ ) para una T y  $m_\ell$  dadas. Si la tensión se varía y toma  $h$  valores diferentes se tendrán  $h$  rectas y en consecuencia  $h$  velocidades diferentes. Si después se varía  $m$  y se mantiene la tensión constante se obtendrán otras velocidades para cada  $m_\ell$ . Por lo tanto la adquisición de los datos es un procedimiento fácil y directo: si miden las frecuencias  $f_n$  (hasta el 12° ó 15° modo en cada caso) --

para diferentes tensiones con  $m_\ell$  constante y para diferentes  $m_\ell$  con  $T$  constante.

### 3. PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

El arreglo experimental se muestra en la figura 1. Como se ve el oscilador se conecta al amplificador y la salida de éste directamente al alambre montado entre dos puentes, el osciloscopio se conecta también a la salida del amplificador (o los extremos del alambre). El imán se coloca de tal forma que el plano de las caras sea paralelo al alambre.

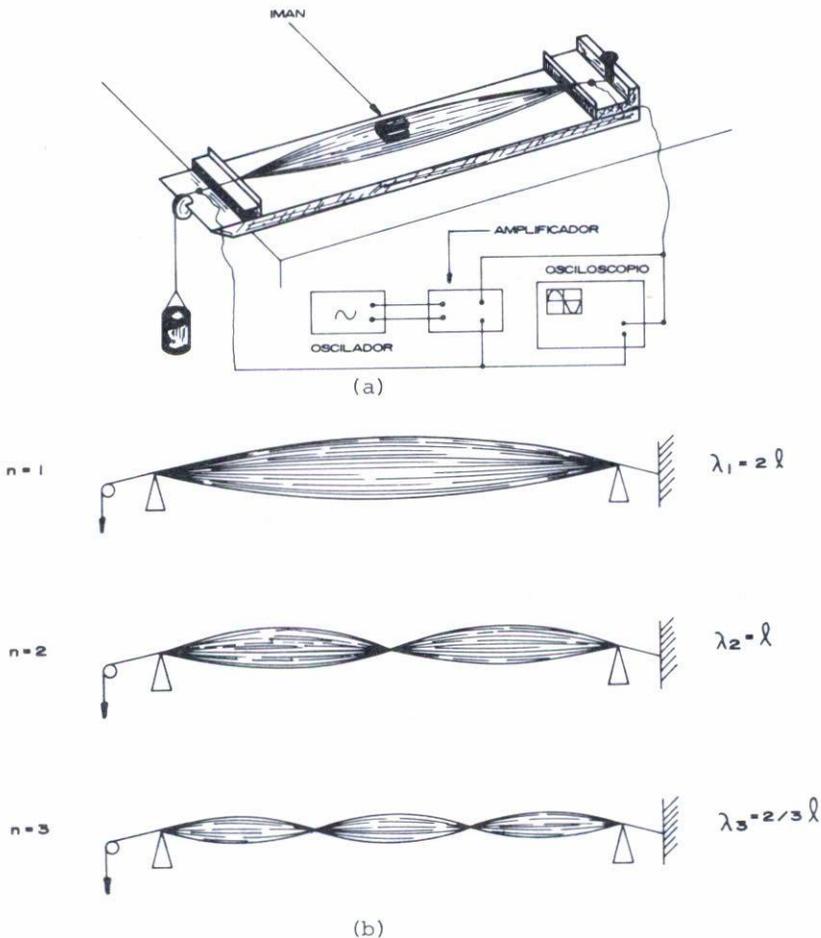


Fig. 1. a) Diagrama del dispositivo experimental. El amplificador debe proporcionar una corriente de varios amperes. b) Aspecto de la cuerda para los tres primeros modos de resonancia.

Se ajusta el oscilador de tal forma que el nivel de corriente directa sea 0 (esto es necesario, pues de otra manera se tendría una señal de corriente directa sobre la cual está montada la sinusoidal, la única -- contribución de la anterior sería la de calentar el alambre). La amplitud de la oscilación se ajusta a un nivel que sea fácilmente observable y a la vez que no sea tan grande que la corriente caliente el alambre.

