

MOVIMIENTO DE PARTICULAS CARGADAS EN CAMPOS CUADRUPOLEAR ELECTRICO Y MAGNETICO UNIFORME

E. Ley-Koo[†]

Instituto de Física
Universidad Nacional Autónoma de México
Apdo. Postal 20-364, México 20, D.F.

Araceli Góngora T.*

Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México
(recibido 18 de abril, 1980)

ABSTRACT

The confinement of charged particles in a Penning trap is based on the combined action of quadrupole electric and uniform magnetic fields on the charges. The study of the motion of charges in such fields is developed as an interesting example in the teaching and learning of Mechanics at different levels.

RESUMEN

El confinamiento de partículas cargadas en una trampa de Penning está basado en la acción combinada de los campos cuadrupolar eléctrico

[†] Trabajo realizado con apoyo parcial del Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares.

* Estudiante asociado del Instituto de Física, UNAM.

y magnético uniforme sobre las cargas. El estudio del movimiento de las cargas en dichos campos se desarrolla como un ejemplo interesante en la enseñanza y el aprendizaje de la Mecánica a diferentes niveles.

I. INTRODUCCION

Una trampa de Penning es un dispositivo formado por electrodos de forma de hiperboloides de revolución coaxiales y coasintóticos, como se muestra en la Figura 1. La operación de la trampa de mantener confinadas en su interior a partículas cargadas se logra al aplicar a los electrodos extremos un voltaje con la misma polaridad que las cargas y al electrodo anular un voltaje con la polaridad opuesta, al mismo tiempo que actúa un campo magnético uniforme paralelo al eje de la trampa. El estudio del movimiento de las cargas bajo la acción separada y combinada de los campos eléctrico y magnético permite entender cómo se logra el efecto de confinamiento. En el presente trabajo este estudio se desarrolla a diferentes niveles de conocimientos de Mecánica poniendo énfasis en algunos puntos de interés didáctico.

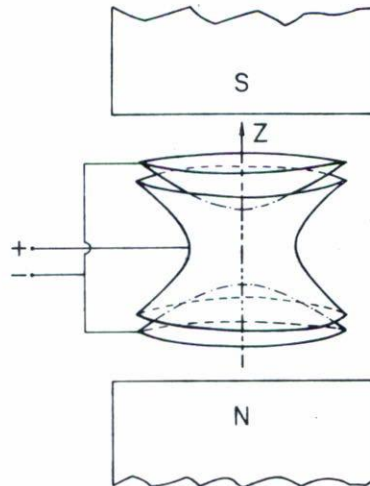


Fig. 1. Trampa de Penning con electrodos en forma de hiperboloides de revolución coaxiales y coasintóticos, situada entre los polos paralelos de un imán.

En la Sección II el problema se analiza cualitativamente tomando como puntos de partida y de comparación los movimientos de las cargas en cada uno de los campos por separado; a continuación se puede establecer la posibilidad de confinamiento de las cargas por el efecto combinado de ambos campos. La Sección III cubre los mismos puntos de la sección anterior pero en forma cuantitativa planteando e integrando las ecuaciones de Newton correspondientes; en esta forma se reconocen las componentes y frecuencias de movimiento axiales, ciclotrónicas, ciclotrónicas desplazadas, y magnetrónicas. En la Sección IV se desarrollan las formulaciones Lagrangiana y Hamiltoniana del problema, las cuales sirven de puente para el estudio cuántico que se hace en la Sección V. Para concluir, en la Sección VI se señalan y discuten algunos puntos tratados en las diferentes secciones que pueden ser de interés especial para profesores y/o estudiantes a diferentes niveles.

II. ANALISIS CUALITATIVO

En esta sección se analiza cualitativamente el movimiento de las cargas bajo la acción del campo eléctrico y del campo magnético, primero cuando cada uno de éstos actúa por sí mismo, y a continuación cuando ambos actúan simultáneamente.

Para fijar ideas en lo que sigue supondremos que las partículas cargadas de interés son electrones cuya carga es negativa, $-e$. Correspondientemente, los electrodos extremos tendrán polaridad negativa y el electrodo anular tendrá polaridad positiva.

A. *Movimiento de un Electrón en el Campo Eléctrico*

La situación más simple que se puede analizar es aquella en que el electrón se encuentra en reposo en el centro de la trampa, la cuál es una situación de equilibrio. Efectivamente, en este caso la fuerza neta sobre el electrón es nula como resultado de las cancelaciones de las fuerzas de repulsión que actúan sobre el electrón y que se originan en puntos diametralmente opuestos en los electrodos extremos, por una

parte, y de las cancelaciones de las fuerzas de atracción que actúan sobre el electrón y que se originan en puntos diametralmente opuestos en el electrodo anular, por la otra. Tratándose de una situación de equilibrio, si el electrón está inicialmente en reposo, entonces continuará en reposo en esa posición.

A continuación consideremos la situación en que el electrón se encuentra inicialmente en reposo en alguna posición diferente del centro de la trampa. Es conveniente analizar en forma sucesiva el caso en que esa posición está sobre el eje de la trampa y el caso en que esa posición está sobre el plano ecuatorial.

Cuando el electrón está desplazado del centro a lo largo del eje de la trampa, la fuerza neta sobre el mismo actúa en la dirección del eje y hacia el centro de la trampa. Para convencernos de esta afirmación, podemos imaginar a los electrodos como formados por una sucesión de anillos circulares paralelos entre sí y con sus centros sobre el eje. Si consideramos la fuerza neta de uno de estos anillos sobre el electrón, es fácil ver que su componente perpendicular al eje es nula debido a la cancelación de las componentes que se originan en puntos diametralmente opuestos en el anillo; por otra parte, todas las componentes a lo largo del eje tienen el mismo sentido y se suman aritméticamente para dar la fuerza neta. Habiendo establecido que la fuerza neta de cada anillo actúa a lo largo del eje, se sigue que la fuerza neta total de los electrodos sobre el electrón actúa también a lo largo del eje, quedando por determinar su sentido. Es fácil entender que la repulsión del electrodo extremo más próximo al electrón domina sobre la repulsión del otro electrodo, y por lo tanto el efecto combinado de ambos electrodos extremos es el de empujar al electrón hacia el centro de la trampa. Por lo que se refiere al electrodo anular, se ve que hay una fracción que atrae al electrón hacia el centro y otra que lo atrae tratando de alejarlo del centro, siendo aquella mayor que ésta. En esta forma las características de la fuerza que ejerce la trampa sobre el electrón, y que se enuncian al principio de este párrafo, quedan establecidas. También se puede afirmar que la magnitud de esa fuerza será mayor mientras el electrón esté más alejado del centro, y por lo tanto más cerca de uno de los electrodos extremos, debido al

