revista mexicana de física 26 (1979) 45-58

EL ELECTRON COHETE: CONSIDERACIONES CRITICAS SOBRE LAS ECUACIONES DE LIENARD-WIECHERT

F. González-Gascón

Instituto de Estructura de la Materia

c/Serrano 119

Madrid 6 España

(recibido 12 de Febrero 1976)

SUMMARY

The non equivalence between the macroscopic Maxwell equations and the Lienard-Wiechert equations is stressed. For stationary conditions (under which the equivalence is correct) a equation substituting the Lorentz-Dirac one is obtained. The new equation is absent of the paradoxes of the Lorentz-Dirac one and implies a decreasing in the electronic proper mass. It is suggested that the equilibrium in mass of the real electron follows from a balance between the mass lost by emission and the mass gained from the external field.

RESUMEN

Se resalta la no equivalencia entre las ecuaciones macroscópicas de Maxwell y las microscópicas de Lienard-Wiechert. En las situaciones casi estacionarias (en que la equivalencia entre ambas es correcta) se deduce una ecuación que sustituye a la de Lorentz-Dirac y carece de las paradojas de ésta. La nueva ecuación implica una disminución de la masa del electrón como consecuencia de la emisión radiactiva. Se sugiere que el equilibrio en masa de los electrones reales es consecuencia de un balance entre la masa perdida por emisión y la ganada por absorción del campo externo.

1. INTRODUCCION

Es una opinión muy extendida[1] que la ecuación de movimiento,

$$m_f \frac{dv^\mu}{d\zeta} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu}.v_\nu + \frac{2e^2}{3c^3} (\dot{a}^\mu - \frac{1}{c^2} a_\nu a^\nu. v^\mu), \qquad (1)$$

propuesta por Dirac[2] para describir el efecto retroactivo de la radiación sobre la carga emisora de la misma, marca los límites de la electrodinámica clásica, esto es los límites de aplicabilidad de las ecuaciones de Maxwell,

$$\mathrm{rot}\ \bar{B} = \bar{j} + \dot{\bar{E}},\ \mathrm{rot}\ \bar{E} = -\dot{\bar{B}},\ \mathrm{div}\ \bar{B} = 0,\ \mathrm{div}\ \bar{E} = \rho \tag{2a}$$

o bien,

$$\Box A^{\mu} = j^{\mu};\ \partial_{\mu} A^{\mu} = 0 \tag{2b}$$

o bien,

$$\Phi = \int (\rho/R)_{ret.}\ d\bar{x}\ ,\ \bar{A} = \int (\bar{j}/R)_{ret.}\ d\bar{x} \tag{2c}$$

Sin embargo, la ecuación (1) para el electrón puntual no es deducible a partir de (2), sino a partir de las ecuaciones de Lienard-Wiechert[3],

$$\Phi = \frac{e}{R - \bar{v}\cdot\bar{R}/c} \tag{3a}$$

$$\bar{A} = \frac{e\ \bar{v}/c}{R - \bar{v}\cdot\bar{R}/c} \tag{3b}$$

Puesto que sólo las ecuaciones (2) parecen haber sido comprobadas suficientemente, surge el problema de estudiar en primer lugar los límites dentro de los cuales las ecuaciones (3) puedan aplicarse con fiabilidad. Se verá en lo sucesivo que las ec. (2) y (3) *no* son equivalentes y, por tanto, las paradojas de la ec. (1) sólo marcarán límites para la electrodinámica clásica en el común dominio de (2) y (3). Una vez aclarada esta cuestión física, dentro de los límites de los movimientos casi estacionarios de cargas se propone (sección 2) un mecanismo impulsivo tipo cohete para el movimiento del electrón *emisor* obteniéndose así las ecuaciones,

$$\frac{dm_f}{d\zeta} = -\ 2e^2/3c^5\ (a_{\lambda} a^{\lambda}) \tag{4a}$$

$$m_f\ \frac{dv^{\mu}}{d\zeta} = F^{\mu}_{ext.} \tag{4b}$$

que sustituyen a la ec. (1). Las ecuaciones (4) sólo serán válidas para pequeñas aceleraciones (fenómenos casi estacionarios puesto que sólo entonces está justificado el paso de las ec. (2) a las ec. (3) así como el uso de la expresión (4),

$$\frac{dp^{\mu}}{d\zeta} = 2e^2/3c^5\ (a_{\lambda}a^{\lambda})\ v^{\mu}, \tag{5}$$

generalización relativista de la fórmula para la potencia Larmor disipada por la emisión radiactiva.