TABLA 1

Variación de la frecuencia fundamental y armónicos superiores para diferentes tensiones;  $m\ell = \text{cte} = (0.0061 \pm 0.005)$  y  $\ell = (85.0 \pm 0.1)$  cm. El tiempo/div. en milisegundos y el No. de cuadros se refieren respectivamente a la base de tiempo y al número de divisiones comprendidas entre dos crestas de la señal en el osciloscopio.

T dinas	No. Antinodos	1	3	5	7	9	11	13	15
$.25 \times 10^6$ $\pm .10$ $T_1$	Tiempo/div. m seg	5	1	1	.5	.5	.5	.2	.2
	No. Cuad. $\pm .1$	4.6	7.9	4.8	6.9	5.6	4.4	9.0	8.2
	$f(H_z)$	$43 \pm 1$	$127 \pm 2$	$208 \pm 4$	$290 \pm 5$	$357 \pm 7$	$455 \pm 10$	$555 \pm 11$	$610 \pm 12$
$.66 \times 10^6$ $T_2$	Tiempo/div. m seg	2	1	.5	.5	.2	.2		
	No. Cuad. .1	7.6	5.2	6.4	4.5	8.8	7.4		
	$f(H_z)$	$66 \pm 1$	$192 \pm 4$	$313 \pm 5$	$444 \pm 10$	$568 \pm 7$	$676 \pm 10$		
$1.44 \times 10^6$ $\pm .01$ $T_3$	Tiempo/div. m seg	2	1	.5	.5	.2	.2		
	No. Cuad. .1	5.3	3.5	4.4	3.1	6.1	4.9		
	$f(H_z)$	$94 \pm 2$	$286 \pm 3$	$456 \pm 10$	$645 \pm 20$	$820 \pm 13$	$1020 \pm 20$		
$2.7 \times 10^6$ $\pm .01$ $T_4$	Tiempo/div. m seg	2	.5	.5	.2	.2	.1		
	No. Cuad. .1	4.9	6.3	4.0	7.3	5.8	9.4		
	$f(H_z)$	$102 \pm 2$	$317 \pm 5$	$500 \pm 13$	$685 \pm 10$	$862 \pm 15$	$1064 \pm 11$		
$5.3 \times 10^6$ $\pm .2$ $T_5$	Tiempo/div. m seg	1	.5	.2					
	No. Cuad. $\pm .1$	5.7	3.9	6.1					
	$f(H_z)$	$175 \pm 3$	$513 \pm 13$	$820 \pm 14$					

Una vez que se tiene todo en condiciones de trabajo y el alambre con la tensión elegida, se varía lentamente la frecuencia desde unos cuantos ciclos (dependiendo de la tensión) hasta que aparece la 1 resonancia (1 antinodo) y se mide el período en el osciloscopio, se continúa variando hasta que aparece la próxima resonancia (2 ó 3 antinodos; ver observaciones) y así sucesivamente hasta el 15° ó 20° modo. Se repite lo anterior por cada tensión.

Para obtener la variación de  $v$  con  $m_\ell$  se utilizan diferentes alambres, usando por ejemplo un juego de cuerdas de guitarra. En este caso se tiene un gran intervalo de variación (de alrededor de 10) para  $m_\ell$ . De igual manera se repite el procedimiento para cada alambre.

Se grafica  $f_n$  contra  $n$ , para los dos casos ( $m_\ell = \text{cte}$  y  $T = \text{cte}$ ); de las rectas resultantes se obtienen las pendientes, de las cuales se obtienen a su vez las velocidades  $v_T$  y  $v_{m_\ell}$ , las cuales se grafican contra  $T$  y contra  $m_\ell$  respectivamente. De las curvas resultantes se induce qué es lo que se debe graficar contra qué, para que se conviertan en rectas, de éstas últimas se induce la relación entre  $v$ ,  $T$  y  $m_\ell$ .