aumento de los efectos combinados de los electrodos extremos y anular sobre el electrón. Ahora bien, si el electrón está inicialmente en reposo en una de esas posiciones a lo largo del eje de la trampa, entonces la fuerza de restitución que se acaba de describir lo obligará a moverse a lo largo del eje y hacia el centro. A medida que el electrón se acerca al centro la magnitud de su velocidad aumenta, y la magnitud de la fuerza que actúa sobre él disminuye. Cuando el electrón llega al centro, la fuerza neta sobre él es nula y su velocidad ha alcanzado su magnitud máxima, su inercia lo mantiene moviéndose en la dirección y sentido que llevaba y por lo tanto empieza a alejarse del centro y acercarse al electrodo extremo opuesto. Ahora la fuerza apunta en el sentido opuesto, que sigue siendo hacia el centro, y su magnitud aumenta a medida que el electrón se aleja del centro; correspondientemente, su velocidad de alejamiento se va reduciendo en magnitud hasta anularse. Esto ocurrirá, si no hay fricción, cuando el electrón se haya alejado del centro una distancia igual a la que se encontraba inicialmente. A partir de esta posición, el movimiento del electrón se realiza de manera análoga pero en sentido opuesto hasta regresar a la posición original. Lo anterior se repite periódica y sucesivamente, es decir, el electrón está sujeto a un movimiento oscilatorio a lo largo del eje, siendo el centro la posición de equilibrio estable.

Cuando se considera que el electrón está desplazado del centro de la trampa en el plano ecuatorial, es fácil ver que quedará sujeto a una fuerza radial que tiende a alejarlo del eje de la trampa. Efectivamente, la fuerza neta calculada como la suma de las fuerzas producidas por partes de anillos de los electrodos equidistantes del plano ecuatorial, tiene una componente nula en la dirección del eje de la trampa. Por otra parte, para cada anillo los pares de puntos equidistantes de la dirección radial, definida por el centro y la posición del electrón, cancelan sus efectos transversales a la dirección radial y refuerzan sus efectos en la dirección radial; el efecto neto de cada anillo sobre el electrón está dominado por los puntos más cercanos al electrón. Para el electrodo anular es claro que la atracción de la región más cercana al electrón constituye el efecto dominante. Para los electrodos extremos, la repulsión de los anillos más cercanos al plano ecuatorial, cuyos radios son menores que la dis-

tancia del electrón al centro, también tiende a aumentar el alejamiento radial del electrón; la repulsión de los anillos más lejanos al plano ecuatorial, cuyos radios son mayores que la distancia del electrón al centro, trata de mantener al electrón cerca del centro. Para la trampa total el efecto combinado del electrodo anular y de la región más cercana de los electrodos extremos domina sobre el de la región más lejana de los electrodos extremos y el electrón tiende a ser alejado radialmente del centro de la trampa. La magnitud de la fuerza es mayor mientras mayor es la distancia del electrón al centro. En consecuencia si el electrón está inicialmente en reposo en una posición desplazada del centro y sobre el plano ecuatorial, la fuerza que ejerce la trampa sobre él le imprime un movimiento radial con velocidad creciente hasta que choque con el electrodo anular donde será absorbido. Si el electrón está inicialmente en el centro de la trampa y se le desplaza ligeramente en cualquier dirección radial, lo anterior nos indica que el electrón no regresará a su posición original; en otras palabras, el centro de la trampa es una posición de equilibrio inestable por lo que se refiere al movimiento en el plano ecuatorial.

Como conclusión de este análisis del movimiento del electrón bajo la acción de los electrodos, podemos afirmar que la trampa es capaz de producir confinamiento del electrón en la dirección del eje, pero no en el plano transversal al eje.

B. Movimiento de un Electrón en el Campo Magnético

La descripción del movimiento de cargas bajo la acción de un campo magnético uniforme se encuentra usualmente en libros de texto, pero para que nuestra discusión sea completa presentamos aquí nuestra versión.

En primer lugar es conveniente señalar que ese tipo de campo se tiene entre los polos planos de un imán, o bien en el interior de un solenoide recto. A continuación hay que reconocer que la fuerza que ejerce el campo sobre una carga en movimiento actúa en la dirección perpendicular al plano determinado por la dirección de la velocidad de la carga y la dirección del campo, y su sentido es el sentido en que

avanzaría un tornillo a mano derecha que se hiciera girar de la posición del vector de velocidad a la posición del vector de campo, en caso de que la carga sea positiva, y en sentido opuesto en caso de que la carga sea negativa, Fig. 2. Además la magnitud de la fuerza es proporcional a la magnitud de la carga, el campo magnético y la componente de la velocidad perpendicular al campo magnético.

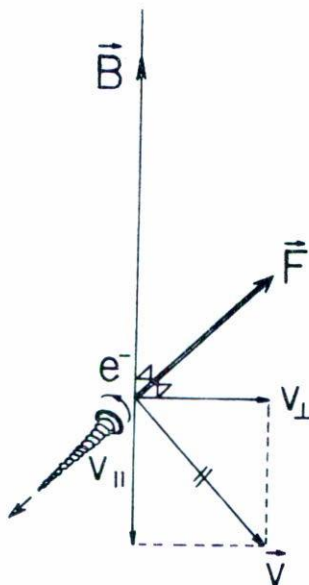


Fig. 2. Fuerza sobre una partícula cargada que se mueve en un campo magnético uniforme.

Consideremos entonces el movimiento de un electrón bajo la acción de un campo magnético uniforme. Si el electrón está inicialmente en reposo o con movimiento en la dirección del campo, la fuerza del campo sobre el electrón es nula y el electrón continuará en reposo o con movimiento rectilíneo uniforme en la dirección del campo, respectivamente. El campo ejerce una fuerza sobre el electrón solamente si éste posee una componente de velocidad perpendicular al campo. Supongamos entonces que la velocidad inicial del electrón es perpendicular al campo, entonces la fuerza que actúa sobre el electrón es perpendicular tanto al campo como a la velocidad, y la aceleración que produce

también es perpendicular a ambos vectores. Tal aceleración produce un cambio en la dirección del vector de velocidad, pero no en su magnitud; el nuevo vector de velocidad tiene la misma magnitud que la velocidad inicial y sigue siendo perpendicular al campo. Correspondientemente, la fuerza y la aceleración que siente el electrón tiene las mismas magnitudes iniciales y sólo cambian de dirección, siguiendo y manteniendo el cambio de dirección del vector de velocidad. Todo esto se traduce en un movimiento circular uniforme del electrón en un plano perpendicular al campo magnético. En el caso general de que el electrón tenga inicialmente una velocidad con componentes longitudinal y transversal con respecto al campo magnético, la composición de los dos movimientos, rectilíneo uniforme y circular uniforme, da una trayectoria a lo largo de una hélice circular.

