revista mexicana de física 26 (1979) 59-87

HACIA UNA FORMULACION CAUSAL DE LA MECANICA CUANTICA

T.A. Brody, A.M. Cetto y L. de la Peña*
Instituto de Física,
Universidad Nacional Autónoma de México
(recibido 13 de octubre 1975)

RESUMEN

Este trabajo consta de dos partes. En la primera, se analizan los elementos que debe contener una teoría de la mecánica cuántica (MQ) para explicar físicamente las propiedades cuánticas más notables (comportamiento azaroso, dualidad onda-corpúsculo), espectros discretos). Se concluye que la teoría que posee los elementos cualitativos requeridos es la Electrodinámica Estocástica (EDE), según la cual el agente que imprime al electrón su conportamiento cuántico es el campo electromagnético estocástico de fondo asociado a la energía del punto cero. En la segunda parte, se ve que los postulados de la EDE permiten construir una teoría del movimiento del electrón que incluye la MQ como caso particular. Por lo tanto, también el formalismo matemático de la MQ queda justificado por la EDE. Se presenta así una teoría que proporciona una interpretación estadística y objetiva de la MQ y que, a la vez, la generaliza.

ABSTRACT

This paper consists of two parts. In the first one we analyze the elements that a theory of quantum mechanics (QM) must contain in order to provide a physical explanation of the most notable quantum features (random behaviour, wave-particle duality, discrete spectra). We conclude that the theory that possesses the qualitative elements required is stochastic electrodynamics (SED), according to which the quantum behaviour of the electron arises from its interaction with the stochastic electromagnetic background field associated with the zero-point energy. In the second part we show that the postulates of SED are suitable for the construction of a theory of the motion of the electron from which QM may be derived as an approximate description; hence, the mathematical formalism of QM too is justified by SED. Thus, the present theory generalizes QM and moreover, provides an objetive statistical interpretation of it.

---

* Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares, México.

1. INTRODUCCION*

Es un hecho conocido que si bien todos los físicos aceptan el formalismo matemático de la mecánica cuántica, hay una controversia todavía no resuelta respecto a su interpretación,es decir, respecto al nexo de conceptos que liga el aparato matemático con el mundo real en el cual se llevan a cabo los experimentos y se realizan las aplicaciones de la teoría. Hay la interpretación llamada de Copenhague (sin duda porque no se originó allí) o a veces ortodoxa (tal vez porque discrepa más radicalmente de la física tradicional); pero hay también una serie de otras concepciones en mayor o menor grado críticas de la interpretación copenhaguense. La mayoría de los físicos consideran que las diferencias que se dirimen son de orden filosófico y que las pueden ignorar: la mecánica cuántica funciona y esto es lo único que les importa.

Es cierto que en la base de las diferencias interpretativas hay problemas esencialmente filosóficos; pero la cosa no se para allí. La interpretación de Copenhague implica que la teoría es completa, y no pocos de sus adherentes interpretan esto en el sentido de que no puede haber teoría física más profunda. En cambio, por lo menos una de las interpretaciones alternativas, la estadística, considera explícitamente que la mecánica cuántica es incompleta; lo que es más, parece posible sacar de esta interpretación algunas indicaciones sobre la dirección en la que habría que buscar nuevas teorías.

Este argumento revestía poca fuerza mientras las nuevas teorías seguían siendo una piadosa esperanza. Pero en los últimos años se ha empezado a perfilar una teoría —o comienzos de una teoría— que desborda los límites de la mecánica cuántica y la extiende, al mismo tiempo que la contiene como un caso límite. El propósito que aquí tenemos es presentar las ideas centrales y algunos de los primeros resultados de esta teoría en una forma accesible. Pero antes de entrar en materia, debemos advertir al lector: esta teoría apenas se encuentra en estado incipiente. Por esta razón su aparato formal todavía tiene muchos problemas y es poco elegante, además de que sus conceptos tienen aún fronteras mal definidas; sobre todo, las predicciones que pueda hacer la nueva teoría apenas se

---

* Aprovechando el involuntario retraso en la publicación de este trabajo, los autores se han permitido ponerlo al día, introduciendo ligeras modificaciones en el texto y ampliando la bibliografía.

empiezan a elaborar, de modo que no hay aún confirmaciones experimentales que nos aseguren que este desarrollo va por buen camino.

Para entender mejor las razones que llevaron al desarrollo de esta teoría, ayuda mucho un estudio de las interpretaciones diferentes de la mecánica cuántica. Sobre este problema se ha escrito con amplitud: aparte de discusiones elementales al alcance inmediato del lector[1,2] y otras históricas[3], baste mencionar para la interpretación estadística einsteiniana el excelente trabajo de Ballentine[4], para diversas otras interpretaciones la presentación breve y lúcida de Bunge[5] y —más recientemente— el libro de Jammer[6], el cual discute con variada amplitud algunas teorías no ortodoxas de la mecánica cuántica.

2. PREMISAS PARA UNA NUEVA TEORIA CUANTICA

2.1 La naturaleza Estocástica de la Mecánica Cuántica

Restrinjámonos a la mecánica cuántica no relativista, tal y como la formuló Schrödinger, por ejemplo (la llamaremos MQ). Esta restricción se funda en que ya en la MQ encontramos problemas conceptuales fundamentales que deben ser aclarados antes de pasar a descripciones más generales.

Cualquier intento por establecer la MQ sobre bases más sólidas que las usadas tradicionalmente —que, son en general, de carácter formal—, debe proporcionarnos una explicación convincente de las propiedades que distinguen al sistema cuántico, además de justificar detalladamente el formalismo de la teoría contemporánea. Entre tales características, las más relevantes son que:

a) se observan estados discretos de energía (y de otras variables también) en situaciones cuando la física clásica predice un continuo;

b) hay fenómenos de difracción e interferencia, típicos de procesos ondulatorios, allí donde la física clásica ve simplemente partículas que se mueven con independencia unas de otras; y

c) cuando efectuamos mediciones sobre partículas que hemos preparado para que estén en el mismo estado físico, los valores medidos muestran dispersiones estadísticas.

Fue la existencia de estados discretos de energía la que dio lugar a las primeras teorías cuánticas y hasta les dio su nombre; después tomó mayor importancia la segunda característica, con lo que surgió la mecánica ondulatoria con sus funciones de onda, para la que interferencia y difracción son naturales. Este desarrollo fue posible porque una teoría ondulatoria puede explicar los estados discretos, los cuales aparecen en forma natural como los estados estacionarios de un sistema ondulatorio - (piénsese, por ejemplo, en una cuerda vibrante, capaz de sostener sólo - uan serie discreta de frecuencias diferentes). El enorme éxito de la teoría schrödingeriana se debe, según este punto de vista, al hecho de que parte del punto (b) arriba y logra explicar el (a) como consecuencia directa.

En cuanto al punto (c), la MQ sólo nos permite deducir los valores de las dispersiones observadas, pero su origen queda sujeto a todo tipo de interpretaciones. Para acomodar adecuadamente el *hecho* (experimentalmente bien confirmado) de estas dispersiones, la MQ tuvo que recurrir a la concepción probabilística de la función de onda; y de allí surgen dificultades conceptuales. En la interpretación de Copenhague las fluctuaciones experimentalmente vistas, cuyas probabilidades calcula la MQ, o bien se considera que carecen de un origen, de una causa, o bien, y esto es lo más frecuente, se les considera un resultado de la acción perturbadora del instrumento de medición; en la interpretación estadística los cálculos de la MQ son aplicables solamente a un ensemble (en el sentido de la mecánica estadística) de réplicas teóricas y no a un sistema individual. Que la teoría no puede predecir las desviaciones que mostrará el movimiento de un sistema particular (aunque sí predice la magnitud probable, el valor esperado, de estas desviaciones) se debe simplemente, según esta interpretación, a su incompletez: es incompleta, en el mismo sentido que lo es la termodinámica, la cual describe el comportamiento - global de los sistemas térmicos, pero es incapaz de especificar la trayectoria de una determinada molécula, por ejemplo.

La interpretación estadística de la MQ admite, pues, la posibilidad de una teoría subyacente en la cual aparecería explícitamente formulado el mecanismo de las fluctuaciones y deducidas las dispersiones correspondientes, así como las desigualdades de Heisenberg que las relacionan. - Una teoría de esta índole no puede ser meramente determinista: si lo fuese, no podría explicar el elemento azaroso que causa las fluctuaciones experimentales, las cuales por ahora escapan a nuestro control. Pero tampoco puede contener el azar como su principio fundamental: esto es precisamente lo que hace la interpretación de Copenhague, cortándose así la posibilidad de una explicación más profunda. El tipo de teoría que se busca, pues, es la de un proceso estocástico subyacente al movimiento de sistemas cuánticos, un proceso para el cual se entiendan claramente las causas, que serán tan complejas y con tal variación irregular en el tiempo que un simple tratamiento determinista —de tenerse— no tendría sentido, haciéndose necesario el recurrir a los métodos estadísticos para analizar el problema.