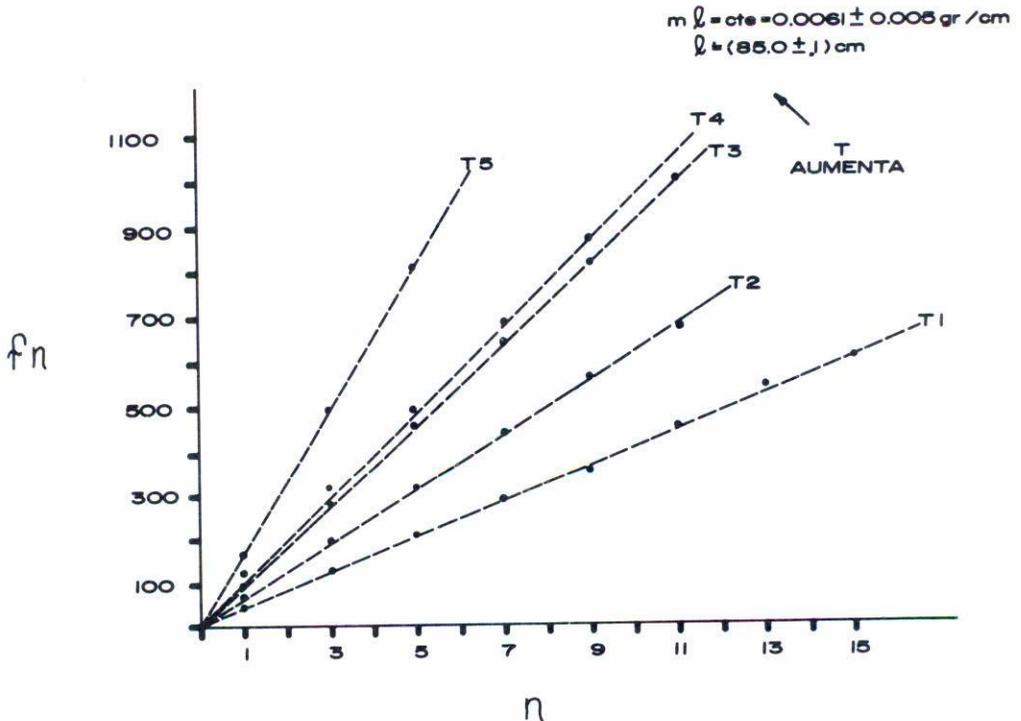


Fig. 2. Frecuencia de resonancia contra número de modo, para diferentes tensiones en la cuerda.

## 4. RESULTADOS TÍPICOS

En la Tabla I se dan los resultados para la variación con T de las frecuencias de resonancia, ( $f_n$ ) de los modos (n) correspondientes.

En la figura 2 se muestra  $f_n$  contra n para cada tensión. Como se ve la tensión aumenta en la dirección contraria a las manecillas de un reloj y como la velocidad ( $v_T$ ) es proporcional a la pendiente (k) de esta recta, se ve que  $v_T$  aumenta con la tensión.

De las pendientes de cada recta se obtiene el conjunto de velocidades  $v_T = 2 \ell k$  los cuales aparecen en la figura 3, contra la tensión T. De esta gráfica se podría pensar que es una parábola o sea que  $T \propto v_T^2$ , lo cual se comprueba al graficar T contra  $v_T^2$  ya que se obtiene una recta de donde se induce que :  $v_T \propto \sqrt{T}$  (ver figura 4).

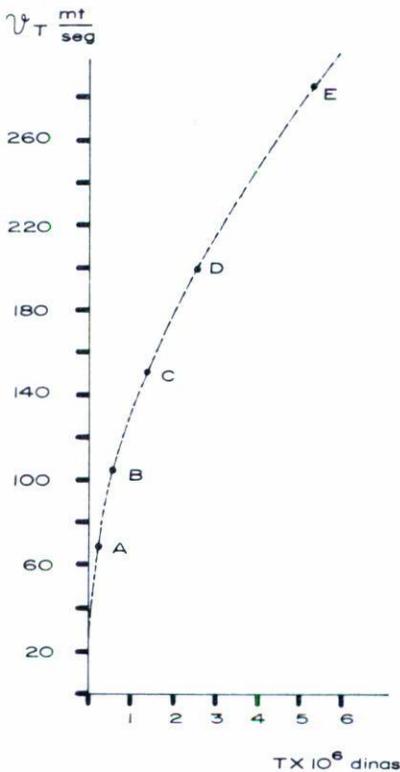


Fig. 3. Velocidad de propagación como función de la tensión, en una cierta cuerda.