Lo anterior, nos permite comprender que un campo magnético uniforme es capaz de producir confinamiento en el movimiento transversal del electrón, pero no en la dirección del campo mismo.

C. Movimiento de un Electrón Bajo la Acción Combinada de los Campos Eléctrico y Magnético

Ahora estudiaremos el efecto combinado del campo eléctrico de los electrodos y del campo magnético uniforme en la dirección del eje de la trampa sobre el electrón. Para esto resulta útil analizar separadamente los componentes axiales y transversales del movimiento.

Por lo que se refiere a la componente axial o longitudinal, el electrón siente una fuerza en esta dirección solamente por la acción del campo eléctrico, pero no por la presencia del campo magnético. En consecuencia, el movimiento del electrón en la dirección del eje de la trampa será de tipo oscilatorio a uno y otro lado del plano ecuatorial, y está gobernado básicamente por la repulsión que ejercen los electrodos extremos.

En cuanto al movimiento transversal, ya hemos visto que el efecto neto de los electrodos sobre el electrón es el de la atracción por parte del electrodo anular alejándolo del eje de la trampa, mientras que el

campo magnético trata de confinar al electrón en una trayectoria circular. La posibilidad de confinamiento del electrón dentro de la trampa depende de la competencia de estas dos tendencias. Para un campo eléctrico dado, la primera tendencia dominará mientras el campo magnético sea demasiado débil. Pero si el campo magnético se hace más fuerte su efecto puede contrarrestar e incluso dominar a la tendencia del electrodo anular de absorber al electrón. Entonces, el electrón quedará confinado en la vecindad del eje de la trampa, aunque en general su trayectoria no será tan simple como un círculo, puesto que quedará determinada por la acción combinada de ambos campos.

La conclusión general de esta sección es que la acción combinada del campo eléctrico de la trampa y del campo magnético uniforme sobre el electrón permite mantener confinado a éste dentro del volumen de la trampa. El confinamiento longitudinal se debe al campo eléctrico solamente, principalmente por la repulsión de los electrodos extremos. Y el confinamiento transversal depende de la predominancia del efecto del campo magnético sobre la atracción del electrodo anular.

III. ECUACIONES DE MOVIMIENTO

En esta Sección se estudian cuantitativamente los mismos problemas analizados en la Sección II, dando las expresiones para las fuerzas asociadas a cada tipo de campo e integrando las ecuaciones de movimiento correspondientes.

A. Campo Cuadrupolar Eléctrico

El potencial electrostático en el volumen de la trampa está dado por

$$V(x,y,z) = \frac{V_0}{R_a^2 + 2z_e^2} (x^2 + y^2 - 2z^2) \quad (1)$$

donde R_a es el radio mínimo del electrodo anular, $2z_e$ es la distancia mínima entre los electrodos extremos, y V_0 es la diferencia de potencial entre el electrodo anular y los electrodos extremos.

La intensidad del campo eléctrico correspondiente es

$$\vec{E}(x,y,z) = -\nabla V = \frac{-2V_0}{R_a^2 + 2z_e^2} (\hat{i}x + \hat{j}y - 2\hat{k}z) \quad (2)$$

y por lo tanto, la fuerza que siente el electrón dentro de la trampa es

$$\vec{F} = -e\vec{E} = \frac{2eV_0}{R_a^2 + 2z_e^2} (\hat{i}x + \hat{j}y - 2\hat{k}z). \quad (3)$$

Es interesante ver que las situaciones descritas en la Sección II.A. se reproducen de inmediato usando la Ec. (3). En efecto, para el centro de la trampa,

$$\vec{F}(0,0,0) = 0 \quad (3a)$$

y reconocemos que es una posición de equilibrio. Para un punto sobre el eje,

$$\vec{F}(0,0,z) = -\frac{4eV_0}{R_a^2 + 2z_e^2} \hat{k}z \quad (3b)$$

que es una fuerza de restitución armónica. Para un punto sobre el plano ecuatorial,

$$\vec{F}(x,y,0) = \frac{2eV_0}{R_a^2 + 2z_e^2} (\hat{i}x + \hat{j}y) \quad (3c)$$

que es una fuerza radial que tiende a alejar al electrón del centro. También se concluye de estos valores y signos de las fuerzas que el centro es un punto silla, es decir, de equilibrio estable para el movimiento axial y de equilibrio inestable para el movimiento transversal. Esto último también se puede apreciar de la expresión para la energía del electrón,

$$U(x,y,z) = -eV = \frac{eV_0}{R_a^2 + 2z_e^2} (-x^2 - y^2 + 2z^2), \quad (4)$$

la cuál tiene un mínimo en el origen para desplazamientos axiales y

tiene un máximo en el origen para desplazamientos transversales, Fig. 3.

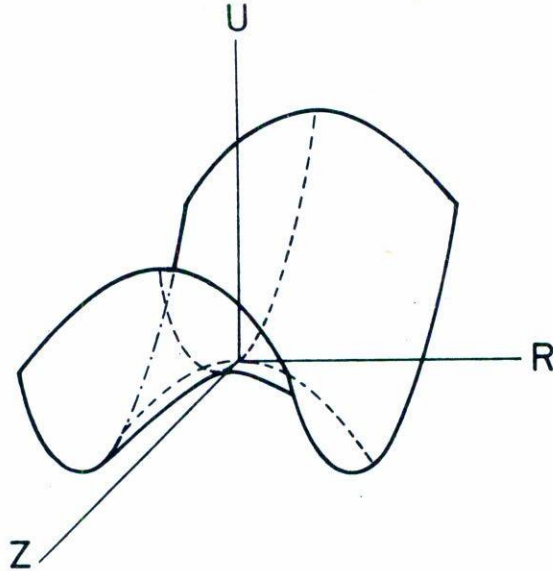


Fig. 3. Superficie equipotencial para un electrón en la trampa de Penning, cuyo centro es un punto silla.