En la Sección 3 se discuten las ventajas e inconvenientes de las nuevas fórmulas y se dan algunas ideas físicas que podrían servir de base para entender el mecanismo de equilibrio de masa de los electrones reales.

1. NO EQUIVALENCIA DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL Y LAS DE LIENARD-WIECHERT

Es práctica común[5] escribir las ecuaciones macroscópicas de Maxwell[2] en la forma

$$\begin{aligned} \text{rot}\ \bar{B} &= q_1\ \dot{\bar{r}}_1\ \delta(\bar{r} - \bar{r}_1(t)) + \dot{\bar{E}} \\ \text{rot}\ \bar{E} &= -\dot{\bar{B}} \\ \text{div}\ \bar{B} &= 0 \\ \text{div}\ \bar{E} &= q_1\ \delta(\bar{r} - \bar{r}_1\ (t)) \end{aligned} \tag{6}$$

siendo δ la distribución de Dirac y q_1 la carga cuyo movimiento crea el campo electromagnético $(\bar{E},\bar{B})$. Lo Surdo[6] hizo notar la abundancia de errores en la deducción de (3) a partir de (2). Típico es el proceder de Sommerfeld[7] que reobtuvo los resultados de Lienard-Wiechert mediante una continuación en el plano complejo <u>t</u> de las soluciones de

$$\begin{aligned} \Box A^{\mu} &= j^{\mu} \\ \partial_{\mu}\ A^{\mu} &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

en donde j^{μ} viene dada por,

$$j^{\mu} = (1 - B^2)^{1/2} . v^{\mu} . q_1 \delta(\bar{r} - \bar{r}_1(t))$$

y en donde $\bar{r}_1(t)$ es el movimiento conocido de q_1.

Además de apuntar la incorrección del método de la continuación analítica para el caso de j^{μ} distribucionales[8] nos interesa resaltar aquí otras dificultades de orden físico íntimamente relacionadas con la ec.(1).

En primer lugar, al extender las ec. de Maxwell (2) al dominio distribucional, ec. (6), las soluciones de éstas sólo podrán utilizarse convenientemente mediadas, careciendo de todo sentido dichas soluciones sobre conjuntos de medida nula. Sin embargo, la ec. (1) se obtiene de forma estandar usando las soluciones de las ec. distribucionales (6) y (7) supuestas estas bien definidas sobre la posición instantánea del electrón emisor. Pero esta posición instantánea *es* un conjunto de medida nula, por lo cual este proceder es incorrecto.

Ademas de esta primera dificultad de los tratamientos usuales que conducen a (1), sobre la que se añadirá algo mas en la Sección 3, es aún mas importante el hacer notar la no equivalencia de las ec. (2) y (3), y el buscar las condiciones físicas que deben darse para la plausibilidad de la equivalencia entre ambas ecuaciones. Sólo dentro de estos límites será fiable la ecuación (1) y otras consecuencias de (3), como la expresión generalizada de la potencia Larmor dada por la ec. (5). Puesto que esta ec. (5) será usada aquí para llegar a las nuevas fórmulas (4), los límites de equivalencia de (2) y (3) serán también los límites naturales de fiabilidad de las nuevas ecuaciones propuestas.

Pues bien, la no equivalencia de (2) y (3) resulta clara sin más que escribir[9] las expresiones para $\bar{E}$ y $\bar{B}$ consecuencia de (3),

$$\bar{E} = e/\gamma^2(\bar{R} - \bar{R}.\bar{v}/c)\ R'^{-3} + e/c^2\ R'^{-3}\bar{R}\wedge(\bar{R}-\bar{R}.\bar{v}/c)\wedge\dot{\bar{v}}$$