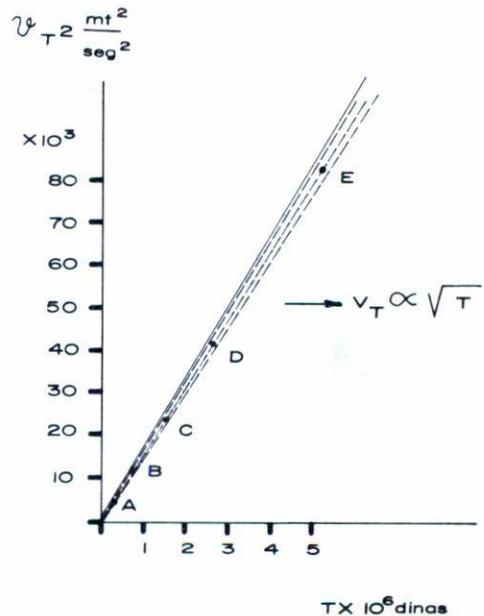


Fig. 4. Relación lineal entre el cuadrado de la velocidad de propagación de la onda y la tensión en la cuerda.

De manera similar a lo anterior, se obtienen las figuras 5, 6 y 7. En consecuencia de las gráficas 4 y 7 se concluye que  $v^2 \propto T/m_\ell$  o sea que:  $v \propto \sqrt{T/m_\ell}$  o si se quiere:

$$v = \text{cte} \sqrt{T/m_\ell}$$

$$\text{y } f_n = \frac{n}{2\ell} \sqrt{\frac{T}{m_\ell}}$$

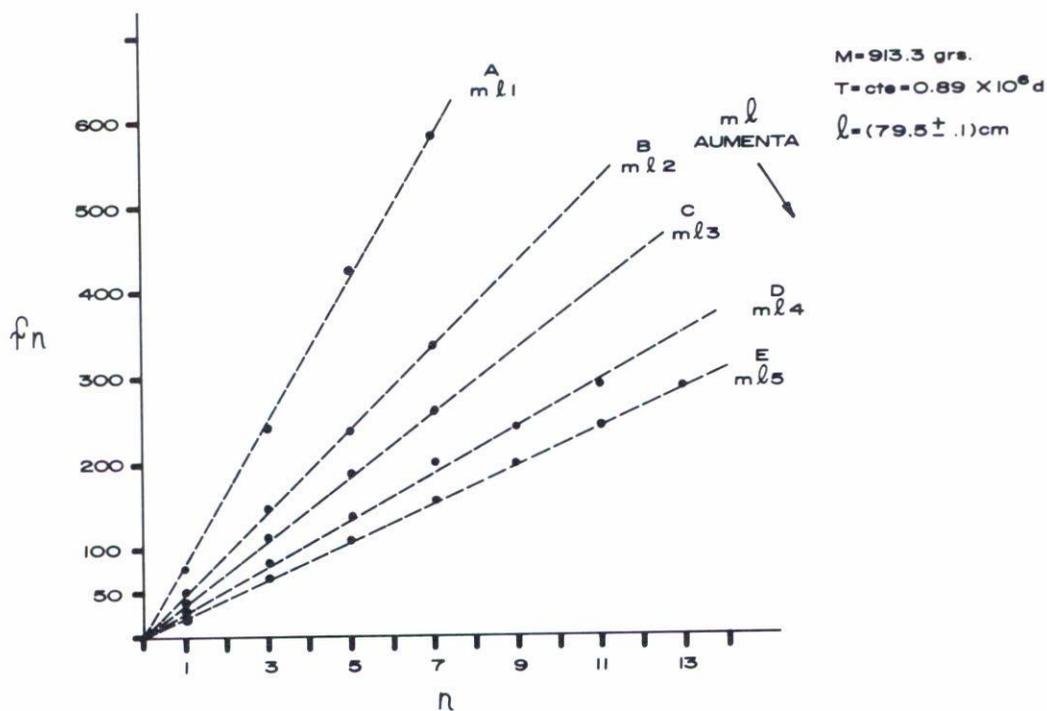


Fig. 5. Frecuencia de resonancia contra número de modo, para cuerdas de diferente densidad lineal.

