

## LINEAS DE BOMBEO NO ISOTERMICAS

L. del Castillo, E.R. Mayer, J.M. Siqueiros

Centro de Investigación de Materiales, UNAM

(recibido 24 de febrero, 1977)

### ABSTRACT

The general relations for the calculation of the conductance of pumping lines are presented, giving the criteria to be considered in order to differentiate the flux regions.

Based on such relations, a method of calculation for non isothermal pumping lines is established and the results are applied to the case where the pumped fluid is  $^3\text{He}$ , under the typical conditions of a  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  dilution refrigerator.

### I. INTRODUCCION

La reciente introducción de un proceso de obtención de muy bajas temperaturas, utilizando mezclas de  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ <sup>(1)</sup>, plantea, entre otros, el problema del bombeo de He desde lugares que se encuentran a temperaturas de décimas de grado Kelvin, hasta regiones a temperatura ambiente.

El gradiente de temperatura tan grande al que está sujeta la canalización, y la fuerte dependencia de las propiedades del He con la temperatura, ha obligado a reformular los métodos tradicionales de cálculo.

El objeto de este trabajo, es establecer un método práctico para el cálculo de una línea de bombeo no isotérmica utilizada en un refrigerador de dilución  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ .

### II. NOMENCLATURA

C	Conductancia
$C_\eta$	Conductancia en régimen viscoso
$C_m$	Conductancia en régimen molecular
$C_T$	Conductancia total
D	Diámetro de la canalización

He	Helio
$\eta$	Coefficiente de viscosidad
k	Constante de Boltzmann
L	Longitud de la canalización
$\lambda$	Camino libre medio
M	Masa molecular
$N_0$	Número de Avogadro
$\dot{n}$	Flujo molar
P	Presión
$\bar{P}$	Presión promedio
$P_a$	Presión de aspiración
$P_0$	Presión en el evaporador
Q	Flujo gaseoso
R	Constante de los gases
S(p)	Velocidad de bombeo a la presión P
$\sigma$	Diámetro de la molécula
T	Temperatura absoluta
$T_a$	Temperatura ambiente
$T_{ev}$	Temperatura del evaporador

### III. RELACIONES GENERALES

#### III.1

El estudio de flujos gaseosos en sistemas de vacío se trata de manera diferente, dependiendo de las condiciones de presión y temperatura del sistema.

A presiones para las cuales el camino libre medio de las moléculas es menor que una dimensión característica de la canalización, (ej. diámetro), las colisiones entre moléculas son mucho más frecuentes que los choques contra las paredes. Las propiedades del gas, (temperatura, densidad y velocidad de flujo), no varían apreciablemente en una distancia comparable al camino libre medio, y el gas puede considerarse como un medio continuo. Por lo tanto, el flujo puede ser descrito y analizado hidrodinámicamente y es llamado flujo viscoso.

Cuando la presión es tal que el camino libre medio es mayor que una dimensión característica de la canalización (ej. diámetro), el fenómeno

dominante será las colisiones de las moléculas con las paredes. El análisis del flujo consiste, en este caso, en determinar el efecto restrictivo de las paredes sobre el desplazamiento de las moléculas. A este tipo de flujo se le llama flujo molecular.

En la región de presiones en la que los dos fenómenos tienen una importancia comparable, el flujo se llama intermedio ó de Knudsen. No hay derivaciones generales de ecuaciones de flujo en este régimen y es necesario describir el flujo mediante ecuaciones empíricas.

Un criterio práctico<sup>(2)</sup> para distinguir las 3 regiones, es considerar el cociente entre el camino libre medio ( $\lambda$ ) (tomado a la presión promedio del sistema), y una dimensión característica ( $D$ ). A este cociente se le conoce como número de Knudsen.

El régimen será viscoso para  $\lambda < \frac{D}{100}$  y molecular cuando  $\lambda > \frac{D}{2}$ . Como es proporcional a la presión  $\lambda \propto \frac{kT}{\sqrt{2} \pi P \sigma^2}$ , se puede definir un criterio más conveniente que involucra la presión y el diámetro de la canalización<sup>(3)</sup>.

$\bar{P} D > 100A$  flujo viscoso,  $\bar{P} D < 2A$  flujo molecular

$$\text{donde } A = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi \sigma^2}$$

### III.2 Fórmula de Knudsen

Se define la conductancia de una canalización como el cociente entre el flujo gaseoso ( $Q$ ) y la caída de presión  $P$  entre los extremos de la canalización

$$C = \frac{Q}{\Delta P} \quad (1)$$

donde  $Q$  es el flujo en volumen a la presión de referencia (atmosférica o unidad según el caso).