$$\bar{B} = e\ \bar{R}\wedge\bar{E}/R \tag{8}$$

$$R' = R - \bar{R}\ .\ \bar{v}/c$$

en donde R es el vector que une el punto de observación de los campos con la posición retardada del electrón móvil. Para el caso de un conjunto estadístico de electrones (caracterizado por su función de distribución) las ecuaciones (8) conducirían a campos electromagnéticos macroscópicos regidos por ecuaciones que contendrían los valores medios de $\dot{\bar{V}}$. Pero éste no es el caso de las ec. (2) en donde sólo figuran los medios ρ y $\bar{j}$ del número de electrones y $\bar{V}$ respectivamente. Por tanto tan sólo es posible una equivalencia de (2) y (3) cuando el segundo término de $\bar{E}$ se haga cero, lo que ocurre cuando $\dot{\bar{V}} \simeq 0$ (ésto es despreciando los términos de orden $1/c^2$ en (8)).

A esta misma conclusión se llega escribiendo las expresiones de $\bar{E}$ y $\bar{B}$ en función de las magnitudes no retardadas[10]. Así pues, las Ec. (2) y (3) sólo son equivalentes para plasmas cargados en que los efectos de las grandes aceleraciones sean pequeños frente a los efectos del campo de velocidades.

La precedente discusión muestra que las ecuaciones (3) son más generales que las ec. (2) puesto que en ellas van incluídos efectos macroscópicos dependientes del valor medio $< \dot{\bar{V}} >$. Por tanto, caso de conocer la función de distribución del plasma[11] $F(t, \bar{r}, \bar{V}, \dot{\bar{V}})$ las ec. (8) nos permitirían conocer y escribir unas ec. de Maxwell más generales que las (2). Sin embargo, esta función de distribución *no* es la usual de la Mecánica Estadística, por depender de $\dot{\bar{V}}$, por lo que no satisfacerá a la ecuación de Boltzmann,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} \bar{v} + \frac{\partial f}{\partial \bar{v}} \cdot \dot{\bar{V}} = J(f) \qquad (9)$$

ni a las generalizaciones relativistas de (9) que recientemente se han propuesto[12].

En tanto carezcamos, pues, de una Mecánica estadística más ancha que la actual, que nos permita obtener funciones de distribución generalizadas como la $F(t, \bar{r}, \bar{V}, \dot{\bar{V}})$ de nuestro plasma de electrones altamente acelerados, hemos de atenernos, como únicas ecuaciones fiables a las ec. (2). Es por ello que sólo consideramos seguras las conclusiones de las ec. de Lienard-Wiechert para las situaciones casi estacionarias en que $\dot{\bar{V}} \simeq 0$.

Otra forma muy física de llegar a éste resultado se basa en los argumentos de Landau y Kompaneyets[13]. En ellos se prescinde por completo de si el electrón está o no compuesto a su vez por densidades macroscópicas ρ y $\bar{j}$ en su interior. Suponiendo tan sólo que en el sistema inercial de reposo del electrón el potencial creado por él es proporcional a $1/r$ y en la hipótesis de que el campo electromagnético (e.m.) producido por este potencial se transforma en la forma relativista estandar, se demuestra inmediatamente[13] que para una carga en movimiento *uniforme* se obtienen exactamente las ec. (3). Ahora bien, si el movimiento de la carga difiere infinitamente poco del movimiento uniforme (casi estacionariedad) por continuidad física serán aún válidas las mismas ecuaciones (3) para ésta pequeña perturbación del caso uniforme.

En estas condiciones casi estacionarias (en la terminología de Sommerfeld[14]) la energía e.m. intercambiada entre la carga y la superficie del infinito será prácticamente nula. El intercambio energético exactamente cero ocurre en el caso de movimiento exactamente uniforme. Así pues, los procesos casi estacionarios representan en electrodinámica perturbaciones de muy lento intercambio energético entre el sistema emisor y el medio-entorno similares a las perturbaciones infinitamente lentas de la termodinámica de procesos casi-reversibles. De la misma manera que los procesos termodinámicos idealmente reversibles son los más fáciles de estudiar también aquí parece existir una situación análoga en que tan sólo los procesos "casi estacionarios" son tratables. Puesto que la radiación definida por la fórmula (5) es un proceso esencialmente irreversible[15] sólo cabe estudiar el fenómeno cuando esta irreversibilidad es poco acentuada ($\dot{\bar{V}} \simeq 0$).