La segunda ley de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, se puede escribir en este caso en términos de las componentes cartesianas y toma la forma

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{2eV_0}{R_a^2 + 2z_e^2} x \quad (5a)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{2eV_0}{R_a^2 + 2z_e^2} y \quad (5b)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{4eV_0}{R_a^2 + 2z_e^2} z \quad (5c)$$

La última ecuación sugiere introducir la llamada frecuencia axial ω_z , tal que

$$\omega_z^2 = \frac{4eV_0}{m(R_a^2 + 2z_e^2)} \quad (6)$$

y que es la frecuencia de oscilación para el movimiento armónico simple

en la dirección del eje. La integración de las Ecs. (5a,b,c) es inmediata y da

$$x = x_0 \cosh \frac{\omega_z t}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\omega_z} V_{x0} \sinh \frac{\omega_z t}{\sqrt{2}} \quad (7a)$$

$$y = y_0 \cosh \frac{\omega_z t}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\omega_z} V_{y0} \sinh \frac{\omega_z t}{\sqrt{2}} \quad (7b)$$

$$z = z_0 \cos \omega_z t + \frac{V_{z0}}{\omega_z} \sin \omega_z t \quad (7c)$$

en términos de las posiciones y velocidades iniciales, (x_0, y_0, z_0) y (V_{x0}, V_{y0}, V_{z0}) . Obviamente, estas ecuaciones incluyen las situaciones descritas en la Sección II.A. y reflejan la capacidad de la trampa para producir confinamiento en la dirección del eje como se vé del movimiento armónico simple de la Ec. (7c), pero no en la dirección radial como lo muestra el movimiento creciente de las Ecs. (7a,b).

B. Campo Magnético Uniforme

El campo magnético uniforme en la dirección del eje, $\vec{B} = \hat{k}B$, ejerce sobre el electrón una fuerza

$$\vec{F} = -\frac{e}{c} \vec{V} \times \vec{B} \quad (8)$$

Naturalmente, esta fuerza es nula tanto si el electrón está en reposo como si su velocidad es paralela al campo, y en ambos casos el campo no modifica ese estado de reposo o movimiento.

En el caso general, la segunda ley de Newton toma la forma

$$m \frac{dV_x}{dt} = -\frac{e}{c} V_y B \quad (9a)$$

$$m \frac{dV_y}{dt} = \frac{e}{c} V_x B \quad (9b)$$

$$m \frac{dV_z}{dt} = 0 \quad (9c)$$

Es conveniente reconocer la llamada frecuencia ciclotrónica,

$$\omega_c = \frac{eB}{mc} . \quad (10)$$

Es posible integrar las Ecs. (9a,b) conjuntamente, sumando a la primera el producto de la segunda por la unidad imaginaria,

$$\frac{d}{dt} (V_x + iV_y) = i\omega_c (V_x + iV_y) .$$

Entonces

$$(V_x + iV_y) = (V_x + iV_y)_0 e^{i\omega_c t}$$

y

$$(x + iy) = (x + iy)_0 e^{i\omega_c t}$$

donde

$$V_{x0} = -\omega_c y_0 \quad y \quad V_{y0} = \omega_c x_0 .$$

Igualando partes reales e imaginarias en la ecuación para la posición obtenemos finalmente

$$x = x_0 \cos \omega_c t - y_0 \operatorname{sen} \omega_c t \quad (11a)$$

$$y = x_0 \operatorname{sen} \omega_c t + y_0 \cos \omega_c t \quad (11b)$$

Es inmediato verificar que $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2 = R_0^2$ o sea que la proyección de la trayectoria en el plano xy es un círculo de radio R_0 descrito con una velocidad angular ω_c .

La ecuación (8c) nos indica la independencia del movimiento longitudinal con respecto al campo,

$$V_z = V_{z0} \quad , \quad z = z_0 + V_{z0} t . \quad (11c)$$

Las Ecs. (11a,b,c) en conjunto describen la trayectoria helicoidal, y reflejan la capacidad del campo magnético para confinar al electrón transversalmente, pero no longitudinalmente.

C. Campos Cuadrupolar Eléctrico y Magnético Uniforme

La combinación de las fuerzas eléctrica Ec. (3) y magnética Ec. (8), en la segunda ley de Newton nos permite escribir

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\omega_z^2}{2} x - \omega_c \frac{dy}{dt} \quad (12a)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\omega_z^2}{2} y + \omega_c \frac{dx}{dt} \quad (12b)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega_z^2 z \quad (12c)$$

La Ec. (12c) es idéntica a la Ec. (5c) y por lo tanto su integración nos lleva nuevamente a la solución de la Ec. (7c). Esto corresponde a que el movimiento longitudinal sigue siendo independiente del campo magnético y el confinamiento en esa dirección está completamente a cargo del campo eléctrico.

La integración de las Ecs. (12a,b) se puede llevar a cabo usando un método análogo al empleado para las Ecs. (9a,b), formando la combinación lineal,

$$\frac{d^2}{dt^2} (x + iy) = \frac{\omega_z^2}{2} (x + iy) + i\omega_c \frac{d}{dt} (x + iy).$$

Si se propone una solución de la forma

$$(x + iy) = (x + iy)_0 e^{i\Omega t} \quad (13a)$$

se encuentra por substitución en la ecuación diferencial que

$$-\Omega^2 = \frac{\omega_z^2}{2} - \omega_c \Omega.$$

Por lo tanto,

$$\Omega_{\pm} = \frac{1}{2} \left[\omega_c \pm \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2} \right].$$

La frecuencia con el signo positivo se llama frecuencia ciclotrónica desplazada y la que tiene el signo negativo se llama frecuencia magne-

trónica, y quedan expresadas como

$$\Omega_+ \equiv \omega_c' = \omega_c - \frac{1}{2} \left[\omega_c - \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2} \right] = \omega_c - \omega_m \quad (14a)$$

$$\Omega_- \equiv \omega_m = \frac{1}{2} \left[\omega_c - \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2} \right]. \quad (14b)$$

Estas frecuencias son reales siempre y cuando $\omega_c^2 > 2\omega_z^2$, lo cuál corresponde a que la fuerza magnética domina sobre la fuerza eléctrica,

$$\left(\frac{eB}{mc} \right)^2 > \frac{8eV_0}{m(R_a^2 + 2z_e^2)} \quad (15)$$

como sigue de las Ecs. (10) y (6).

La solución general de las Ecs. 12(a,b) es una superposición de las soluciones del tipo de la Ec. (13a) para ambas frecuencias ciclotrónica desplazada y magnetrónica, es decir,

$$(x + iy) = (x + iy)_1 e^{i\omega_c' t} + (x + iy)_2 e^{i\omega_m t} \quad (13b)$$

Si se cumple la condición (15) y por lo tanto ω_c' y ω_m son cantidades reales, entonces la solución de la Ec. (13b) corresponde al confinamiento del electrón en trayectorias que son epitrocoides y que resultan de la superposición de dos movimientos circulares, uno con un radio $R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ descrito con la velocidad angular ω_c' y otro con un radio $R_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ descrito con la velocidad angular ω_m . La Fig. 4 ilustra unas de estas trayectorias.