Knudsen<sup>(4)</sup> obtuvo una relación empírica para la conductancia en cualquier régimen

$$C_T = C_\eta + C_m \left[ 1 + \sqrt{\frac{M}{RTN_0}} \frac{D\bar{P}}{\eta} \right] \cdot \left[ 1 + 1.24 \sqrt{\frac{M}{RTN_0}} \frac{D\bar{P}}{\eta} \right]^{-1} \quad (2)$$

En particular, para una geometría cilíndrica, se obtiene<sup>(5)</sup>:

$$C_{\eta} = \frac{\pi}{128} \frac{D^4 \bar{P}}{\eta L} \quad (3)$$

$$C_m = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{2\pi kT N_0 D^3}{M L}} \quad (4)$$

Como un ejemplo del empleo de esta fórmula, tomemos el caso del aire a 20°C, entonces:

$$C_T = \frac{D^3}{L} \left[ 182 \bar{D}\bar{P} + 1.21 \left( \frac{1 + 256 \bar{D}\bar{P}}{1 + 316 \bar{D}\bar{P}} \right) \right] 1/\text{seg.} \quad (5)$$

cuando  $\bar{D}\bar{P}$  es grande, (régimen viscoso),  $\frac{1 + 256 \bar{D}\bar{P}}{1 + 316 \bar{D}\bar{P}}$  tiende a un valor constante, (0,81) y en este caso la contribución del régimen molecular a la conductancia es despreciable comparado con la del término viscoso. La relación se reduce entonces a la ecuación de Poiseuille.

$$C = \frac{182 D^4 \bar{P}}{L} \quad (6)$$

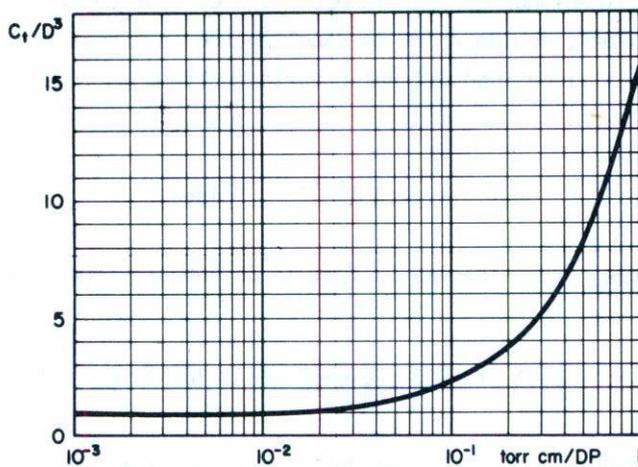
En régimen molecular, ( $\bar{D}\bar{P}$  pequeño), el término viscoso es despreciable y  $\frac{1 + 256 \bar{D}\bar{P}}{1 + 316 \bar{D}\bar{P}}$  tiende a la unidad, entonces:

$$C = \frac{12.1 D^3}{L} \quad (7)$$

La gráfica 1 muestra la variación de la conductancia total en función del parámetro  $\bar{D}\bar{P}$ .

#### IV. CASO DEL $^3\text{He}$

En un aparato de dilución  $^3\text{He}/\text{He}^4$  la potencia frigorífica depende directamente del flujo molar de  $^3\text{He}$ <sup>(6)</sup>. Estas partículas generadas en el evaporador tienen que ser removidas a través de una canalización cuyo extremo inferior se encuentra a la temperatura y presión del evaporador (Figura 1), mientras el extremo superior está conectado a la bomba de circulación a temperatura ambiente y presión de aspiración  $P_a$ .



Gráfica 1. Variación de la conductancia total en función de  $\bar{D}F$ .