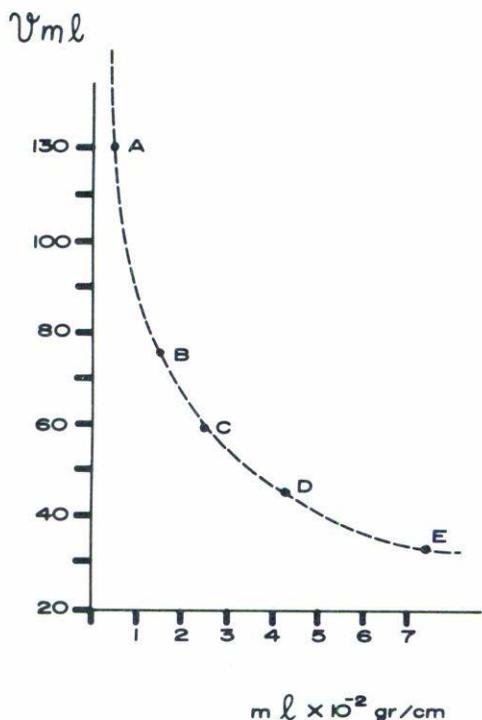


Fig. 6. Velocidad de propagación como función de la densidad lineal de la cuerda, a tensión constante.

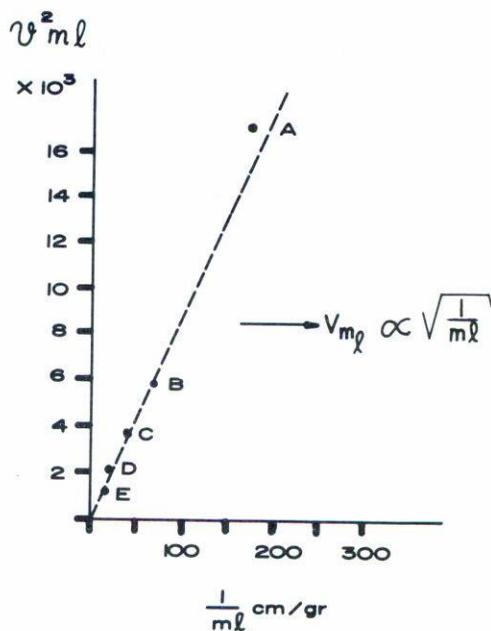


Fig. 7. Relación lineal entre el cuadrado de la velocidad de propagación de la onda y el recíproco de la densidad lineal de la cuerda.

#### OBSERVACIONES

Como se ve de las tablas los modos de resonancia son en todos los casos múltiplos impares del modo fundamental, es decir, el número de antinodos es 1, 3, 5, 7... esto es consecuencia de que el imán se puso (en este caso) en el centro de la cuerda lo cual elimina la posibilidad de que se establezca un nodo en el centro de ella. Sin embargo si el imán se pone en un sitio que no divida a la cuerda en un número entero de partes, aparecen los nodos pares e impares.

## REFERENCIAS

A continuación se dan algunos artículos en los cuales se pueden encontrar temas relacionados con el tratado en este artículo:

1. "Armonic Relations in the partials of organ pipes and string" A.W. Nolle and C.P. Boner J.A.S.A. Vol. 13, Oct. 1941.
2. "Energy and momentum transport in string waves" O.W. Juenker; Am. J. Phys. Vol. 44, 1 Enero 1976.
3. "Note on "Normal modes of a compound string" T.A. Barnabey Am. J. Phys. Vol. 44 No. 5, Mayo 1976.
4. "Another look at the vibrating string" Patricia M. Mooney; Am. Phys Vol. 44, No. 10 Oct. 1976.
5. "Classroom demonstration of the vibration of a bowed string" E. Brock Dale. Am. J. of Phys. Vol. 44. No. 11; Nov. 1976.