Sí se separan las partes reales e imaginarias de la Ec. (13b) se obtienen las ecuaciones paramétricas de la epitrocoide,

$$x = x_1 \cos \omega_c' t + x_2 \cos \omega_m t - y_1 \sin \omega_c' t - y_2 \sin \omega_m t \quad (13c)$$

$$y = x_1 \sin \omega_c' t + x_2 \sin \omega_m t + y_1 \cos \omega_c' t + y_2 \cos \omega_m t \quad (13d)$$

En caso de que la condición (15) no se cumpla, entonces ω_c' y ω_m son can-

tidades complejas, conjugada la una de la otra, y la Ec. (13b) muestra que el electrón tenderá a alejarse con rapidez creciente del eje de la trampa hasta golpear eventualmente al electrodo anular. Esto corresponde a la situación en que el efecto del campo magnético no es suficiente para contrarrestar la atracción del electrodo anular sobre el electrón.

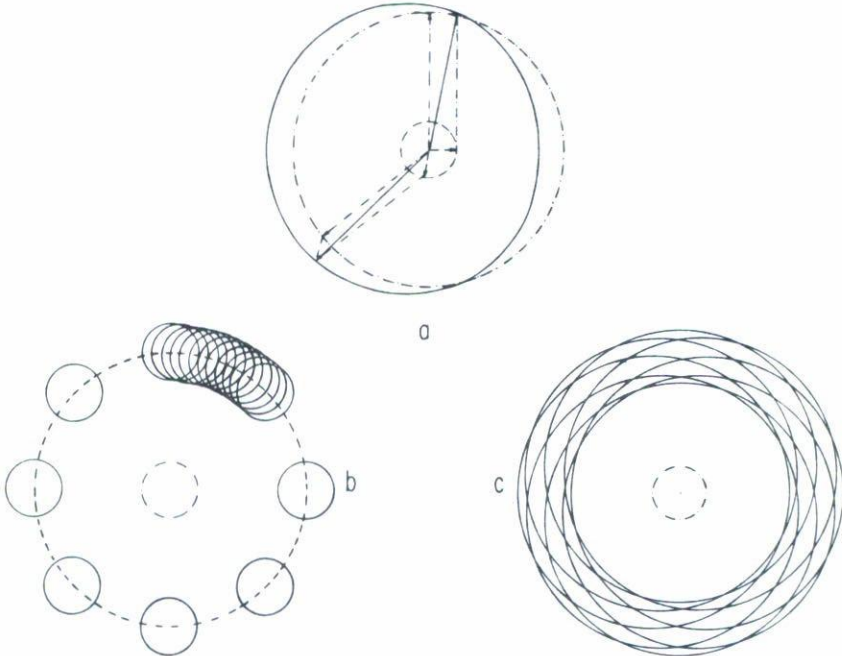


Fig. 4. Trayectorias epitrocoidales para un electrón en la trampa de Penning. a) $\omega_c^* = 2\omega_m$ y $R_2 = 5R_1$, b) $\omega_c^* \gg \omega_m$ y $R_2 = 5R_1$, c) $\omega_c^* \gg \omega_m$ y $R_1 = 5R_2$.

En conclusión, hemos establecido cuantitativamente la posibilidad de confinar un electrón dentro del volumen de la trampa siempre y cuando el campo magnético sea suficientemente fuerte para satisfacer la condición (15). El confinamiento longitudinal se debe exclusivamente al campo eléctrico y el movimiento en esa dirección es armónico simple a la frecuencia axial, ω_z dada por la Ec. (6). El confinamiento transversal se debe a la predominancia de la fuerza magnética sobre la eléctrica y

la proyección del movimiento sobre el plano xy se realiza a lo largo de epitrocoides descritas con velocidades angulares iguales a las frecuencias ciclotrónica desplazada ω'_c y magnetrónica ω_m , Ecs. (14a,b), respectivamente.

IV. FORMULACIONES CLASICAS ALTERNATIVAS

A. Formulaci3n Lagrangiana

Para construir la funci3n Lagrangiana dada por la diferencia entre las funciones de energa cin3tica y de energa potencial,

$$L = T - U \quad (16a)$$

procederemos a escribir cada uno de estos t3rminos.

Usamos las coordenadas cartesianas (x,y,z) como coordenadas generalizadas y sus derivadas con respecto al tiempo $(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ como las velocidades generalizadas. La energa cin3tica toma la forma

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) . \quad (16b)$$

Para la energa potencial ya tenemos la contribuci3n el3ctrica de la Ec. (4) y nos falta la contribuci3n magn3tica, la cual se puede escribir sucesivamente en t3rminos del potencial magn3tico \vec{A} , y de su forma expl3cita para el campo magn3tico uniforme, como

$$\begin{aligned} U_{\text{mag}} &= + \frac{e}{c} \vec{V} \cdot \vec{A} = \frac{e}{2c} \vec{V} \cdot (\vec{B} \times \vec{r}) = - \frac{e}{2c} (\vec{V} \times \vec{r}) \cdot \vec{B} \\ &= - \frac{eB}{2c} (\dot{x}y - \dot{y}x) . \end{aligned} \quad (16c)$$

Entonces al substituir las contribuciones de las Ecs. (16b), (4) y (16c) en la Ec. (16a) obtenemos

$$\begin{aligned} L(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eV_0}{R_a^2 + 2z^2} (x^2 + y^2 - 2z^2) + \frac{eB}{2c} (\dot{x}y - \dot{y}x) \\ &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{m\omega_z^2}{4} (x^2 + y^2 - 2z^2) + \frac{m\omega_c}{2} (\dot{x}y - \dot{y}x), \end{aligned} \quad (16d)$$

donde en la última línea hacemos uso de las Ecs. (6) y (10) para poner todo en términos de las frecuencias axil y magnetrónica.

De la Ec. (16d) se pueden obtener directamente las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 ,$$

y es inmediato reconocer que coinciden con las Ecs. (12a,b,c).