El caso más estudiado de sistema estocástico es el movimiento browniano, o sea, el movimiento irregular de una partícula suspendida en un líquido. No es de sorprender entonces que casi desde el comienzo de la MQ se hayan hecho intentos de ver los procesos cuánticos como algo parecido al movimiento browniano*, a veces con el propósito de obtener teorías más poderosas que la MQ, a veces simplemente para apuntalar la interpretación estadística. Si bien estos intentos pudieron explicar propiedades cuánticas importantes, como las desigualdades de Heisenberg[7-9], ellos no tuvieron el fruto deseado. Sin embargo, la idea de un proceso estocástico atrás de la MQ parece bien fundada, la cosa que confirma el hecho de que aún teorías que originalmente no contenían concepciones de esta índole han ido incorporándolas para adecuarse a la MQ: por ejemplo las teorías de Bohm y Vigier[10] o la termodinámica cuántica de de Broglie[11]. La mayor dificultad estriba en suponer una similitud demasiado grande entre el movimiento cuántico y el browniano. El proceso estocástico subyacente a la MQ debe diferir en varios puntos básicos del browniano. Aclarar esta situación es tarea de primera importancia para la teoría que aquí describimos.

Un primer paso en esta dirección, todavía dentro del marco puramente fenomenológico, queda ejemplificado con la mecánica cuántica estocástica (MQE, ver bibliografía). Esta teoría se obtiene al introducir un proceso estocástico en el espacio de configuración, definido en términos muy generales, tal que incluye como casos particulares claramente distinguibles los dos fenómenos estocásticos mencionados: el browniano y el cuántico. En ellos se demuestra, en particular, que el postulado de estocasticidad de

---

* El primer intento se debe a Fürth, en 1933 (ref. 7). Véase la bibliografía al final.

las variables cinemáticas de posición, velocidad, etc., si es manejado apropiadamente, conduce en el segundo caso,y sólo en él, a un sistema de ecuaciones dinámicas que tiene como solución a la ecuación de Schrödinger.

El marco conceptual de esta teoría —la que más adelante tendremos oportunidad de revisar en sus líneas generales— es claro y proporciona una base sólida a la interpretación estadística de la MQ. Sin embargo, las limitaciones de esta teoría son serias, pues además de su carácter puramente fenomenológico no presta atención al *origen* de la estocasticidad; esto permite que aún dentro de la interpretación estadística, se pueda retornar a las posiciones acausales (representadas, por ejemplo, por Blokhintsev[12] o Landé[13]) o incluso se niegue que el proceso estocástico involucrado sea real, es decir, que se vea la teoría como una construcción puramente formal[14].

Lo atractivo de la MQE es que deja ver como, sobre la base de dos o tres ideas sencillas y generales, un proceso estocástico —elemento eminentemente apto para explicar la propiedad (c) de los sistemas cuánticos— también puede generar propiedades ondulatorias del tipo (b) y por ende las propiedades cuánticas del tipo (a). Pero solamente lo hace en términos generales, y no nos permite derivar una descripción para todo aquello que depende de la naturaleza específica del proceso. Es necesario, pues, ir más allá de la MQE puramente fenomenológica y estudiar el proceso estocástico físico en su detalle.

2.2 El Vacío Electromagnético como Campo Subcuántico

Vemos, pues, que si la introducción de un solo elemento físico nuevo ha de conducirnos a la MQ —cosa altamente deseable para preservar la simplicidad conceptual de la teoría—, este elemento deberá explicar a la vez las propiedades estocásticas y ondulatorias del sistema cuántico. Esta demanda sugiere postular que el espacio está ocupado por un campo subcuántico estocástico que, por su carácter estocástico, imprime a cada partícula un movimiento errático, pero a la vez, por su naturaleza campal, induce en el movimiento de los electrones propiedades ondulatorias.

Campos subcuánticos diversos han sido postulados por diferentes autores en el curso de estos estudios; por ejemplo, Bohm[15] y Bohm-Vigier[10] introducen el campo Ψ —que coincide con la función de Schrödinger—; Rosen[16] postula un campo de intensidad $= |\Psi|^2$; Weizel[17] construye un campo de "cerones" dentro del espíritu de la teoría de Fényes; de Broglie[11] postula la onda (el campo) de guía u proporcional a Ψ excepto en la inmediata vecindad de la partícula; Dudley[18] sugiere un campo de neutrinos, etc.

Estas nociones tienen un aire artificial, sobre todo porque en ningún caso existe evidencia independiente de que lo que se postula como elemento subcuántico realmente tiene el comportamiento deseado. Por suerte resulta que no es necesario inventar un nuevo medio: existe uno bien conocido que puede jugar el papel de base física para el proceso estocástico subyacente que buscamos. Es el campo electromagnético. Se ha convenido en llamar electrodinámica estocástica (abreviaremos EDE) a la teoría que lo toma como base en este sentido; en la bibliografía al final se encuentra una lista de los principales trabajos que han propuesto y elaborado esta teoría.

La idea central de la EDE es que, según las leyes de la electrodinámica clásica —que para este propósito se suponen válidas—, toda carga puntual acelerada radía; por lo tanto, el espacio está permeado por un campo de radiación de fondo, de naturaleza estocástica, producido por la infinidad de partículas que componen el universo. Este campo imprime un movimiento estocástico a toda partícula cargada que se mueve en él. ¿Cómo sustentar la proposición de que el espacio —el vacío físico— debe ser concebido como un campo de radiación fluctuante que promedia localmente a cero? Varios argumentos sostienen esta proposición; veamos algunos de ellos con más detenimiento.

a) La energía del punto cero. La distribución de Planck contiene, aparte del término que depende de la temperatura T y se anula con ella, otro término independiente de T y que proviene del hecho de que la mínima energía de un modo normal de oscilación del campo electromagnético es $\hbar\omega/2$; como este término no varía con T, se le suele despreciar en el análisis de las propiedades térmicas de la radiación de cuerpo negro. Pero, de hecho, este campo del punto cero tiene efectos observables y debe considerarse real*. Se puede demostrar que, por ejemplo, las fuerzas de van der Waals entre moléculas[20,21] se derivan de él; o que entre dos -

* Esta posición fué adoptada por Einstein ya en 1913 (ref. 19), pero no es aún popular entre los físicos.

placas metálicas surgen fuerzas atractivas (que han sido medidas) debido a que las fluctuaciones del campo del punto cero inducen corrientes en las placas[22]; y hay otros fenómenos más que se explican de la misma manera[20], incluyendo el efecto Lamb[23], que es usualmente considerado un efecto explicable sólo por la electrodinámica cuántica.

Esta energía del punto cero tiene una explicación en el marco de la teoría cuántica. Se puede mostrar[24] que tratar de considerar en una teoría partículas cuánticas y un campo electromagnético no cuantizado lleva a inconsistencias; si para eliminarlas se cuantiza el campo, surgen relaciones de Heisenberg para las variables canónicas conjugadas del campo $\vec{E}$ y $\vec{B}$. El campo de vacío —en el cual no hay fotones presentes— se caracteriza evidentemente por el hecho de que los valores esperados de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ se anulan: $\langle 0|\vec{E}|0\rangle = \langle 0|\vec{B}|0\rangle = 0$; pero los valores esperados de $\vec{E}^2$ y $\vec{B}^2$ no pueden ser cero, ya que su producto debe satisfacer una relación de Heisenberg (lo que muestra, incidentalmente, que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son fluctuantes); por lo tanto, tenemos una densidad media de energía en el campo que resulta ser

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{8\pi} \left| \langle 0|\vec{E}^2|0\rangle + \langle 0|\vec{B}^2|0\rangle \right| = \frac{3}{4\pi} \langle 0|E_x^2|0\rangle \qquad (2.1)$$

si consideramos que el campo es isotrópico. Ahora si la temperatura es nula, se puede mostrar que la componente de Fourier de frecuencia ω contribuye precisamente con $\hbar\omega/2$ a esta energía*.

b) La reacción de radiación. Como hemos dicho, una partícula cargada acelerada emite radiaciones que actúan a su vez sobre la partícula. Para calcular correctamente tales efectos, se debe tomar en cuenta que las radiaciones se propagan con una velocidad finita c; más específicamente, el potencial relevante no es $\vec{A}(\vec{r},t)$ sino $\vec{A}(\vec{r},t - |\vec{r}|/c)$, el llamado potencial retardado de Liénard-Wiechert. Se puede demostrar que esta autointeracción retardada, que tiende a frenar la partícula, se reduce en un marco no relativista, en primera aproximación, a un término adicional de la forma $\frac{2e^2}{3c^3}\dddot{x}$ en la ecuación de movimiento[26], llamado

* Sin embargo, el punto de vista usual de la electrodinámica cuántica difiere del presentado aquí, pues considera a los fotones asociados a las fluctuaciones del vacío como virtuales, es decir, inobservables. Este punto de vista se defiende, por ejemplo, en el trabajo de Onley[25].

de reacción de radiación. Lo que expresa este término es el hecho de que una partícula cargada siente una fuerza al emitir energía; el trabajo realizado por esta fuerza para desacelerar la partícula es precisamente la energía radiada.