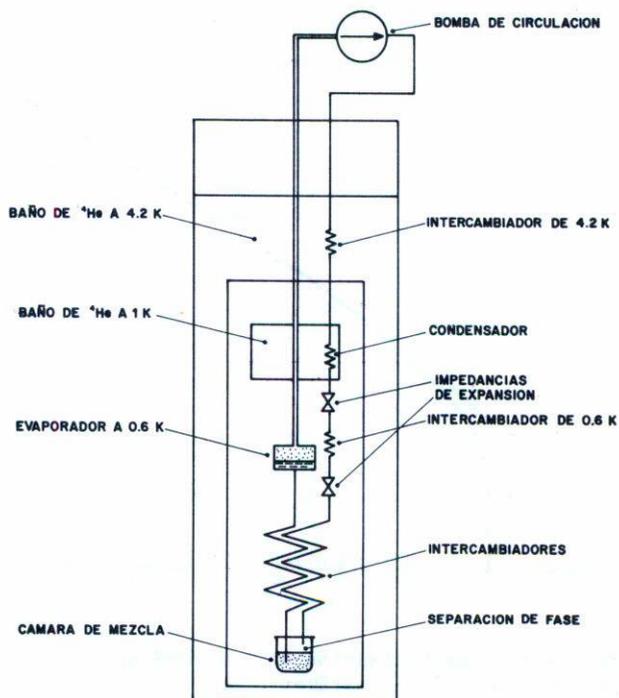


Fig. 1. Diagrama esquemático de un refrigerador de dilución.

Las aproximaciones que se hicieron para el caso del aire, aquí no se justifican mas, debido a que la canalización está sujeta a un gradiente térmico y la viscosidad del helio varía fuertemente con la temperatura<sup>(7,8)</sup>.

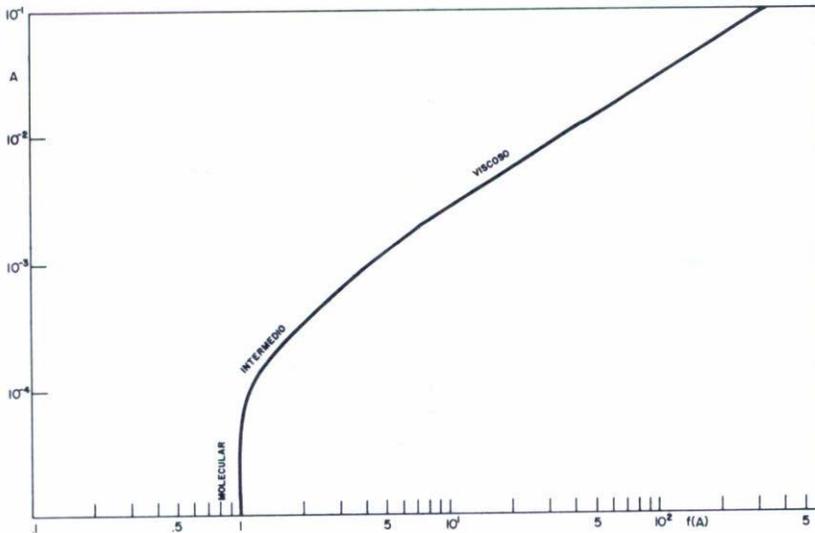
$$\eta_{\text{He}} = 4,2 T^{0.647} \mu\text{Pois.}$$

Bajo estas circunstancias la fórmula de Knudsen toma la forma:

$$C = \left( 5.8A + 2.2 \left( \frac{1 + 45 A}{1 + 56 A} \right) \right) \times 10^3 \sqrt{T} \frac{D^3}{L} \text{ c.g.s. (8)}$$

La gráfica 2 muestra la variación de la cantidad dentro del paréntesis que llamaremos  $f(A)$  contra  $A$ .

$$C = f(A) \sqrt{T} \frac{D^3}{L} \times 10^3 \text{ c.g.s. (9)}$$



Gráfica 2. Caracterización de los regímenes de flujo en función del parámetro  $A$ .

En esta gráfica se pueden distinguir 3 regiones según el valor de A. Para  $A < 5 \times 10^{-5}$ ,  $f(A)$  tiene un valor aproximadamente igual a 1; el régimen es molecular y la conductancia puede calcularse con muy buena aproximación mediante la relación:

$$C_m = 2.2 \times 10^3 \frac{\sqrt{T} D^3}{L} \quad \text{c.g.s. (10)}$$

Para valores de  $A > 5 \times 10^{-3}$  el régimen es viscoso, la variación de  $f(A)$  con A es lineal y la conductancia se puede calcular a partir de la relación:

$$C = f(A) \frac{\sqrt{T} D^3}{L} \quad \text{c.g.s. (11)}$$

Al considerar una línea de bombeo no isotérmica, como en el caso de un refrigerador de dilución  $^3\text{He}/\text{He}^4$ , la única cantidad práctica que se mantiene constante es el flujo molar  $\dot{n}$ , ( $Q = \dot{n} RT$ ). En el modelo que se utiliza para su estudio, se dividió el circuito en varios elementos isotérmicos. Esta división es artificial, pues, en ciertos elementos, la temperatura varía de una manera continua, sin embargo, el desconocimiento del gradiente de temperatura del gas nos impone este método.