B. Formulación Hamiltoniana

La función Hamiltoniana se puede contruir a partir de la función Lagrangiana mediante la transformación de Legendre

$$H(x_i, p_i) = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i p_i - L(x_i, \dot{x}_i) , \quad (17a)$$

donde p_i son los momentos generalizados canónicamente conjugados de las coordenadas x_i y dados por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} .$$

Explícitamente ,

$$p_x = m\dot{x} + \frac{1}{2} m\omega_c y \quad (18a)$$

$$p_y = m\dot{y} - \frac{1}{2} m\omega_c x \quad (18b)$$

$$p_z = m\dot{z} . \quad (18c)$$

Substituyendo los valores de \dot{x}_i obtenidos de estas ecuaciones en la Ec. (16d) y a su vez en la Ec. (17a) obtenemos,

$$\begin{aligned} H(x_i, p_i) &= \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{8} m\omega_c^2 (x^2 + y^2) \\ &+ \frac{1}{4} m\omega_c^2 (-x^2 - y^2 + 2z^2) + \frac{1}{2} \omega_c (xp_y - yp_x) . \end{aligned} \quad (17b)$$

Las ecuaciones canónicas de Hamilton

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

se pueden contruir a partir de la Ec. (17b). Las tres primeras son equivalentes a las Ecs. (18a,b,c), y las tres últimas toman la forma explícita,

$$\dot{p}_x = -\frac{1}{4} m\omega_c^2 x + \frac{1}{2} m\omega_z^2 x - \frac{1}{2} \omega_c p_y \quad (19a)$$

$$\dot{p}_y = -\frac{1}{4} m\omega_c^2 y + \frac{1}{2} m\omega_z^2 y + \frac{1}{2} \omega_c p_x \quad (19b)$$

$$\dot{p}_z = -m\omega_z^2 z, \quad (19c)$$

las cuáles es fácil verificar que a su vez son también equivalentes a las Ecs. (12a,b,c).

V. FORMULACION CUANTICA

A. La Ecuación de Schrödinger

Las formulaciones clásicas discutidas en la Sección IV se han incluido para poder establecer la formulación cuántica del problema, la cual abordamos a continuación. Efectivamente, la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, que es la base para describir los estados estacionarios del sistema,

$$\hat{H}\Psi = E\Psi \quad (20)$$

corresponde matemáticamente a la ecuación de eigenvalores para el operador hamiltoniano, \hat{H} . Este operador se puede contruir a partir de la función Hamiltoniana clásica, Eq. (17b), reemplazando las cantidades dinámicas por los operadores correspondientes; específicamente para el operador de momento $\hat{p} \rightarrow -i\hbar\nabla$ y para la componente z del momento angu-

lar $\hat{\ell}_z = x\hat{p}_y - y\hat{p}_x$. Introduciendo coordenadas cilíndricas circulares (R, ϕ, z) , la Ec. (17b) nos permite escribir el operador hamiltoniano como

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} \omega_c \hat{\ell}_z + \frac{1}{8} m(\omega_c^2 - 2\omega_z^2)R^2 + \frac{1}{2} m\omega_z^2 z^2 \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} R \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\hat{\ell}_z^2}{2mR^2} + \frac{1}{2} \omega_c \hat{\ell}_z + \frac{1}{8} m(\omega_c^2 - 2\omega_z^2)R^2 \\ &\quad - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{2} m\omega_z^2 z^2 . \end{aligned} \quad (17c)$$

La ecuación de Schrödinger Ec. (20), es entonces una ecuación diferencial parcial, y la estructura del operador hamiltoniano Ec. (17c), nos permite ver que es susceptible de ser resuelta por el método de separación de variables. Efectivamente, toda la dependencia en la variable z está contenida en los dos últimos términos, los cuales inclusive se pueden identificar con la contribución del movimiento longitudinal al hamiltoniano, \hat{H}_z , con su parte de energía cinética y su parte de energía potencial, respectivamente. Por otra parte, toda la dependencia con respecto al ángulo ϕ está contenida en los términos segundo y tercero a través del operador $\hat{\ell}_z = -i\hbar \partial/\partial\phi$, y que físicamente corresponden a la energía cinética rotacional y a la energía de interacción del momento magnético orbital del electrón con el campo magnético, respectivamente. En efecto, es fácil reconocer que mR^2 es el momento de inercia del electrón en su movimiento de rotación y que $-\omega_c \hat{\ell}_z/2B = -e\hat{\ell}_z/2mc$ es la componente del momento magnético orbital del electrón a lo largo del campo magnético. Cuando la dependencia de $\hat{\ell}_z$ se reemplaza por los eigenvalores correspondientes, los términos primero, segundo y cuarto contienen toda la dependencia con respecto a la variable R .

Entonces podemos proponer la solución factorizable,

$$\Psi(R, \phi, z) = f(R) \Phi(\phi) Z(z) \quad (21)$$

que al ser sustituida junto con la Ec. (17c) en la Ec. (20) nos conduce a las ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\hat{H}_z Z = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{2} m\omega_z^2 z^2 \right] Z = E_L Z \quad (20a)$$

$$\hat{L}_z \phi = -i\hbar \frac{d}{d\phi} \phi = \mu\hbar\phi \quad (20b)$$

$$\hat{H}_R f = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{R} \frac{d}{dR} R \frac{d}{dR} + \frac{\hbar^2 \mu^2}{2mR^2} + \frac{m}{8} (\omega_C^2 - 2\omega_z^2) R^2 \right] f = E_T f \quad (20c)$$

donde las constantes de separación se deben sumar para dar el eigenvalor de la energía,

$$E = E_T + \frac{1}{2} \hbar\omega_C \mu + E_L \quad (20d)$$

Es claro que los operadores involucrados en las Ecs. (20a,b,c) conmutan con el operador hamiltoniano total, Ec. (17c), y ésta es otra manera de establecer la separabilidad de la Ec. (20) así como reconocer que las energías asociadas a las componentes longitudinal, rotacional y transversal del movimiento son también constantes del movimiento.

Aquí no se lleva a cabo la solución detallada de las Ecs. (20a,b,c), puesto que la misma se encuentra en los libros de texto de Mecánica Cuántica. Simplemente citaremos la forma y el contenido físico de cada una de ellas y las restricciones sobre sus eigenvalores. La Ec. (20b) corresponde a la cuantización de la componente longitudinal del momento angular orbital, y sus eigenfunciones y eigenvalores son

$$\begin{aligned} \phi(\phi) &= e^{i\mu\phi}/\sqrt{2\pi} \\ \mu &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (22b)$$

El movimiento longitudinal descrito por la Ec. (20a) corresponde a un oscilador armónico en una dimensión con la frecuencia axial ω_z . Las eigenfunciones correspondientes contienen un factor exponencial gaussiano y un polinomio de Hermite, y los eigenvalores están igualmente espaciados,

$$Z(z) = N_L e^{-m\omega_z z^2/2\hbar} H_k \left(\sqrt{\frac{m\omega_z}{\hbar}} z \right) \quad (22a)$$

$$E_L = \hbar\omega_z \left(k + \frac{1}{2} \right)$$

siendo $k = 0, 1, 2, \dots$ el número de nodos de la función de onda axial. El movimiento transversal descrito por la Ec. (20c) corresponde también a un oscilador armónico, pero en un plano y siempre y cuando se cumpla la condición (15), en cuyo caso su frecuencia es $\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}/2$. Sus eigenfunciones contienen como factor a los polinomios de Laguerre, sus eigenvalores también están igualmente espaciados, y ambos dependen del estado rotacional

$$f(R) = N_T R^{|\mu|} e^{-m\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2} R^2/4\hbar} L_{q+|\mu|}^{|\mu|} \left(\frac{m\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}}{2\hbar} R^2 \right) \quad (22c)$$

$$E_T = \frac{\hbar\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}}{2} (2q + |\mu| + 1)$$

siendo $q = 0, 1, 2, \dots$ el grado de polinomio.