¿Qué relevancia tiene esto para el problema que estamos discutiendo, de la existencia de un campo electromagnético estocástico? La relevancia viene de que la energía así perdida se degrada, en un sentido análogo a la degradación del calor perdido en un ciclo térmico. Esta degradación la expresa un teorema fundamental de la física estadística, descubierto sólo en años recientes: el teorema de fluctuación-disipación[27], el cual establece que los elementos disipativos en un sistema físico tienen que ser elementos ruidosos, que producen fluctuaciones; e inversamente, una fuerza fluctuante conlleva necesariamente un elemento disipativo. (El ejemplo más conocido de esta situación es una resistencia eléctrica, la cual resiste al paso de la corriente por medio de la interacción estocástica entre electrones y moléculas; la relación entre resistencia y ruido eléctrico es un caso sencillo del teorema, conocido desde hace tiempo como teorema de Nyquist[28]). El teorema de fluctuación-disipación significa, en nuestro caso,que si un electrón sufre una reacción de radiación, entonces debe sentir también una fuerza fluctuante y por ende tener un movimiento estocástico, y viceversa. Como el teorema establece además la precisa relación entre los dos efectos, se puede deducir a partir de la reacción de radiación, que es proporcional a $\dddot{x}$, cuál debe ser el campo fluctuante asociado: resulta que a cada modo normal de frecuencia ω le corresponde una energía proporcional a ω: otra vez encontramos el campo electromagnético del punto cero. Un argumento heurístico análogo fue expresado por vez primera por Braffort y colaboradores[29].

La imagen que emerge es, pues, la de un universo que contiene materia en permanente agitación (aún en el cero absoluto de temperatura), junto con un campo electromagnético en similar agitación. Los dos están íntimamente unidos: un elemento estocástico crea el otro, y la estocasticidad de cada uno es necesaria para entender la del otro.

Pero si esta imagen es una mejor descripción de lo que pasa —así lo esperamos— que la que considera que una partícula está aislada del resto del universo y por lo tanto viene muy bien descrita por la mecánica newtoniana, no debemos olvidar que es, a su vez, solamente una aproximación.

El campo que hemos discutido es homogéneo e isotrópico, a temperatura - T=0; es decir, es el campo infinitamente lejos de toda materia. Un cuerpo material —simplemente otro electrón— puede romper la isotropía e introducir inhomogeneidades e incluso elevar la temperatura, si es suficientemente grande. Antes de seguir adelante, veamos en forma cualitativa lo que resulta al tomar en cuenta tales efectos, ya que esto ilustra muy claramente como la EDE nos puede ayudar a entender la dualidad onda-corpúsculo.

En la vecindad de un cuerpo macroscópico, dijimos, el campo se verá afectado; más precisamente, las fluctuaciones adquirirán alguna coherencia espacial y ya no tendrán necesariamente una distribución homogénea e isotrópica (aunque su promedio seguirá siendo cero si el cuerpo no tiene carga y está en reposo); por lo tanto su interacción con la partícula podrá desviarla en promedio. Dicho más simplemente, debemos esperar efectos de difracción. Más aún, si el cuerpo tiene alguna periodicidad espacial —si, por ejemplo, tiene una serie de ranuras regularmente espaciadas— está periodicidad se reflejará en una periodicidad del efecto que el campo tendrá sobre una partícula que atraviesa una sola de estas ranuras. Es decir, a través del campo electromagnético estocástico —el intermediario ubícuo— la partícula se puede enterar de la existencia de otras ranuras que no atraviesa; he aquí por qué, al acumular suficientes partículas que atraviesan por una (¡ y una sola !) de las dos ranuras en una pantalla se observa un patrón de interferencia, sin necesidad alguna de las extraordinarias maromas que da la interpretación copenhaguense para encontrar una explicación.

Cabe aquí una pregunta. El campo estocástico, hemos dicho, siente el efecto e incluso se debe al movimiento irregular de todas las partículas en el universo. ¿Cómo es posible entonces que podamos tratar el movimiento de una sola de estas partículas como si estuviera aislada? La respuesta tiene dos aspectos: en primer lugar recordamos que no podemos (ni en MQ ni con la nueva EDE) dar la trayectoria individual de una partícula, sino solamente logramos describir los promedios sobre el ensemble, de las cantidades que nos interesan (en el caso de la MQ) y adicionalmente las distribuciones (mediante la EDE). En segundo lugar es obvio que un cambio macroscópico relativamente lejos de un electrón lo afectará casi imperceptiblemente —a menos que este cambio afecte en forma apreciable las componentes de Fourier del campo en la vecindad del electrón; este último es evidentemente el caso para la pantalla con sus dos rendijas que tanto se ha discutido entre diversas interpretaciones de la MQ. Estamos aquí en presencia de otro de los efectos típicamente cuánticos y mal comprendidos: en ciertas condiciones es posible cambiar los resultados de un experimento, alterando una parte lejana de la instalación: la información se transmite a través de la interacción de las partes con el campo. En resumen, podemos decir que es el campo electromagnético de fondo el que media las interacciones entre las partículas y los cuerpos macroscópicos que necesitamos para explicar la aparición de fenómenos ondulatorios en conjuntos grandes de partículas.

Un ejemplo interesante de estas interacciones, que *no* se deben a fuerzas explícitas, es el problema de un sistema de dos partículas iguales entre las cuales no hay potencial que las acople; el hecho es que en la MQ usual un estado estacionario de este sistema viene descrito por funciones de onda que tienen que ser combinaciones simétricas o antisimétricas de los productos de las funciones individuales. Si escribimos éstas como - Ψ_a (1) y Ψ_b (2), entonces el sistema compuesto queda descrito por alguna de las funciones de onda

$$\Psi \pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left|\Psi_a(1)\Psi_b(2) \pm \Psi_a(2)\Psi_b(1)\right| \tag{2.2}$$

y es bien sabido que esta regla -que tiene consecuencias físicas muy importantes y observables- es esencialmente un postulado adicional de la MQ. En el caso de la EDE, la situación es un tanto más clara, pues es evidente que $\Psi_a(1)\Psi_b(2)$ sería la función de onda solamente si la partícula 1 no perturba el campo estocástico en la vecindad de la partícula 2, ni viceversa. Que (2.2) toma en cuenta estas perturbaciones en forma correcta para todos los casos queda por demostrarse aún, si bien la MQE ya ha dado indicaciones en esta dirección[30]. Cabe notar que la EDE no requiere introducir la noción peculiar y difícil de que las dos partículas sean - indistinguibles, aún en principio, como se suele hacer en MQ para explicar la situación descrita por (2.2).

2.3 *La Existencia de Estados Discretos*

Cualitativamente la EDE posee, como se acaba de discutir, los elementos necesarios para describir los principales fenómenos que tienen un carácter peculiarmente cuántico; en la siguiente sección mostraremos a grandes rasgos que, de hecho, el acuerdo es cuantitativo, ya que bajo ciertas condiciones se puede deducir la MQ como caso límite de la EDE. Antes, sin embargo, parece conveniente discutir otro problema: la explicación que ofrece la EDE de la existencia de niveles de energía discretos en sistemas cuánticos.

Se podría decir que esto no requiere explicación. Después de todo, la EDE permite entender adecuadamente los fenómenos que estadísticamente se presentan como ondulatorios y de hecho permite obtener la ecuación de Schrödinger, al menos bajo ciertas condiciones particulares; ésta a su vez predice estados discretos de la energía para sistemas con las condiciones apropiadas en la frontera. Es cierto; pero al mismo tiempo la EDE nos ofrece imágenes muy directas de los procesos que llevan a los fenómenos cuánticos y sería interesante ver si en este caso tal cosa es posible. La dificultad no es nueva; ya en la primera teoría cuántica de Bohr, la esencial inestabilidad de un electrón en órbita atómica —el cual debe perder energía por radiación y caer en espiral al núcleo— fue eliminada simplemente por un edicto cuya contradicción con el resto de la teoría quedaba evidente; y ahora se propone explicar este punto ciertamente oscuro*) mediante una teoría estocástica, es decir, una teoría de un tipo que no parece dar pie alguno para efectos discretos, con sus variables perfectamente clásicas y continuas, sobre las cuales todavía se toman promedios...

Sin embargo, lo que sucede se puede entender simplemente. El campo fluctuante cede energía al electrón cuando induce su movimiento estocástico. Es fácil convencerse de esto: si soltamos un electrón inicialmente inmóvil en el campo, empieza a agitarse violentamente —es decir, absorbe energía del campo. Cuando la energía absorbida en promedio por unidad de tiempo iguala la potencia media radiada, la órbita es estable.