Consideremos la configuración presentada en la Figura 2. Llamemos  $C(T_i)$  a la conductancia del elemento que se encuentra a la temperatura  $T_i$ ; el flujo gaseoso será:

$$Q_i = (P_{i-1} - P_i) C(T_i) \quad (12)$$

que para régimen viscoso toma la forma:

$$\dot{n} = K(T) (P_{i-1}^2 - P_i^2) \quad \mu\text{mol/seg.} \quad (13)$$

donde:

$$K(\eta) = 1.75 \times 10^3 \frac{D^4}{RLT^{1.647}} \quad (14)$$

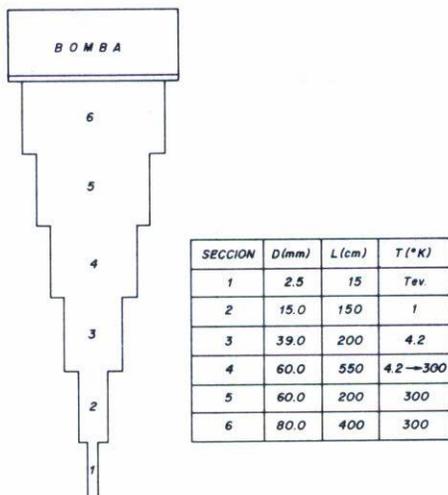


Fig. 2. División en elementos isotérmicos de la canalización con sus dimensiones respectivas.

y para régimen molecular:

$$\dot{n} = K_m (T) (P_{i-1} - P_i) \quad \mu\text{mol/seg.} \quad (15)$$

donde:

$$K_m (T) = \frac{C_m}{RT_i} = \frac{2.2 \times 10^3 D^3}{RT_i^{0.5} L}$$

La pérdida total de carga del sistema es por lo tanto:

$$P_0 - P_a = \dot{n} \sum_i \frac{R T_i}{C (T_i)} \quad (16)$$

donde  $P_0$  y  $P_a$  son las presiones en cada extremo de la canalización.

#### V. METODO DE CALCULO

El método de cálculo consiste en obtener una expresión para el flu-

jo molar en función de la temperatura y presión del evaporador y de la temperatura y presión de aspiración de la bomba de circulación. A partir de este resultado, se calcula la velocidad de bombeo necesaria para ese flujo mediante la relación:

$$S (P_a) = \frac{R T_a}{P_a} \dot{n} \quad (17)$$

Si caracterizamos nuestro sistema de bombeo por las dimensiones y temperaturas presentadas en la Figura 2, se obtiene una expresión para  $\dot{n}$  en función de  $P_o$  y  $P_a$  y  $K(\text{Tev})$ , dada por:

$$\dot{n} = \frac{1}{2} \left( 8.6 P_a + \frac{18.87}{K(\text{Tev})} + 2.08 + \frac{1}{2} \left[ 8.6 P_a + \frac{18.87}{K(\text{Tev})} + 2.08 \right]^2 + 75.48(P_a^2 - P_o^2) \right)^{1/2}$$

$$\text{donde: } K(\text{Tev}) = 35.16 \frac{D_o^4}{\text{Tev}^{1.647} L_o} \quad (18)$$

sustituyendo este resultado en la relación (17) se tendrá la forma explícita para la velocidad de bombeo.

## VI. GEOMETRIA Y RESULTADOS

La Tabla 1 muestra los valores de  $K(\text{Tev})$  para diferentes temperaturas y presiones de equilibrio en el evaporador<sup>(9)</sup>, típica en un refrigerador de dilución  $^3\text{He}/\text{He}^4$ .