En términos de las frecuencias ciclotrónica desplazada y magnetrónica, Ecs. (14a,b), la suma de las energías transversal y de interacción magnética, es decir los dos primeros términos de la Ec. (20d), se puede escribir en la forma

$$E_T + \frac{1}{2} \hbar\omega_c \mu = \hbar \left[\frac{\omega_c' - \omega_m}{2} \right] (2q + |\mu| + 1) + \frac{1}{2} \hbar (\omega_c' + \omega_m) \mu$$

$$= \hbar \left[\omega_c' \left(q + \frac{|\mu| + \mu}{2} + \frac{1}{2} \right) - \omega_m \left(q + \frac{|\mu| - \mu}{2} + \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$= \hbar \left[\omega_c' \left(n + \frac{1}{2} \right) - \omega_m \left(p + \frac{1}{2} \right) \right],$$

donde $n = q + \frac{|\mu| + \mu}{2} = 0, 1, 2, \dots$ y $p = q + \frac{|\mu| - \mu}{2} = n - \mu = 0, 1, 2, \dots$

se llaman números cuánticos ciclotrónico y magnetrónico, respectivamente.

Entonces la energía total del sistema, Ec. (20d), toma la forma

$$E_{npk} = \hbar \left[\omega_c' \left(n + \frac{1}{2} \right) - \omega_m \left(p + \frac{1}{2} \right) + \omega_z \left(k + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (22d)$$

mostrando las contribuciones ciclotrónica, magnetrónica y longitudinal.

B. Energía debida al Momento Magnético Intrínseco del Electrón

Se sabe que el electrón posee un momento angular intrínseco o espín y también un momento dipolar magnético intrínseco $\vec{\mu}_s$, los cuales están relacionados entre sí,

$$\vec{\mu}_s = -g_e \frac{e}{2mc} \vec{s} \quad (23)$$

siendo $g_e = 2.002319$ la llamada razón giromagnética del electrón. Debido a su momento magnético, el electrón en presencia del campo magnético tiene la energía adicional,

$$U_{\text{mag}} = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B} = +g_e \frac{eB}{2mc} s_z \quad (24a)$$

Este término tendría que agregarse como operador al hamiltoniano de la Ec. (17c), y tomarse en cuenta en la solución de la Ec. (20). Esto se puede hacer fácil y directamente debido a que el operador de espín conmuta con todos los operadores espaciales de la Ec. (17c). Además, el operador \hat{s}_z tiene dos eigenestados con eigenvalores $m_s \hbar$ donde $m_s = \pm \frac{1}{2}$, correspondientes a las dos proyecciones posibles del espín. De la Ec. (24a) conviene reconocer la frecuencia de precesión de espín,

$$\omega_s = g_e \frac{eB}{2mc} = \frac{g_e}{2} \omega_c \quad (24b)$$

y su relación con la frecuencia ciclotrónica, la cuál es costumbre expresar en términos de la llamada anomalía magnética,

$$a_e \equiv \frac{g_e - 2}{2} = \frac{\omega_s - \omega_c}{\omega_c} \quad (24c)$$

Al tomar en cuenta al espín del electrón la función de onda de la Ec. (21) se tiene que modificar agregando un factor que sea el eigenestado de la proyección del espín. También a la Ec. (22d) hay que agregarle la energía correspondiente,

$$E_{m_s} = \hbar \omega_s m_s ,$$

obtenida a partir de las Ecs. (24a,b). La energía total es entonces

$$E_{npkm_s} = \hbar \left[\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) - \omega_m \left(p + \frac{1}{2} \right) + \omega_z \left(k + \frac{1}{2} \right) + \omega_s m_s \right] . \quad (24d)$$

La Fig.5 ilustra los niveles más bajos de este espectro de energías.

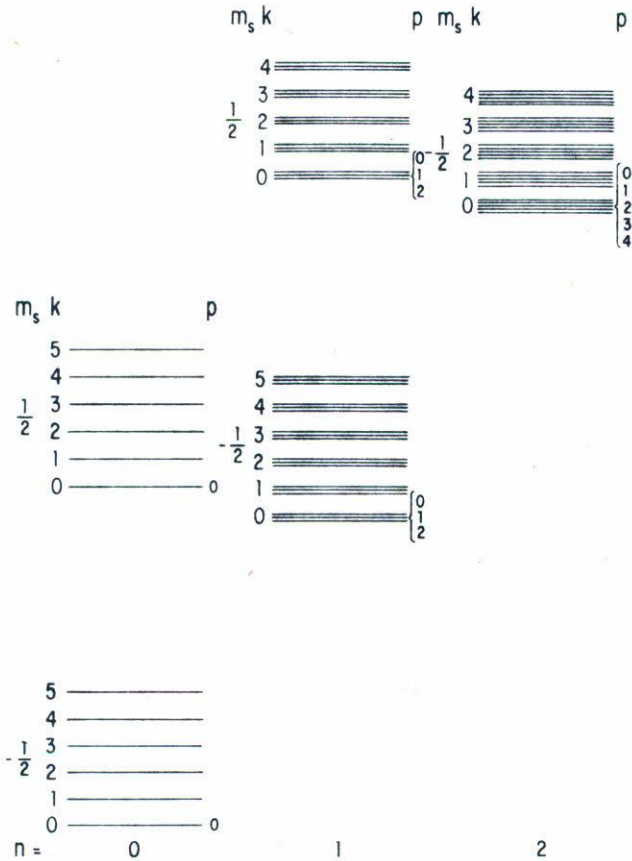


Fig. 5. Espectro de niveles de energía del Geonio.

VI. OBSERVACIONES DE INTERES DIDACTICO

Como se señaló al principio, el problema bajo consideración se ha analizado a diferentes niveles en el presente trabajo. Para facilitar la lectura y comprensión del material de acuerdo con el nivel en que esté interesado el lector, se puede decir que la Sección II corresponde al nivel elemental (bachillerato o primer año de profesional), la Sección III al nivel intermedio (segundo o tercero de profesional) y las Secciones IV y V al nivel avanzado (fines de profesional o iniciación de postgrado).