Este argumento, aunque justo, es incompleto. También un corpúsculo browniano absorbe energía que le dan las colisiones con las moléculas y

---

* Como un producto de esta situación insatisfactoria, hay trabajos en que se investiga la existencia de distribuciones de carga y de corrientes no radiantes, aún cuando haya movimientos acelerados. Por ejemplo, antes de la MQ, Sommerfeld y Hertz construyeron modelos clásicos de electrones extensos, mostrando que existen oscilaciones que no radían; en el contexto de la MQ, modelos en esta dirección fueron elaborados por Bohm-Weinstein, Goedecke, etc. (Ver ref. (31)). Sin embargo, una carga *puntual* acelerada necesariamente radía.

pierde energía por viscosidad: pero no tiene órbitas estables. El teorema de fluctuación-disipación refleja el balance que se establece entre la energía porporcionada al sistema por la fuerza fluctuante y la absorbida por el término disipativo: la situación es perfectamente general y válida en todo proceso estocástico.

La diferencia importante entre la EDE y otros procesos estocásticos es que aquí la fuerza disipativa va como $\dddot{x}$, lo que es suficiente para asegurar que la velocidad media local de equilibrio no se anule necesariamente: $\langle\dot{x}\rangle = 0$ es condición de equilibrio sólo para fuerzas disipativas proporcionales a $\dot{x}$. Se puede demostrar[20,32] que en el caso coulombiano existe una órbita media estable si la fuerza disipativa es proporcional a $\dddot{x}$ y la densidad espectral del campo fluctuante es $\sim \omega^3$; en particular, con la densidad espectral dada por la ley de Planck (a T=0), las dimensiones de la órbita resultan del orden del radio de Bohr[20].

En cuanto a los niveles excitados podemos entenderlos como sigue. Si el campo electromagnético estocástico está a temperatura T=0, cada uno de sus modos tiene un mínimo absoluto de energía de $\hbar\omega/2$. En promedio, este campo no puede comunicarle más que esta energía a la partícula, la cual entonces se encuentra en su estado base. Cualquier estado excitado decae rápidamente a este estado base, sin que sea necesario introducir una perturbación, como en MQ. ¿Los estados excitados entonces no tienen existencia real, en el sentido de que se mantengan durante algún tiempo? Sí: a temperaturas mayores. Es entonces que el campo tiene suficiente energía como para mantenerlos; pero no mantiene simplemente un estado excitado a la vez —hay que recordar que estamos estableciendo la teoría de un gran número de réplicas que evolucionan en paralelo. Lo que nos da la teoría de la EDE es que a cada temperatura le corresponde una distribución sobre los diferentes estados excitados. La distribución de equilibrio que se obtiene es, desde luego, dinámicamente constante a una temperatura dada: cada electrón se mueve de un estado excitado a otro, según vaya intercambiando energía con el campo; pero la EDE nos da una descripción del proceso, incluyendo las trayectorias que llevan de uno al otro, y no solamente las probabilidades de transición.

Cabe ahora una pregunta, cuya respuesta es fundamental: queda claro que la EDE nos ofrece una respuesta cualitativa convincente y simple a muchos problemas complejos de la MQ usual; nos brinda una razón para decidir, por ejemplo, a favor de la interpretación estadística de la MQ en vez de la interpretación ortodoxa; o para entender el significado y origen de la dualidad onda-corpúsculo, etc. Pero: ¿puede también la EDE justificar el aparato matemático de la MQ? ¿Puede, por ejemplo, conducirnos a las amplitudes de probabilidad, a los operadores, etc., en forma natural y convincente? Pasemos a estudiar este tema: veremos que la respuesta es afirmativa.

3. LA ELECTRODINAMICA ESTOCASTICA Y SUS CONSECUENCIAS

3.1 La Ecuación de Langevin

Sea x la posición de un electrón de masa m y carga e; puede haber una fuerza externa (no estocástica) que actúa sobre él; la fuerza estocástica será $eE(x,t)$ —en un tratamiento no relativista podemos ignorar los efectos magnéticos— y la reacción de radiación será $m\zeta\dddot{x}$, con $\zeta = \frac{2e^2}{3mc^3}$. La ecuación de movimiento será entonces

$$m\ddot{x} = F(x) + m\zeta\dddot{x} + eE(x,t). \tag{3.1}$$

Si el campo E fuera perfectamente conocido en función de x y t, esta ecuación podría resolverse. Pero siendo E estocástico, también lo serán x y sus derivadas, y la solución no podrá obtenerse sino en términos estadísticos. Por esta razón (3.1) no es una simple ecuación de Newton; convencionalmente recibe el nombre de ecuación de Langevin.

En otros términos, para cada electrón, E será *otra* función de x y t, aunque se trate de electrones preparados con las mismas condiciones iniciales; y no sabemos cuál función de entre el número infinito de posibilidades se realiza en cada caso, por lo que no podemos predecir el comportamiento de ningún electrón particular. Lo que sí conocemos son las propiedades estadísticas del conjunto de todas las funciones E; esto es lo que nos permite hacer predicciones estadísticas a partir de (3.1).

Consideremos, como ejemplo, el conjunto estadístico de todas las ecuaciones (3.1) para un caso dado, y tomemos el promedio sobre ellas; esta operación la denotamos con < >. El resultado es

$$m\langle\ddot{x}\rangle = m\,\frac{d^2\langle x\rangle}{dt^2} = \langle F(x)\rangle + m\zeta\langle\dddot{x}\rangle\,, \tag{3.2}$$

ya que el promedio de E es cero. Si despreciamos la reacción de radiación resulta la forma aproximada

$$m \frac{d^2\langle x\rangle}{dt^2} = \langle F(x)\rangle \ . \tag{3.3}$$

Si ahora reinterpretamos $\langle\ \rangle$ en el sentido de valores esperados (cosa que es lícita ya que se trata de promedios sobre ensembles en ambos casos y sólo el ensemble se considera según maneras distintas), entonces (3.3) es una forma del teorema de Ehrenfest: significa que en general un electrón no sigue una trayectoria clásica, en vista de que sólo para fuerzas lineales $\langle F(x)\rangle = F(\langle x\rangle)$. (3.3) es exacta en la MQ, pero no aquí, donde se han despreciado los efectos medios de la radiación. Este es un primer indicio de que la EDE es una teoría más completa o más general que la MQ.

3.2 La Ecuación de Fokker-Planck.

Un posible camino para extraer conclusiones de (3.1) es resolver esta ecuación para una $E(x,t)$ general y estudiar las propiedades estadísticas de la solución. En principio, este método nos permitiría conocer con detalle cualquier aspecto de interés del movimiento. Un caso de importancia que puede atacarse con este método directo es el oscilador armónico. En concreto, se han estudiado algunas propiedades estadísticas de la solución de la ecuación

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \zeta\dddot{x} + \frac{e}{m} E(t) \tag{3.4}$$

en donde $E(x,t)$ ha sido aproximada por una función del tiempo $E(t)$ que posee propiedades estadísticas que garantizan que a cada modo normal del campo a cero grados corresponde la energía $\hbar\omega/2$; $\hbar$ entra así en la teoría como una medida de las fluctuaciones eléctricas del medio*. Se ha demostrado que las predicciones estadísticas obtenidas de (3.4) corresponden precisamente a los resultados cuánticos, incluyendo las correcciones ra-

---

* Es importante remarcar este punto; implica que $\hbar$ determina la magnitud de las fluctuaciones mecánicas en el sistema. La constante de Planck adquiere así un sentido estadístico, como medida de la acción estocástica del universo sobre el sistema individual.

diativas. La conclusión de estas investigaciones es importante: el oscilador descrito por la ec. (3.4) *es* el oscilador cuántico: (3.4) no es uan ecuación clásica, sino cuántica.

Es evidente, sin embargo, que este procedimiento no puede llevarse a la práctica sino en casos muy simples, dado que (por dificultades matemáticas) no podemos pretender construir explícitamente la solución de (3.1) en el caso general. Esto significa que se hace necesario encontrar otros métodos para determinar las propiedades estadísticas del sistema que no requieran la previa solución de la ecuación de Langevin. Una posibilidad consiste en construir a partir de la ecuación de Langevin la ecuación diferencial que determina la densidad de partículas en cada estado, o más en general, que determina las probabilidades de transición. Esta es la llamada ecuación de Fokker-Planck del problema, y sustituye con ventaja a la ecuación de Langevin, pues corresponde ya a una descripción estadística.

Supongamos que y_i es el conjunto de coordenadas que definen la trayectoria de una partícula (por ejemplo, en el espacio fase y_i representa las tres coordenadas espaciales y las tres componentes de velocidad, etc); sea $Q(y_i,t|y_{io},t_o)$ la probabilidad conjunta de transición de una partícula del punto y_{io} al tiempo t_o al punto y_i al tiempo t ($t>t_o$, evidentemente); entonces la ecuación de Fokker-Planck es, en general, de la forma[33]

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y_i} A_i Q - \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_i} B_{ij} Q + \ldots = 0 \qquad (3.5)$$

en donde las funciones A_i, B_{ij}... se determinan a partir de la ecuación de Langevin y del resto de relaciones entre las variables y_i.