Llamando T_c a un tiempo característico de relajamiento[16] de nuestro sistema hacia los estados de equilibrio (campo e.m. creado por cargas en movimiento rectilíneo y uniforme) la aplicabilidad de las ec. (3) sólo estará justificada cuando en tiempos del orden de T_c sea:

$$|\bar{V}\,(t + T_c) - \bar{V}(t)|/|\bar{V}(t)| \ll 1 \qquad (10)$$

Para movimientos circulares y uniformes (típicos de las órbitas de Bohr de la Mecánica Cuántica Semiclásica) la ec. (10) adquiere la forma:

$$T_c \; a/v \ll 1 \; ; \quad T_c \, . \, v/R \ll 1$$

esto es, las ec. (3) y (5) sólo serían aplicables para pequeños valores de V y grandes radios de curvatura R. Estas condiciones *no* son precisamente las que se dan para los electrones de la teoría de Bohr, por lo cual los razonamientos usuales que implican la caída de los electrones hacia el núcleo atómico no son del todo correctos ya que para las grandes aceleraciones y pequeños radios de curvatura la fórmula (5) de Larmor debe ser sustituída, conjuntamente con (2) y (3), por ecuaciones mas generales válidas para éstos casos altamente *no* estacionarios.

2 . EL ELECTRON COHETE

Las dificultades a que conduce la ec. (1), aun limitado su rango de aplicabilidad a situaciones casi estacionarias, son muy numerosas[17] destacando entre ellas los efectos avanzados de la aceleración sobre la fuerza externa y la anulación del término,

$$\Gamma^{\mu} = \frac{2e^2}{3c^3} \left(\dot{a}^{\mu} - \frac{1}{c^2}\, a_{\lambda}\, a^{\lambda} \,.\, v^{\mu}\right), \tag{11}$$

para $a^{\lambda} \neq 0$. Estas dificultades son de esperar a la vista del gran número de hipótesis sin justificación física utilizadas en los procedimientos que se siguen para llegar a ella[17]: Postular una estructura interna e.m. del electrón mas o menos rígida[18], la introducción ad-hoc de las fuerzas de Poincaré[19] para evitar la desintegración del electrón; la validez de la electrodinámica estandar para los altísimos campos que existirían presumiblemente en el interior del electrón[20],...

A nuestro entender la dificultad esencial de (1) es la anulación de Γ^{μ} para aceleraciones no nulas. En tales casos la fuerza retroactiva se anula aun cuando la radiación sigue emitiéndose por ser $a^{\lambda} \neq 0$. Esta es una contradicción que viola el mismo espíritu que dió origen a la ec. de Lorentz-Dirac, esto es que una carga acelerada debería sufrir un efecto retroactivo sobre ella. La anulación de Γ^{μ} hace que este efecto retroactivo desaparezca por completo. Adémas de esta dificultad esencial y de los "runaways", preaceleraciones,...[2] a que conduce (1), Kasher[21] ha mostrado la no validez de (1) para problemas centrales unidimensionales.

Todos estos motivos nos llevan a prescindir de todo tipo de estructura (por no utilizar hipótesis gratuitas) para el interior del electrón. Siguiendo la idea de Einstein[22] consideramos al electrón como un objeto extraño a la electrodinámica del que sólo utilizaremos el hecho de que emite radiación al ser acelerado, dada por la ec. (5) con las salvedades hechas en la sección 1 acerca de los límites de validez de (5). Esto es, se considerará al electrón como un cohete relativista que conserva intacta su carga eléctrica en tanto radía. Un tratamiento como el que aquí se propone no es del todo nuevo. Larmor[23] ya en 1929 parece haber sugerido la idea de la pérdida de masa. Page[24] en su tratado clásico sugiere una concepción análoga en que el electrón es considerado como emisor de "líneas de fuerza". Variaciones de masa en el contexto de la gravitación (en que el efecto Larmor es menos acentuado por depender de c^{-9}) y del electromagnetismo han sido sugeridas por varios autores[25]. Tambien Bonnor[26] introdujo un mecanismo de pérdida de masa propia del electrón en un contexto similar al aquí indicado, pero por considerar válida la ec. (5) para todo valor de las aceleraciones su contribución queda desprovista de los límites físicos aquí referidos en la sección 1.