TABLA 1

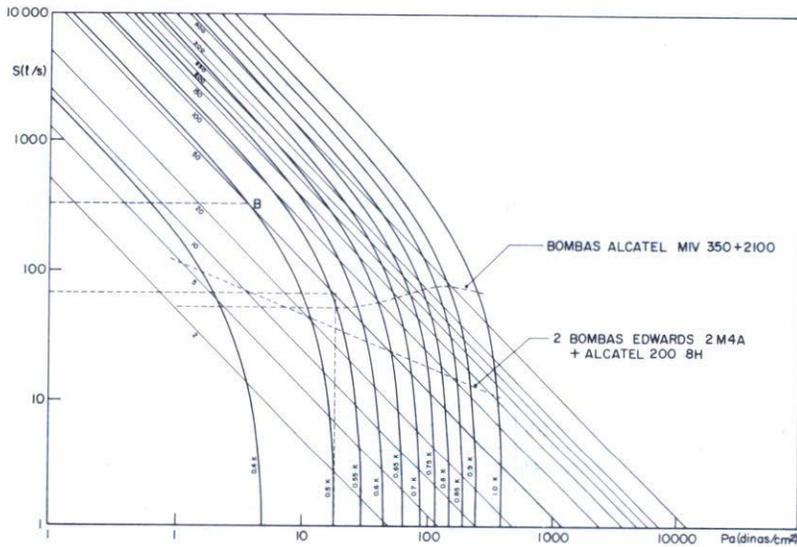
Tev (*K)	0.40	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	1.00
K (Tev)	0.414	0.287	0.245	0.212	0.186	0.165	0.147	0.132	0.120	0.109	0.09
$P_e$ din/cm <sup>2</sup>	5.05	18.24	30.69	45.59	64.99	88.10	117.45	152.06	197.74	253.0	400

Los resultados del cálculo se resumen en la Gráfica 3, que muestra la velocidad de bombeo  $S (P_a)$ , requerida para obtener un flujo molar  $\dot{n}$ , en función de la presión de aspiración, para diferentes temperaturas del evaporador.

A título de ejemplo se han sobrepuesto las características de una bomba primaria y de una bomba de difusión que pueden ser utilizadas en un refrigerador de este estilo.

### Utilización de la Gráfica

Para una temperatura de evaporador dada ( $T_{ev}$ ), si la pérdida de car-



Gráfica 3. Caída de presión en el sistema de bombeo.

ga fuera nula, y para una presión de evaporador  $P_0$  conocida, la determinación de la velocidad de bombeo se hace de la siguiente manera: En el punto  $P_0$  se traza una perpendicular al eje de las presiones hasta que corte la línea de flujo deseado, (Punto A), la ordenada correspondiente determina la velocidad de bombeo necesaria.

Si la pérdida de carga no es nula, ésta estará representada por las líneas curvas y el método a seguir en este caso es el siguiente: A partir de la temperatura deseada, se sigue la curva correspondiente hasta que ésta corte la línea que representa el flujo que nos interesa, (Punto B), la ordenada correspondiente determina la velocidad de bombeo necesaria. Es evidente que para ciertos casos no existe solución.

## VII. CONCLUSION

En el cálculo de la canalización de bombeo de un refrigerador de dilución  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ , resulta muy conveniente dividir dicha canalización en secciones consideradas como isotérmicas. De hecho, esta suposición es muy cercana a la situación real, excepto por la sección de tubo que va de la temperatura del helio líquido (4.2°K) a la temperatura ambiente, para la cual se toma una temperatura promedio.

Se aplicó este método de cálculo al refrigerador de dilución  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  actualmente en construcción en el Centro de Investigación de Materiales.

## REFERENCIAS

1. H. Londos, G.R. Clarke, E. Mendoza. Phys. Rev. 128, (1962), 1992.
2. J. Delafosse, G. Mongodin. Les Calculs de la Technique du Vide. Edité par la Soc. Française des Ingenieurs et Techniciens du Vide, (1961) p. 32.
3. J. Delafosse, G. Mongodin. Les Calculs de la Technique du Vide. Edité par la Soc. Française des Ingenieurs et Techniciens du Vide. (1961) p. 37.
4. Dushman S. Scientific Foundation of Vacuum Technique. J. Wiley (1966).
5. J. Delafosse, G. Mongodin Les Calculs de la Technique du Vide, Edite par la Soc. Française des Ingenieurs et Techniciens du Vide. (1961) p. 35.
6. American Journal of Physics. Vol. 36 No. 3 (1968) 198.
7. Vel Ker E.W., Misenta R., Zeit Physik. Bd 140 (1955) 535.
8. De Boer J., Cohen E.G.D., Physica XVII No. 11 (1951) 12.
9. Wheatley, J.C., Cryogenic Engineering Conf. University of California, June 1969.