Aunque el problema de pasar a una descripción estadística no es simple, ha sido posible obtener una ecuación de tipo Fokker-Planck para el caso de la EDE. En la presente exposición eliminaremos todo intento de deducción de ella, contentándonos con presentar el resultado, pues el punto es altamente técnico[34]. Para la densidad de probabilidad en el espacio fase se obtiene la ecuación (escrita en una dimensión):

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{p}{m}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial p}\left(F + \frac{\zeta}{m} pF'\right) Q + e\frac{\partial}{\partial p} E^r Q = 0 \qquad (3.6)$$

donde el último término representa la contribución efectiva del campo del vacío:

$$E^r Q = -e \int_0^t dt' \langle E(t)E(t')\rangle \frac{\partial}{\partial p'} Q(x',p',t') \quad . \tag{3.7}$$

A diferencia del movimiento browniano, en cuyo caso las B_{ij} de la ec. (3.5) son coeficientes constantes (llamados de difusión), en la EDE los términos doblemente derivados son funciones integrodiferenciales, de acuerdo con (3.6) y (3.7). Esto significa que estamos ante un proceso estocástico bastante más complicado que el browniano; en particular, se trata de un proceso que guarda memoria infinita (no markoviano).

3.3 Las Ecuaciones de la Mecánica Cuántica Estocástica

La noción de espacio fase no es propia de la MQ ordinaria, por lo que si hemos de recobrar esta teoría deberemos deshacernos de la variable p (nuestra intención es llegar a la descripción de Schrödinger de la MQ, es decir, a una teoría en el espacio de configuración). Introducimos para ello la densidad de probabilidad en el espacio de configuración --- $\rho(x,t)$ definida como sigue:

$$\rho(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(x,p,t)\, dp. \tag{3.8}$$

Análogamente, al promedio de $\frac{\vec{p}}{m}$ sobre la distribución de momentos lo llamaremos velocidad de flujo, como es usual, y lo denotaremos con $\vec{v}$ (en lo sucesivo pasaremos a tres dimensiones cuando sea convenientes);

$$\vec{v}(\vec{x},t) = \frac{1}{m} \int \vec{p}\, Q(\vec{x},\vec{p},t)\, d^3p = \frac{1}{m} \langle\vec{p}_x\rangle \rho . \tag{3.9}$$

Integrando sobre p la ec. (3.6), resulta

$$\frac{p}{t} + \nabla \cdot \vec{v} \rho = 0 \tag{3.10}$$

Podemos obtener otra ecuación multiplicando (3.6) por $\vec{p}$ e integrando sobre $\vec{p}$; se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} \rho + \frac{1}{m^2} \nabla\cdot\langle\vec{p}\vec{p}\rangle_x \rho - \frac{\vec{F}}{m} \rho - \frac{\zeta(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{F}}{m} \rho - e \langle\vec{E}^r\rangle_x \rho = 0 \tag{3.11}$$

Podríamos continuar indefinidamente con este procedimiento para obtener una jerarquía de ecuaciones; pero para los fines de este trabajo basta con las ec. (3.10) y (3.11), que describen el flujo de materia y de impulso, respectivamente. La ecuación de continuidad, (3.10), indica que la materia fluye con la velocidad local dada por (3.9). Para establecer contacto con la teoría estocástica fenomenológica de la MQ (o sea, la MQE), podemos reescribir[35,36] (3.10) en la forma de una ecuación de Fokker-Planck en el espacio de configuración:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{c}\,\rho - D\nabla^2 \rho = 0 \tag{3.12}$$

en donde $D = \frac{\hbar}{2m}$ es el llamado coeficiente de difusión de la MQE, y la velocidad total, $\vec{c}$, es la suma de la velocidad de flujo, $\vec{v}$, y una velocidad efectiva de origen estocástico:

$$\vec{u} = D\,\frac{\nabla \rho}{\rho} \tag{3.13}$$

La importancia de esta componente de la velocidad —totalmente desconocida en la MQ usual— puede percibirse señalando que es precisamente en base a las velocidades $\vec{v}$ y $\vec{u}$, cuyas propiedades de transformación frente a una inversión del tiempo son opuestas (como puede comprobarse de (3.10) y (3.13)), que es posible contruir la MQE.

En términos de estas velocidades, la ec. (3.11) puede reescribirse en la forma

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} - (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} - D\nabla^2\vec{u} = \frac{\vec{F}}{m} + \frac{\zeta(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{F}}{m} + e\langle \vec{E}^r \rangle_x + \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\overleftrightarrow{\sigma} \tag{3.14}$$

que, por analogía con la teoría hidrodinámica[37], puede interpretarse formalmente como una ley de flujo del impulso en un fluido viscoso; $\overleftrightarrow{\sigma}$ es un tensor de segundo rango, que puede exhibirse explícitamente, pero cuya forma precisa no es de mayor interés aquí. Lo que sí es interesante es que, cuando el sistema tiende al estado de equilibrio —gracias a la acción conjunta de las fuerzas fluctuantes y disipativas—, los tres últimos términos de (3.14) se reducen a meras correcciones electromagnéticas de segundo orden en la carga eléctrica, o aún menores[38]. Despreciando estos términos, nos resta un sistema completo de ecuaciones acopladas - para las variables ρ y $\vec{v}$ (V es el potencial asociado a la fuerza externa $\vec{F}$):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{v}\rho = 0 \tag{3.15a}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} - (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} - D\nabla^2\vec{u} = -\frac{\nabla V}{m} \tag{3.15b}$$

$$\vec{u} = D\frac{\nabla \rho}{\rho} = D\nabla \ell n\rho. \tag{3.15c}$$

Estas son precisamente las ecuaciones fundamentales de la MQE[35,36,39]. Esencial en esta deducción fue la suposición $\sigma = 0$, cuya validez general aún no ha sido establecida; por ello, los resultados anteriores no pueden considerarse como una dirivación general de la MQ a partir de la EDE, tarea que aún está pendiente.

3.4 La Ecuación de Schrödinger

El sistem (3.15) tiene como primera integral a la ecuación de Schrödinger*; en otras palabras, las dos funciones reales, independientes en que podemos descomponer la Ψ compleja de Schrödinger son integrales de las funciones $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Vamos a demostrar esto. Pese a lo complicado de las expresiones, la integración de (3.15) es simple, por lo que sólo esbozaremos la idea central. Tomando el rotacional de (3.15b) es fácil convencerse que $\vec{v}$ es irrotacional; por lo tanto, podemos escribir (el factor numérico se introduce por comodidad; S es adimensional):

$$\vec{v} = 2D\nabla S \tag{3.16}$$

Escribiendo ρ en la forma

$$\rho = e^{2R} \tag{3.17}$$

---

* Naturalmente es posible deducir la ecuación de Schrödinger directamente de la ec. (3.11) sin pasar por el sistema de ecs. (3.15); aquí se - sigue un procedimiento indirecto, por razones metodológicas.

se obtiene una expresión análoga para $\vec{u}$:

$$\vec{u} = 2D\nabla R \tag{3.18}$$

Evidentemente, las funciones R y S son integrales de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, respectivamente. Nuestro propósito es escribir la integral de (3.15) en términos de estas funciones. El trabajo se simplifica usando en vez de ellas la pareja compleja conjugada w, w*, con $w = R + iS$; introduciendo estas últimas funciones en (3.15) y con ayuda de (3.16) y (3.18), se encuentra que existe una combinación lineal de (3.15a) y (3.15b) que toma la forma $\nabla\Phi = -\nabla V$, en donde Φ es una función complicada de w. Integrando esta expresión se obtiene $\Phi + V = 0$ (Φ contiene las constantes de integración); explícitamente,

$$2imD \frac{\partial w}{\partial t} = -2mD^2 \left|\nabla^2 w + (\nabla w)^2\right| + V \tag{3.19}$$

Resulta fácil linearizar esta ecuación; basta para ello hacer el cambio de variables

$$\Psi = e^{w} \quad . \tag{3.20}$$

Como de aquí se sigue que $\nabla^2\Psi = \Psi(\nabla^2 w + (\nabla w)^2)$, se encuentra que (3.19) se transforma en

$$2imD \frac{\partial\Psi}{\partial t} = -2mD^2 \nabla^2\Psi + V\Psi \tag{3.21}$$

que es lineal. El paso que nos conduce de (3.15) a (3.21) es trascendental desde el punto de vista matemático, pues mientras que (3.15) es un sistema de ecuaciones no-lineales acopladas y, por lo tanto, de muy difícil solución, (3.21) y su compleja conjugada son lineales y desacopladas, es decir, poseen la estructura matemática más simple a que podríamos aspirar. Sin embargo, sucede lo opuesto en lo que a la física se refiere, pues mientras que el sentido físico de las ecs. (3.15) es claro e inmediato, el sentido físico de (3.21) es muy obscuro e indirecto. -- Probablemente aquí nos encontramos con una de las razones de fondo de la confusión que ha caracterizado todo el proceso de interpretación de la MQ. Para completar la deducción de la ecuación de Schrödinger, basta - ahora introducir en (3.21) el valor $D = \frac{\hbar}{2m}$:

$$i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\Psi + V\Psi \qquad (3.22)$$

Además, de (3.17) y (3.20) sigue que

$$\rho = e^{2R} = e^{W+W^*} = \Psi^*\Psi \qquad (3.23)$$

resultado que justifica la interpretación de Ψ como amplitud de probabilidad.