Utilizando, pues, las ecuaciones de movimiento de los sistemas relativistas de masa variable[27] se tendrá:

$$\frac{\alpha(m_f \cdot v^\mu)}{d\,\zeta} = F^\mu_{ext.} + U^{*\mu} \cdot Z^{-1}\frac{dm_f}{d\zeta}\ , \tag{12}$$

donde

$$U^{*\mu} \cdot z^{-1}\,\frac{dm_f}{d\zeta} = -\,\frac{dp^\mu}{d\zeta} \tag{13}$$

representa la variación de cuadriomomento experimentada por el electrón radiante. Llevando (13) a (12) y recordando (5) se tiene,

$$\frac{d(m_f \cdot v^\mu)}{d\,\zeta} + \frac{2e^2}{3c^5}\,(a_\lambda\, a^\lambda)\, v^\mu = F^\mu_{ext.} \tag{14}$$

Multiplicando (14) por v^μ y sumando respecto a μ se llega a,

$$\frac{dm_f}{d\zeta} = -\,2c^2/3c^5\,(a_\lambda\, a^\lambda) \tag{15}$$

(recuérdese que la cuadrifuerza F^μ_{ext}, sea de origen electromagnético o no debe cumplir la condición $F^\mu_{ext} \cdot V_\mu = 0$) y llevando (15) a (14) se tiene:

$$m_f \frac{dv^\mu}{d\zeta} = F^\mu_{ext} \tag{16}$$

Esta última ecuación muestra que la radiación emitida sólo afecta al movimiento de la carga en el término de masa propia. Este único efecto viene descrito por la ecuación (15), de forma que:

$$m_f(t) = m_f(0) - 2e^2/3c^5 \int_o^t (a_\lambda\ a^\lambda)\ d\zeta = m_f(0) - W_r/c^2 \tag{17}$$

El resultado proporcionado por la ec. (17) era de esperar puesto que de (5) se deduce inmediatamente que el flujo de la potencia Larmor tiene el valor:

$$dW_r/d\zeta = 2e^2/3c^3\ (a_\lambda\ a^\lambda)$$

Asi pues, si no existiesen otros mecanismos (clásicos o cuánticos) capaces de compensar esta disminución de masa propia, se sigue una disminución de masa de las partículas cargadas elementales por efectos de la radiación. Esta predicción también ocurre en el contexto de la emisión gravitacional[25] y es del todo razonable desde el punto de vista de Einstein de que toda radiación lleva consigo asociada una masa.

También era de esperar el que nuestra teoría nos haya conducido a uan pura variación de masa propia y a la ecuación (16). En efecto, en el referencial instantáneo en que el electrón se observa en reposo la emisión de radiación es un fenómeno isotropo[28] y, por ello, al igual que en los cohetes no relativistas, cabe esperar que tal emisión no se traduzca en ninguna fuerza, como de hecho indica la ecuación (16).

3. DISCUSION SOBRE LAS NUEVAS FORMULAS OBTENIDAS

Aun cuando la fórmula (17) es solo aplicable para pequeñas aceleraciones y dado el valor de los parámetros e y c que figuran en (17) las variaciones de masa que describe son pequeñas, es de advertir que el electrón real es un sistema "dual" en que no sólo aparece el papel emisor del mismo (único considerado aquí) sino que, simultáneamente, el electrón experimenta la interacción con el campo externo que lo acelera (electrón como carga "test"). Es del todo natural esperar que si de (17) resulta una disminución de masa propia al ser considerado el electrón como *fuente* de campo e.m. tambien resulte existir un mecanismo por el cual el electrón aumente de masa propia cuando se le considera bajo el punto de vista *pasivo* (test charge) al ser acelerado en un campo externo. Sobre la interacción del electrón en un campo e.m. externo sabemos bien poco, reduciéndose prácticamente todo a la expresión de la cuadrifuerza de Lorentz que éste experimenta, de valor:

$$F^{\mu\nu}_{ext.} \cdot V_{\nu} \tag{18}$$

El equilibrio en masa entre los procesos absortivo y emisivo de las partículas elementales cargadas habría, pues, de buscarse en una superteoría de la que resultaría también por vía *deductiva* la ecuación (18). Por otra parte, muchos autores[29] creen posibles correcciones importantes a las fórmulas anteriores si se tiene en cuenta el carácter esencialmente cuántico (como la muestra el valor discreto de la carga eléctrica de todas las partículas elementales) del electrón real. Mas aún, son conocidas las grandes dificultades que se encuentran en la termodinámica relativista[12] para dar sentido al concepto de masa propia de un sistema en interacción[30]. Es por todo ello que la disminución de masa propia contenida en la fórmula (17) no es indeseable. Mas bien es un indicador (como el hecho de que la carga esté cuantizada) que nos apunta ó indica el carácter abierto e incompleto que hasta hoy poseen nuestras teorías sobre el electrón). De la misma manera que persisten dificultades de concebir clásicamente la estabilidad del átomo de hidrógeno, dificultades que solo pudieron ser salvadas en parte por la Mecánica Cuántica, algo similar pudiera ocurrir con la estabilidad en masa propia de las partículas cargadas,[29]. En este contexto, las ecs. (16) y (17) poseen la ventaja adicional sobre la vieja ec. (1) de ser autoconsistentes (lo que no ocurre con (1) por el hecho de ser $\Gamma^{\mu} = 0$ para $a^{\mu} \neq 0$) y carecer de las importantes paradojas de los"runaways"y las preaceleraciones.

Conceptualmente las ec. (16) y (17) son consecuencia de haber relacionado los efectos de la radiación Larmor con una variación en masa propia, según las ideas de Einstein. Una ventaja de este punto de vista es que no se precisa hacer ningún tipo de hipótesis sobre la estructura interna del electrón y el comportamiento del campo e.m. a pequeñas distancias del electrón, en donde por poseer éste una singularidad polar es de esperar la no validez de las ec. (2) y (18), como supusieron Mie y otros[31].

Por lo que respecta a la sustitución de las ec. macroscópicas (2) por las ec. microscópicas (6) con corrientes j^{μ} distribucionales (proceder estandar en la mayor parte de los tratamientos que conducen a (1)) debe advertirse que, ademas de los errores de éste proceder ya señalados en la Sección I, ésta forma de hacer conduce a contradicciones ya en el caso de admitir soluciones no analíticas de las ec. (2). Es bien conocido lo que ocurre con la ec. del calor,

$$(\Delta - \partial_t)\, T = 0 \tag{19}$$

si se admiten datos iniciales de clase cero[32]. En tal caso es fácil demostrar[12,32] que la ec. (19) implica velocidades de transmisión infinita para los frentes de onda de T. La única forma de eliminar este resultado no físico es completar la ec. (19) para esas soluciones no lisas (no de clase infinita) sustituyéndola con otra ec. en que intervengan términos proporcionales a $\partial_{tt}T$[32]. Estos términos son despreciables frente a los términos $\partial_t T$ de (19) para soluciones casi estacionarias, pero predominan sobre $\partial_t T$ para las soluciones no lisas típicas de los frentes de onda. Algo similar cabe esperar con los frentes de onda típicos de la propagación electromagnética originadas por cargas aceleradas, y mas aún con las ec. de Maxwell en que aparezcan cuadricorrientes distribucionales. Ha sido, precisamente, con la intención de evitar todos estos problemas por lo que hemos considerado preferible seguir la vía de Landau-Kompaneyets para justificar, en situaciones casi estacionarias, a las ec. (3).

Por otra parte, el único camino que vemos posible a la hora de completar las ec. (2) (y por tanto llegar a expresiones más generales que las dadas por las ec. (15) y (16)) es el proporcionado por una estadística clásica para los fotones, de la misma manera que las ec. macroscópicas de Navier-Stokes de la Mecánica de Fluídos se las sabe deducir y completar con la ec. de Boltzmann para el fluído en cuestión[33]. Este es un tema sobre el que recientemente se ha comenzado a trabajar[34].