Por lo que se refiere a la Sección II, en la Parte A está implícita una familiaridad con el hecho de que "cargas del mismo signo se repelen y cargas de signos opuestos se atraen". El análisis de las tres situaciones específicas que se consideraron, es decir del electrón en el centro, sobre el eje y sobre el plano ecuatorial, depende de la determinación de la fuerza neta que ejerce la trampa sobre el electrón y por lo tanto involucra la composición de fuerzas. Naturalmente, el análisis se simplifica al aprovechar las simetrías del sistema para convencernos de que una o varias componentes de las fuerzas se cancelan entre sí. Cuando el electrón está en el centro, lo importante es la simetría del sistema bajo inversión en el centro mismo; cuando está sobre el eje, existe simetría de rotación alrededor del eje; y cuando está sobre el plano ecuatorial existe simetría de reflexión con respecto a este plano y también con respecto al plano determinado por el eje y la posición del electrón. Las respectivas situaciones de reposo, de movimiento oscilatorio y de movimiento crecientemente acelerado son fáciles de visualizar con base a un entendimiento cualitativo de las leyes de Newton, y también están asociadas directa y respectivamente con las ideas de equilibrio, equilibrio estable y equilibrio inestable. La parte B tiene el interés especial de involucrar una fuerza independiente de la posición pero dependiente de la velocidad, además de que su dirección y sentido es perpendicular tanto a la velocidad como al campo. Aquí se aplican los conocimientos sobre movimiento circular uniforme y también sobre la composición de movimientos. En la Parte C es el uso tanto de la compo-

sición de fuerzas como de la composición de movimientos lo que finalmente permite comprender el confinamiento del electrón dentro de la trampa. Al lector interesado que no quede convencido de algunos de los resultados leídos en la Sección II se le invita a convencerse por sí mismo dibujando los diagramas asociados a la descripción correspondiente.

Aunque el tratamiento de la Sección III es esencialmente cuantitativo, las situaciones estudiadas coinciden con las de la Sección II, y es importante tener un entendimiento cualitativo de los resultados para poder entender los resultados cuantitativos correspondientes. La conexión entre ambos se ha tratado de destacar en cada caso en el desarrollo de la Sección III. Aquí solo agregaremos algunos puntos de interés adicional. En la Parte A es inmediato verificar que el potencial de la Ec. (1) satisface la ecuación de Laplace, así como escribir las ecuaciones para las superficies equipotenciales incluidos los electrodos. También se pueden trazar las líneas de campo eléctrico, tener una idea de la densidad de carga superficial en los diferentes puntos de los electrodos, y entender el confinamiento axial y la imposibilidad de confinamiento transversal. En la Parte B, una forma alternativa de ver las ecuaciones de movimiento Ecs. (9a,b) y su solución es en la forma vectorial

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega}_c \times \vec{v} \quad , \quad \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\omega}_c \times \vec{R}$$

donde los vectores de posición, velocidad y velocidad angular forman una tríada ortogonal característica del movimiento circular uniforme. Correspondientemente a la Parte C, las Ecs. (12a,b) son equivalentes a

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \frac{\omega_z^2}{2} \vec{R} + \vec{\omega}_c \times \frac{d\vec{R}}{dt}$$

mostrando el efecto transversal anticonfinante del campo eléctrico y confinante del campo magnético. La epitrocoide queda descrita mediante la combinación de los dos movimientos circulares uniformes ciclotrónico desplazado y magnetrónico,

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\omega}_c \times \vec{R}_1 + \vec{\omega}_m \times \vec{R}_2 .$$

El lector interesado puede comparar las diferentes formas de estas soluciones y también construir las numéricamente para condiciones iniciales particulares.

En ambas partes de la Sección IV, la dependencia de la energía potencial tanto de las coordenadas como de las velocidades o momentos, requiere que se proceda cuidadosamente en las formulaciones respectivas. Esto se puede apreciar en las Ecs. (18a,b) donde los momentos canónicamente conjugados no son simplemente la masa por las velocidades sino contiene un término adicional dependiente de la posición. Para el lector no familiarizado con este tipo de situación le será útil llevar a cabo los desarrollos para obtener las ecuaciones de movimiento correspondientes y convencerse de que coinciden efectivamente con las obtenidas en la Sección III.

En la Parte A de la Sección V la construcción del operador Hamiltoniano a partir de la función Hamiltoniana Clásica antes obtenida se realiza de manera directa siguiendo reglas bien establecidas. Conviene reconocer que el Hamiltoniano contiene las simetrías del sistema, las cuáles ya se discutieron desde un punto de vista cualitativo al referirnos a la Sección II. De hecho son estas simetrías las que permiten llevar a cabo la separación de variables en la ecuación de Schrödinger, y consecuentemente identificar las constantes de movimiento. La simetría de rotación alrededor del eje está asociada con la conservación de la componente axial del momento angular. La separación de los movimientos longitudinal y transversal es posible debido a que las energías asociadas a cada uno de ellos dependen solamente de la coordenada respectiva y no de la otra, siendo las energías correspondientes constantes de movimiento. La simetría de reflexión en el plano ecuatorial se refleja en el hecho de que \hat{H}_z es una función par de z , Ec. (20a), y se traduce en que las eigenfunciones correspondientes, Ec. (22a), tienen una paridad definida $(-1)^k$. Para el movimiento transversal, en la situación cuántica como en la situación clásica, es posible combinar los movimientos radial y rotacional para identificar las componentes ciclotrónica des-

plazada y magnetrónica. La adición de la precesión de espín del electrón en la Parte B sigue el tratamiento usual de los libros de texto, y aquí se ha incluido porque el espectro de energías de la Ec. (24d) y de la Fig.5 corresponden al llamado geonio, que es un sistema espectroscópico con un solo electrón. Este sistema ha sido observado experimentalmente hace poco y ha permitido la medición más precisa de la anomalía magnética del electrón.

REFERENCIAS

- Elemental. Física, Physical Science Study Committee, Reverté, México, 1967).
- Intermedio. Física. D. Halliday y R. Resnick (C.E.C.S.A., México, 1970).
- Avanzado. Introducción a los Principios de la Mecánica. W. Hauser (U.T.E.H.A., México, 1969).
Mecánica Cuántica No-Relativista. L.D. Landau, E.M. Lifshitz (Reverté, México, 1967).
R.S. VanDyck, Jr., P.B. Schwinberg, y H.G. Dehmelt, Phys. Rev. Lett. 38, 310 (1977).