Pero no sólo hemos reproducido la ecuación de Schrödinger con la interpretación de Ψ de Born, sino que hemos también preparado el camino que conduce al uso de operadores como $\hat{p}$, etc., en la MQ(*). Para ver esto[35,30], expresemos primero $\vec{v}$ y $\vec{u}$ en términos de Ψ y Ψ^*.

$$\vec{v} = 2D\nabla S = -iD\nabla \ln \frac{\Psi}{\Psi^*} = -iD\left(\frac{\nabla\Psi}{\Psi} - \frac{\nabla\Psi^*}{\Psi^*}\right) , \qquad (3.24a)$$

$$\vec{u} = 2D\nabla R = D\nabla \ln \Psi^*\Psi = D\left(\frac{\nabla\Psi}{\Psi} + \frac{\nabla\Psi^*}{\Psi^*}\right) \qquad (3.24b)$$

según sigue de $\Psi = e^{R+iS}$. Mediante una integración por partes vemos que

$$\langle\vec{v}\rangle = -iD \int [\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*]\, d^3x = -2iD \int \Psi^*\nabla\Psi d^3x = -\frac{i\hbar}{m} \int \Psi^*\nabla\Psi d^3x \;;$$

luego:

$$m\langle\vec{v}\rangle = -i\hbar \int \Psi^*\nabla\Psi d^3x \;, \qquad (3.25)$$

resultado que muestra que el impulso $\langle m\vec{v}\rangle$ asociado al flujo de partículas puede calcularse como el valor esperado del operador $\hat{p}$, definido - como es usual en MQ,

$$\hat{\vec{p}} = i\hbar\nabla. \qquad (3.26)$$

---

* Es posible obtener los mismos resultados en forma más general y elegante, partiendo directamente de la distribución Q en el espacio fase[38].

De los resultados anteriores sigue que

$$\langle\hat{\vec{p}}\rangle = m\langle\vec{v}\rangle = \langle\vec{p}\rangle \tag{3.27}$$

o sea, el valor esperado de $\hat{\vec{p}}$ nos da el promedio en el espacio fase del impulso $\vec{p}$. En forma análoga podemos ver que el valor medio de la energía cinética T está dado por

$$\langle T\rangle = \frac{1}{2} m \langle\vec{v}^2 + \vec{u}^2\rangle = \frac{1}{2m} \langle\hat{\vec{p}}^2\rangle . \tag{3.28}$$

La demostración de (3.28) es directa, aunque requiere algún trabajo. Es posible mostrar que en el límite cuántico (en el que se desprecian las correcciones a la ec. (3.14)), (3.28) coincide con el promedio de $\vec{p}^2/2m$ en el espacio fase, o sea,

$$\langle\hat{\vec{p}}^2\rangle = \langle\vec{p}^2\rangle \tag{3.29}$$

Multiplicando ahora (3.22) por Ψ^* e integrando, obtenemos en el límite cuántico:

$$\langle i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\rangle = \langle\frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + V\rangle = \langle\hat{H}\rangle = \langle\frac{\vec{p}^2}{2m} + V\rangle$$

en donde $\hat{H}$ es el operador hamiltoniano. Esto nos dice que cuando se alcanza el régimen cuántico, es decir, cuando σ y las correcciones radiactivas son despreciables, la energía media (promedio en el espacio fase) puede calcularse como el valor esperado del operador.

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tag{3.30}$$

Estos resultados muestran que podemos obtener el valor medio (en el espacio fase) de las variables dinámicas calculando valores esperados de operadores como $\vec{p}$, $\vec{p}^2$ etc., una vez que la aproximación cuántica es válida: tenemos aquí un ejemplo ilustrativo de la capacidad de cálculo que proporciona la combinación amplitud de probabilidad-operador lineal y una justificación de los métodos de la MQ.

3.5 *Las Desigualdades de Heisenberg*

Como el tema de las desigualdades de Heisenberg (no las llamamos ni relaciones de incertidumbre ni de indeterminación, como es usual, para no introducir subrepticiamente una interpretación específica del resultado formal) está frecuentemente saturado de misticismo y confusión, parece conveniente incluir aquí el punto de vista que proporciona la teoría estocástica al respecto. Lo primero que mostraremos es que las desigualdades de Heisenberg son resultado directo de la estocasticidad de las variables x y p (algo similar ocurre con el movimiento browniano y, por lo tanto, relaciones análogas existen en esta teoría; de hecho, la demostración que sigue se aplica también a este problema). Más en concreto, las relaciones de Heisenberg son un resultado directo de la fórmula (3.13) (usada ya por Einstein en 1905 en sus trabajos sobre movimiento browniano: las desigualdades de Heisenberg bien pudieron aparecer primero como desigualdades de Einstein aplicables a sistemas clásicos). Para demostrar esto, procedemos como sigue[9]. Sean A y B dos funciones reales de x, para las que existen las integrales requeridas, pero por lo demás arbitrarias; para α arbitraria pero real, deducimos de la desigualdad trivial $(A + \alpha B)^2 \geq 0$ que $\langle A^2\rangle \langle B^2\rangle \geq \langle AB\rangle^2$; para convencerse de esto basta tomar el valor medio de la primera desigualdad, desarrollar y seleccionar α para minimizar el resultado (es decir, tomar $\alpha = -\langle AB\rangle/\langle B^2\rangle$). Tomemos ahora $A = \Delta x \equiv x - \langle x\rangle$, $B = \Delta u \equiv u - \langle u\rangle = u$ (pues $\langle u\rangle = 0$ según sigue de la ecuación (3.24b)); tendremos entonces que

$$\langle AB\rangle = \langle (x - \langle x\rangle)\, u\rangle = \langle xu\rangle = D \int x \frac{\partial \rho}{\partial x}\, dx;$$

integrando por partes:

$$\langle AB\rangle = - D \int \rho\, dx = - D.$$

Substituyendo ahora en la desigualdad anterior queda:

$$\langle (\Delta x)^2\rangle \quad \langle (\Delta u)^2\rangle \geq D^2. \tag{3.31}$$

Esta es la forma en que la teoría estocástica da la desigualdad de Heisenberg; aquí no hay duda alguna respecto a su significado físico: D representa una cota inferior al producto de las dispersiones de x y u. La desigualdad usual de Heisenberg es una forma más débil de (3.31); para derivarla, procedemos como sigue. Vimos antes (ec. (3.28)) que

$$<\hat{p}^2> \;=\; m^2 <v^2 + u^2> \;.$$

El término $<v^2>$ contribuye a la dispersión de p debido a la dispersión de los valores iniciales de la velocidad; esta componente de dispersión es controlable por el experimentador y podemos llamarla "extrínseca", para diferenciarla de la dispersión contribuida por u que, teniendo como origen la acción estocástica del campo de fondo, no es (en la actualidad, al menos) controlable y posee, por lo tanto, carácter intrínseco. Sustituyendo, obtenemos:

$$<(\Delta x)^2> \; <(\Delta\hat{p})^2> \;\geq\; \frac{1}{4}\hbar^2 + m^2 <(\Delta x)^2> <(\Delta v)^2>.$$

De esta expresión sigue trivialmente el resultado usual:

$$<(\Delta x)^2> \quad <(\Delta\hat{p})^2> \;\geq\; \frac{1}{4}\;\hbar^2 \tag{3.32}$$

Vemos que sólo en ausencia de dispersión extrínseca la desigualdad de Heisenberg puede reducirse a una igualdad.

De resultados como (3.32) concluimos que la no conmutatividad de dos operadores cuánticos (como x y $\hat{p}$) es una indicación de la presencia de estocasticidad en el sistema. La teoría completa basada en la EDE permite demostrar que las desigualdades de Heisenberg pueden violarse para tiempos arbitrariamente cortos: su validez es meramente asintotica, cuando se ha establecido el equilibrio y se cumplen ya las leyes de la MQ usual.

Vemos así que, en efecto, la EDE nos puede ofrecer un camino alternativo a la MQ, proporcionándonos un método para generalizar esta teoría y, no menos importante, obtener para ella una interpretación definida, clara y objetiva; en particular, el formalismo de la MQ emergería como resultado de las hipótesis físicas que conforman la EDE, no la física como resultado del formalismo.