Para acabar, queremos insistir en que el establecimiento sin ambiguedad de los límites de validez de la equivalencia entre las ec. (2) y (3) así como de las (15) y (16) es un punto importante, generalmente olvidado en los tratamientos de la ec. (1). Fuera de éstos límites de validez las ec. anteriores carecerían de sentido y nos podrían conducir a gran número de paradojas. La débil disminución de masa propia descrita por (15) es un indicador de la extrema pobreza lógica del modelo del electrón *únicamente* emisor considerado aquí y en todos los tratamientos que llevan a (1). Con modelos más ambiciosos("higher level theories")para las partículas elementales cargadas es de esperar que alguna vez se pueda explicar no sólo el hecho de la estabilidad en masa propia de las mismas, sino incluso su espectro de masas, sus desintegraciones entre sí (fenómenos típicos de bifurcación, de gran interés en física teórica y aun poco conocidos[35]) cuando se las somete a fenómenos de scattering (altas aceleraciones, o situaciones *no* estacionarias de nuestra terminología).

Finalmente, quisiera expresar mi agradecimiento al Prof. Dr. G.C. Caballeri (Universitá degli Studi di Milano, Italia) por sus sugerencias, y al referee de éste trabajo por sus detallados comentarios críticos.

REFERENCIAS

1. L. Landau, E. Lifshitz: Theorie des Champs. MIR, Moscou(1970),3rd. ed. E. Monitz, D. Sharp: Phys. Rev. D10 (1974) 1133.
2. P. Dirac: Proc. Roy. Soc. London A167, (1938) 148. R. Brehme, B. de Witt: Ann. Phys. 9 (1960) 220. T. Erber: Fortschr. Phys. 9 (1961) 343 y referencias. J. Hobbs: Ann Phys. 47 (1968) 141. C. Taitelboim: Phys. Rev. D1 (1970) 1572.
3. E. Wiechert: Arch. Neerl. Sc. Exact. 5 (1960) 549.
4. J.C. Kasher, S. Schwebel: Phys. Rev. D4 (1971) 2956. F. Kennedy: Am. Journal. Phys. 40 (1972) 64. J.C. Kasher: Am. Journ. Phys. 41 (1973) 503.
6. C. Lo Surdo: N. Cimento 163 (1973) 139.
7. A. Sommerfeld: Electrodynamics. Ac. Press N.Y.(1964) p. 247.
8. J.G. Taylor: Proc. Camb. Phil. Soc. 51 (1955) 119. P. Rowe: Phys. Review D2 (1975) y referencias.
9. Landau ref. p. 216-217.
10. S. Groot: The Maxwell equations en Studies in Statistical Mechanics North Holland Pu. Co. Amsterdam (1969) pp. 37, 66, 107, 108, 128,
11. Ver la referencia 10 ág. 108.

12. H. Ott: Z. Physik 175 (1963) 70. Ter Haar: Phys. Reports 1c (1971) 33. W. Israel: The Relativistic Boltzmann equation en General Relativity papers in honour of J. Synge. Ed. por L.O'Raifeartaigh. Clarendon Press Oxford (1972). J. Anderson H. Witting: Physica 74 (1974) 466. D. Eimerl: Ann. Phys. 91 (1975) 481. W. Israel: Ann. Phys. 100 (1976) 310.
13. Landau referencia 1 p. 215-216. A.S. Kompaneyets: Theoretical Physics. Dover Inc. N.Y. (1972) p. 225-226.
14. Sommerfeld referencia 7 pp. 277, 300, 303, 307.
15. J. Aharoni: The Special Teory of Relativity. Oxford at Clarendon Press (1965) p. 120. D.W. Sciama en General Relativity editado por L.O'Raifeartaigh, Oxford at Clarendon Press (1972).
16. E. McDaniel: Collision Phenomena in Ionized Gases: Wiley N.Y. (1964). F. Reiff: Foundations of Statistical and Thermal Physics. McGraw-Hill N.Y. (1965) sección 13.
17. Erber referencia 2. A. Barut: Electrodynamics and Classical Theory of fields and Particles. McMillan N.Y. (1964) pp. 298, 208- 209. F. Rohrlich: Classical Charged Particles. Add. Wesley (1965) pp. 18-19 y 119. N. Balazs: Proc. Irish Royar Soc. 67A (1969) No. 2. W. Cloetens: N. Cimento 62A (1969) 247. W. Grandy: N. Cimento 65A (1970) 738. T. Mo. C. Papas: Phys. Rev. D12 (1971) 3566. L. Laue: N. Cimento 3B (1971) 56.
18. M. Abraham: Th. der Elekt. Vol. II, Springer, Leipzig (1905). H.A. Lorentz: The theorie of electrons, Dover Inc. N.Y. 2nd. ed. N. Born: Ann. der Physik 30 (1909) 1. H. McMacnus: Proc. Roy. Soc. London 195 (1948) 1323. J. Jackson: Classical Electrodynamics. Wiley Inc. N.Y. (1963) p. 585-588.
19. H. Pincaré: Rend. Circ. Mat. Palermo 21 (1906) 129.
20. J. Katz, G. Horwitz: N. Cimento 5B (1971) 59 donde se discute la irrelevancia de los efectos gravitatorios en las cuestiones de la autofuerza e.m. La identificación de las fuerzas de Poincaré con las tensiones gravitacionales fue sugerida por M. Sekine, T. Musha: The Electron as a Black Hole (preprint) Depart. Appl. Elect. Tokyo Inst. of Techn. Midoriku (1976) en donde se asocia al electrón un radio de Schawarchild de 10^{-55} cm, dejando de ser válidas las ecs. de Maxwell a distancias del orden o inferiores a 10^{-13} cm. Ver también las refs. 25 y 31.
21. J.C. Kasher: Phys. Rev. D14 (1976) 939.
22. Sommerfeld Ref. 7, p. 236.
23. J. Larmor: Math. and Phys. Papers. Vol. 2. Cambridge Univ. Press. (1929) p 444.
24. L. Page, N. Adams: Electrodynamics. V. Nostrand Inc. N.Y. (1940) p. 161-173.
25. N. Hu: Proc. Roy. Irish Acad. 41A (1947) 87. E. Bellomo: N. Cimento 2 (1955) 456. R. Newburgh: Am. Journ. Phys. 36 (1968) 399. L. Infeld et al. Ann. Phys. 55 (1969) 561, 576. L. de Broglie en Cincuentenario de la Mec. Cuántica Real Ac. Ciencias Española, Madrid (1975). W. Bonnor, M. Rotenberg: Proc. Roy. Soc. London 289 (1965) 247.
26. W.B. Bonnor: Proc. Roy. Soc. Lond. A337 (1974) 591.
27. G. Caballeri, G. Salgarelli: N. Cimento 62A (1969) 722.
28. R.G. Newburg: Am. Joun. Phys. 36 (1968) 399. H. Frisch, L. Wilets: Am. Jorn. Phys. 24 (1956) 574. L. Page, N.I. Adams de la referencia 24.

29. G. Morpurgo: N. Cimento 9 (1952) 808. A. Loinger: N. Cimento 2 (1955) 511. G.M. Prosperi, A. Scotti: Nucl. Phys. 13 (1959) 140. T.A. Welton: Pys. Rev. 74 (1948) 1157. T. Erber: Rev. Mod. Phys. 38 (1966) 626. E. Monitz, D. Sharp: Phys. Rev. D10 (1974) 1133. P. Rowe: Phys. Rev. D12 (1975) 1576. W. Heitler: The Quantum Theory of Radiation. Oxford at Clarendon Press 3rd. ed. (1954), Capítulo VI. Ver también Rohrlich Ref. 17 capítulos V y VI.
30. Ver la ref. 12 y J. Mehra: Einstein , Hilbert and the theory of graviatation: Reidel Pu. Co. Dordrecht (1974) p. 4.
31. G. Mie: Ann. Physik 37 (1912) 511; 40 (1913) 1. M. Born: Proc. Roy. Soc. Lond. A143 (1910) 410. M. Born, L. Infeld: ibid. 144A (1934) 425; 150A (1935) 141. B. Podolsky, P. Schwed: Rev. Mod. Phys 20 (1940) 40. N. Rosen: Phys. Rev. 72 (1947) 298.
32. G. Hellwig: Partial Differential Equations. Blaisdell N.Y. (1964) Cap. V. P.M. Morse, H. Feshback: Methods Theoretial Physics. McGraw Hill N.Y. (1953), parte I pp. 834, 869.
33. C. Cercignani: Mathem. Methods in Kinetic Theory. Plenum Press N.Y. (1969), capítulo V.
34. P.A. Hogan: Lett. N. Cimento 8 (1973) 878 y referencias.
35. R. Thom: Stabilité Structurelle et morphogenese. Benjamín Inc. Reading Mass(1972).