3.6 *Correcciones a la Ecuación de Schrödinger*

En la derivación de la ecuación de Schrödinger hemos omitido las correcciones que aparecen en la ec. (3.14). De haberlas incluido, habrían dado lugar a correcciones a la ecuación (3.22), cuyo efecto es fácil de interpretar: se trata de las correcciones radiactivas (en aproximación no relativista) que proporciona la electrodinámica cuántica al tomar en cuenta las fluctuaciones del vacío electromagnético. Vemos entonces que la EDE no sólo reproduce (en el límite asintótico) la MQ usual, sino que la extiende para incluir los efectos explícitos de la acción del campo de vacío, efectos que usalmente se consideran del dominio de la electrodinámica cuántica.

La EDE nos permite explicar el origen específico de las correcciones radiactivas: el decaimiento de los estados excitados, por ejemplo, se debe a la reacción de radiación[38]; el corrimiento Lamb atómico se debe a la modificación del campo del vacío producida por las propias partículas[23,38].

La conclusión es que la EDE abre las puertas a una interpretación física, coherente y objetiva, no de la MQ, sino de la teoría cuántica de materia y campo. Huelga insistir en que la EDE es todavía una teoría en construcción: varios problemas físicos y matemáticos importantes no han sido superados. En particular aún no ha sido posible determinar rigurosamente la validez de esta teoría para sistemas no lineales, problema esencial pues comprende a los sistemas atómicos. Por lo tanto la conclusión final respecto a los méritos de la EDE pertenece aún al futuro.

REFERENCIAS

1. T.A. Brody, R. Cid, J.L. Jiménez, D. Levi, J.R. Martínez, P. Pereyra, R. Rechtman, M. Rosales, Rev. Mex. Fís., 25 (1976) E31.
2. L. de la Peña y A.M. Cetto, Rev. Mex. Fís. 22 E43 (1973); 23 (1974) E39.
3. M. Jammer, The Conceptual Development of Quantum Mechanics, McGraw-Hill, N.Y. (1966). Este libro contiene una magnífica exposición del desarrollo conceptual de la interpretación ortodoxa de la MQ. Para las interpretaciones no ortodoxas, ver la referencia (6).
4. L.E. Ballentine, Rev. Mod. Phys. 42 (1970) 358.

5. M. Bunge, Am. J. Phys. 24 (1956) 272.
6. M. Jammer, The Philosophy of Quantum Mechanics, Wiley, N.W. (1974).
7. R. Furth, Zeitschrift f. Physik 81 (1933) 143.
8. E. Guth en Stochastic Process in Chemical Physics, K.E. Shuler, editor; Interscience, N.Y. (1969).
9. L. de la Peña-Auerbach y A.M. Cetto, Phys. Lett. 39A (1972) 65.
10. D. Bohm y J.P. Bigier, Phys. Rev. 96 (1954) 208.
11. L. de Brolgie, Found. Phys. 1 (1970) 1; C.R. Acad. Sc. B264 (1967) 1081.
12. D.I. Blokhintsev. Principes Essentiels de la Mécanique Quantique. Dunod, Paris, (1968).
13. A. Landé, New Foundations of Quantum Mechanics, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1965). Una presentación popular puede verse en Physics Today20 (1967) 55.
14. A.F. Kracklauer, Phys. Rev. D10 (1974) 1358.
J.G. Gilson, Proc. Cambridge Phil. Soc. 64 (1968) 1061.
15. D. Bohm, Phys. Rev. 85 (1952) 166; ibid 85 (1952) 180; Causality and Chance in Modern Physics, Van Nostrand 1957; existe traducción al español de este libro (UNAM).
16. N. Rosen, Nuovo Cim. 19B (1974) 90.
17. W. Weizel, Zeitschrift f. Physik 134 (1953) 264; 135 (1953) 270.
18. H.C. Dudley, Nuovo Cim 4B (1971) 68.
19. A. Einstein y O. Stern, Ann. Phys. 40 (1913) 551.
20. T.H. Boyer, Phys. Rev. D11 (1975) 790.
21. M.J. Renne, Physica 53 (1971) 193.
J. Mahanty, B.W. Ninham, J. Phys. A5 (1972) 1447.
22. T.H. Boyer, Phys. Rev. 174 (1968) 1631.
J. Mitchell, B.W. Ninham, P. Richmond, Am. J. Phys. 40 (1972) 674.
23. E.A. Power, AJP, 34 (1966) 516.
24. W. Heisenberg, The Physical Principles of the Quantum Theory, Dover, N.Y.
25. D.S. Onley, AJP, 41 (1973) 980.
26. R.O. Feynamn, R.B. Leighton y M. Sands, The Feynman Lectures on Physics Vol. II, sec. 28. Addison-Wesley 1964. J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, Wiley, N.Y. (1962).
27. H.B. Callen y T.A. Welton, Phys. Rev. 83 (1951) 34; R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan 12 (1957) 570.
28. R. Kubo Statistical Mechanics, North-Holland, Amsterdam (1965).
29. P. Braffort, M. Spighel, C. Tzara, C.R. Acad. Sc. 239 (1954) 157.
30. L. de la Peña, A. y A.M. Cetto, Rev. Mex. Fís. 18 (1969) 323.
A. Jáuregui, Tesis Profesional, Fac. de Ciencias, UNAM (1971).
31. D. Bohm y M. Weinstein, Phys. Rev. 74 (1948) 1789.
G.H. Goedecke, Phys. Rev. 135B (1964) 281.
32. P. Claverie y S. Diner, Ann. Fond. L. de Broglie 1 (1976) 73.
33. F. Reif, Statistical and Thermal Physics, McGraw-Hill (1965). Son clásicos los artículos: S. Chandrasekhar, Rev. Mod. Phys. 15 (1943) 1 y M.C. Wang y G.E. Uhlenbeck Rev. Mod. Phys. 17 (1945) 323, reproducidos ambos en Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, N. Was, editor, Dover, N.Y. (1954).
34. L. de la Peña-Auerback y A.M. Cetto, J. Math Phys. 18 (1977) 1612; Am. Fond. de Broglie 3 (1978) 15.
35. L. de la Peña-Auerbach, Phys. Lett. 27A (1968) 594; J. Math. Phys. 10 (1969) 1620.
36. L. de la Peña-Auerbach y A.M. Cetto, Found, Phys. 5 (1975) 355.

37. L.D. Landau y E.M. Lifshitz, Fluid Mechanics, Pergamon, London(1959).
38. L. de la Peña y A.M. Cetto Found. Phys. 8 (1978) 191.
39. E. Nelson, Phys. Rev. 150 (1966) 1079; Dynamical Theories of Brownian Motion, Princeton Univ. Press, Princeton,(1967).
40. L. de la Peña Auerbach, E. Braun y L.S. García-Colín, J. Math. Phys. 9 (1968) 668; L. de la Peña-Auerbach y L.S. García-Colín, J. Math. Phys. 9 (1968) 916.

BIBLIOGRAFIA

Esta bibliografía no pretende ser completa, pero sí representativa. - La clasificación por temas que se ofrece contiene elementos arbitrarios y refleja en alguna medida la exposición que antecede; en especial la separación entre modelos browninanos y mecánica cuántica estocástica debe interpretarse con alguna flexibilidad, pues el tema es tratado con gran confusión en la literatura.

MODELOS BROWNIANOS DE LA MQ

1. R. Fürth, Zeitschrift f. Physik 81 (1933) 143.
2. I. Fényes, Zeitschrift f. Physik 132 (1952) 81.
3. W. Weizel, Zeitschrift f. Physik 134 (1953) 261 ; 135 (1953) 270.
4. D. Kershaw, Phys. Rev. 136B (1964) 1850.
5. G.G. Comisar, Phys. Rev. 138B (1964) 1850.
6. J.C. Aron, Progr. Theor. Phys. 33 (1965) 726.
7. E. Nelson, Dynamical Theories of Brownian Motion, Princeton Univ. Press, Princeton (1967).
8. L.F. Favella, Ann. de l'Institut Henri Poincaré 7 (1967) 77.
9. L. de Broglie, C.R. Acad. Sc. B264 (1967) 1041 ; Found. of Phys. 1 (1970) 1.
10. L. de la Peña-Auerbach, Phys. Lett. 24A (1967) 603.
11. L. de la Peña-Auerbach, E. Braun y L.S. García Colín, Jour. Math. Phys. 9 (1968) 668.
12. L. de la Peña-Auerbach y L.S. García Colín, J. Math. Phys. 9 (1968)916; 9 (1968) 922; Rev. Mex. Fís. 16 (1967) 221.
13. E. Santos, Nuovo Cim. 59B (1969) 65.
14. E. Guth en Stochastic Processes in Chemical Physics, K.E. Shuler, editor; Interscience, N.Y., (1969).
15. Y.A. Rylov, Annalen der Physik 27 (1971) 1 ; Int. J. Theor. Phys. 8 (1973) 123.
16. J. Alonso, M.P. Nieto y E. Santos, Phys. Lett. 38A (1972) 501.
17. L. Bess, Progr. Theor. Phys. 49, (1973) 1889,
18. J. Fronteau y A. Tellez-Arenas, Il Nuovo Cim. 36B (1976) 80.
19. C. Harding, Found. Phys. 7 (1977) 69.

MECANICA CUANTICA ESTOCASTICA

1. E. Nelson, Phys. Rev. 150 (1966) 1079 ; ref. 7 de la sección anterior.
2. L. de la Peña, Phys. Lett. 27A (1968) 594.
3. L. de la Peña-Auerbach y A.M. Cetto, Rev. Mex. Fís. 17 (1968) 327 ; Phys. Lett. 29A (1969) 562 ; Rev. Mex. Fís. 18 (1969) 253 ; ibid 18 (1969) 323; ibid 19 (1970) 193 ; Phys. Rev. D3 (1971) 795 ; Rev. Mex. Fís. 20 (1971) 191 ; Phys. Lett. 39A (1972) 65 ; Found of Phys. 5 (1975) 355.
4. E. Santos, Nuovo Cim. 59B (1969) 65 ; An de Física 68 (1972) 137, artículo en Irreversibility in the Many-Body Problem, J. Biel y J. Rae, editores, Plenum, N.Y.
5. L. de la Peña-Auerbach, R.M. Velasco y A.M. Cetto, Rev. Mex. Fís. 18 (1969) 397.
6. T.G. Dankel, Archives Rat. Mech. & Analysis 37 (1970) 192.
7. J.E. Krizan, Phys. Rev. D3 (1971) 2333.
8. M. Berrondo, Nuovo Cim. 18B (1973) 95.
9. J. Alberio y R. Høegh-Krohn, J. Math. Phys. 15 (1974) 1745.
10. P. Claverie y S. Diner C.R. Acad. Sc. 277B (1973) 579 ; ibid, 280B (1975) 1.
11. A.M. Cetto y L. de la Peña, Rev. Méx. Fís. 24 (1975) 105.
12. E. Santos, AJP 44 (1976) 279.
13. K. Yasue, Phys. Letts 64B (1976) 239; J. Stat. Phys. 16 (1977) 113; Phys. Rev. 18D (1978) 532; J. Math. Phys. 19 (1978) 1892 ; Phys. Rev. Letts. 40 (1978) 665.
14. J. Fukai, Phys. Letts. 56A (1976) 9.
15. Bo-Sture K. Skagerstam, J. Math Phys. 18 (1977) 308.
16. R.E. Collins, Found. Phys. 7 (1977) 475 ; R.E. Collins y J.R. Fanchi, Il Nuovo Cim. 48A (1978) 314.
17. W.J. Lehr y J.L. Park, J. Math Phys. 18 (1977) 1235.
18. S.M. Moore, Lett. Nuovo Cim. 20 (1977) 676 ; Found. Phys. (en prensa, 1979).
19. Z. Haba y J. Lukierski, Il Nuovo Cimento. 41A (1977) 470.
20. M. Davidson, J. Math Phys. 19 (1978) 1975 ; Physica (en prensa, 1979); Letts, of Math. Phys. (en prensa, 1979).
21. G.C. Ghirardi, C. Omero, A. Rimini y T. Weber, Revista del Nuovo Cim. 1, no. 3, (1978) 1 (artículo de revisión).
22. D.L. Weaver, Phys. Rev. Letts, 40 (1978) 1473.

ELECTRODINAMICA ESTOCASTICA

1. N.S. Kalitsin, JETP (URSS) 25 (1953) 407.
2. E. Adirovich y M. Podgoretski, JETP (URSS) 26 (1954) 150.
3. P. Braffort, M. Spighel y C. Tzara, C.R. Acad. Sc. 239 (1954) 157.
4. P. Braffort y C. Tazara. C.R. Acad. Sc. 239 (1954) 1779.
5. A.A. Sokolov y V. Tumanov, JETP 3 (1957) 958 (Trad. Ingl.).
6. T.W. Marshall, Proc. Roy. Soc. A276 (1963) 475 ; Proc. Camb. Phil. Soc. 61, 537 (1965), Nuovo Cim. 38 (1965) 206..
7. P. Braffort, M. Surdin y A. Taroni, C.R. Acad. Sc. Paris, 261B (1965) 4339.
8. L.L. Henry y T.W. Marshall, Nuovo Cim. 41 (1966) 188.

9. M. Surdin, P. Braffort y A. Taroni, Nature 210 (1966) 405.
10. P. Braffort y A. Taroni, C.R. Acad. Sc. Paris, 264B (1967) 1947.
11. T.H. Boyer, Phys. Rev. 174 (1968) 1631 ; 174 (1968) 1764 ; 180 (1969) 19 ; 182 (1969) 1374 ; 185 (1969) 2039 ; 186 (1969) 1304 ; D1 (1970) 1526; D1 (1970) 2257 ; A5 (1972) 1799 ; A6 (1972) 314; A7 (1973) 1832; A9 (1974) 2078 ;*D11 (1975) 790 ; D11 (1975) 809; Ann. Phys. (N.Y.) 56 (1970) 474. La referencia contiene una revisión general del trabajo anterior de este autor.
12. T.W. Marshall, Isveztia VUZ, Fízica, 12 (1968) 34.
13. E. Santos, An. Real. Soc. Española Fis. y Quím. 64 (1968) 317.; Lett. Nuovo Cimento 4 (1972) 497; Nuovo Cimento 19B (1974) 57.
14. P. Braffort, C.R. Acad. Sc. Paris 270B (1970) 12.
15. M. Surdin, C.R. Acad. Sc. Paris. 270B (1970) 193 ; Int. J. Theor. Phys. 4 (1971) 117; Ann. Inst. Herin Poncaré 15 (1971) 203 ; Int. J. Theor. Phys. 8 (1973) 183; ibid, 9 (1974) 185; C.R. Acad. Sc. Paris. 278B (1974) 881; ibid, 280B (1975) 337 ; Int. J. Theor. Phys. 14 (1975) 207 ; Phys. Lett. 58A (1976) 370.
16. O. Theimer, Phys. Rev. D4 (1971) 1597.
17. L. de la Peña y A.M. Cetto, Nuovo Cimento 10B (1972) 592.
18. J. Mitchell, W. Ninham y P. Richmond, Am. J. Phys. 40 (1972) 674.
19. J. Mahanty y B.W. Ninham, J. Phys. A, 5 (1972) 1447.
20. O. Therimer y P.R. Peterson, Phys. Rev. D10 (1974) 3962.
21. L. de la Peña-Auerbach y A.M. Cetto, Phys. Lett. 47A (1974) 183. Anales Fís. 71 (1975) 329.
22. E. Santos, Nuovo Cim. 22B (1974) 201 ; J. Math. Phys. 15 (1974) 1954; Anales Fís. 71 (1975) 329.
23. E. Santos, Phys. Lett. 53A (1975) 432 ; en conexión con el tema discutido aquí ver también: L. de la Peña, A.M. Cetto y T.A. Brody, Lett. Nuovo Cim. 5 (1972) 177; M. Flato et al., Helv. Phys. Acta 48 (1975) 219.
24. T.H. Boyer, Phys. Rev. A11 (1975) 1650; D13 (1976) 2832 ; A18 (1978) 1228 ; A18 (1978) 1238 ; D (en prensa, 1979).
25. D. Theimer y P.R. Peterson, Lett. Nuovo Cim. 13 (1975) 279 ; Phys. Rev. D14 (1976) 656; Phys. Rev. A16 (1977) 2055.
26. A.F. Kracklauer, Phys. Rev. D14 (1976) 654.
27. O. Theimer, AJP 44 (1976) 183.
28. P. Claverie y S. Diner en Localization and Delocalization in Quantum Chemistry, O. Chalvet, R. Dandel, S. Diner y J.P. Malrieu, eds., Reidel, Dordrecht, 1976, vol. II. (pags. 395-448; 449-460; 461-464); Ann. Fond. L. de Broglie 1 (1976) 73.
29. P.W. Milonni, Phys. Reps. 25C (1976) 1. (sección 5) (artículo de revisión).
30. L. de la Peña y A.M. Cetto, J. Math. Phys. 18 (1977) 1612 ; Phys. Letts. 62A (1977) 389 ; An. Fond. de Broglie 3 (1978) 15 ; Found Phys. 8 (1978) 191.
31. S.M. Moore, Lett, Nuovo Cim. 20 (1977) 676 ; Found. Phys. 9 (1979) 237.
32. L. Pesquera y E. Santos, Lett. Nuovo Cim 20 (1977) 308.
33. L. de la Peña y A.M. Cetto, Int. J. Quantum Chem. XII, Suppl. 1 (1977) 23 ; J. Math. Phys. 20 (1979) 469.
34. P. Claverie y S. Diner, Int. J. Quantum Chem. XII, Suppl. 1 (1977) 41 ; "Some remarks about the Lax approximation in Stochasitc Electrodynamics", Technical Report (1977) (el primero de estos trabajos contiene una breve revisión de la EDE).
35. T.H. Boyer, A. Brief Survey of Stochastic Electrodynamics (preprint, 1979).