

## FISICA CUANTICA DE MUCHOS CUERPOS EN LA MATERIA CONDENSADA\*

Manuel de Llano  
Instituto de Física  
Universidad Nacional Autónoma de México  
México 20, D.F. México

### RESUMEN

El problema cuántico, no-relativista y continuo de muchos cuerpos a temperatura absoluta cero se reseña en términos poco técnicos pero conceptuales. Se sigue el enfoque de la teoría perturbativa, sumada parcialmente hasta orden infinito, ya que este es el único esquema que para casos realmente realistas ha dado resultados supuestamente rigurosos aunque severamente limitados en su rango de validez (acoplamientos o muy fuertes o muy débiles, densidades muy bajas o muy altas, etc.)

Luego se esbozan algunos métodos llamados "constructivos", como el de los aproximantes de Padé, mediante los cuales se tiene la esperanza de eventualmente extender la validez de aquellas teorías a regímenes físicos de acoplamiento, densidad, etc.

Finalmente, se consideran como aplicaciones específicas el gas de electrones, la materia nuclear y neutrónica, los helios líquido, la materia alfa, los nuevos sistemas (ultra-cuánticos) de spines polarizados, etc.

### ABSTRACT

The non-relativistic, continuous (as opposed to "spin") many-body problem as it relates to condensed matter at absolute zero temperature is reviewed in simple, non-technical terms, mainly from the standpoint of infinite order perturbation theory, for physical systems where all the particles have the same mass but which otherwise interact with arbitrary short- or long-ranged two-body forces.

---

\* Trabajo apoyado por el ININ & CONACYT (México).

## I. INTRODUCCION

En esta exposición pretendo ofrecer un panorama global, pero no técnico, de algunos problemas cuánticos de muchos cuerpos en los límites a) no-relativistas b) todas las partículas tienen igual masa y c) de sistemas termodinámicos a temperatura absoluta cero, es decir, en su estado cuántico fundamental.

El enfoque a seguir será presentar, al inicio, únicamente los conocimientos supuestamente rigurosos que se tienen acerca de estos sistemas de muchas partículas, y proceder luego a esbozar algunos intentos recientemente ensayados para extender a regímenes físicos (de densidad de partículas, magnitud del acoplamiento dinámico, etc.), aquellos resultados presumiblemente exactos.

Los únicos conocimientos firmes que se tienen sobre estados de la materia condensada a temperatura absoluta cero provienen de la teoría perturbativa<sup>(1)</sup>. Esta plantea todas las contribuciones a, digamos, la energía del estado fundamental, en términos de una jerarquía infinita de diagramas de Feynman, que, en ocasiones, se ha podido sumar hasta orden infinito, pero tan sólo parcialmente ya que se ignora la magnitud de lo restante, es decir, lo que no ha podido sumarse y evaluarse.

Para empezar, consideremos qué hay disponible en la literatura que sea exacta y completamente soluble, donde se puede resolver explícitamente la ecuación de Schrödinger para un sistema de muchos cuerpos en interacción encontrándose tanto la energía como la función de onda del estado fundamental.

## II. MODELOS EXACTAMENTE SOLUBLES

Entre sistemas continuos (excluyendo, e.g., sistemas de redes o de espín, como los modelos Ising, etc.) de  $N$  cuerpos exactamente solubles parece haber sólo tres: i)  $N$  partículas, fermiones o bosones, en cualquier número de dimensiones espaciales, de masa  $m$ , interactuando por pares con un potencial  $\sum_{i < j}^N (x_i - x_j)^2$ ; ii) el sistema de  $N (\gg 1)$  "esferas" de diámetro  $auna dimensión y iii) el gas de fermiones, o bosones, en una dimensión interactuando por pares a través de deltas$

de Dirac, es decir, con una energía potencial  $-c \sum_{i < j}^N \delta(x_i - x_j)$ ,  $c > 0$ .

Desgraciadamente ninguno de estos modelos resulta lo suficientemente realista como para ilustrar verdaderamente lo que pudiera acontecer con sistemas de muchos cuerpos "realistas" como lo son el gas de electrones, la materia nuclear o de neutrones, los helios líquidos  $\text{He}^3$  o  $\text{He}^4$ , etc.

El modelo<sup>(2)</sup> i) da para el estado base una energía proporcional a  $N^{3/2}$  y, por tanto, no es extensiva, o sea, "no existe su límite termodinámico", mismo que se caracteriza por parámetros macroscópicos (como energía, volumen, etc.) proporcionales exactamente a  $N$ . El sistema de  $N$  cuerpos predicho por este modelo se colapsa espacialmente a un solo punto en el límite  $N \gg 1$ , en contraste a lo que verdaderamente ocurre con la materia cotidiana con  $N \approx 10^{23}$  partículas que ocupa un volumen finito.

El modelo<sup>(3)</sup> ii) carece totalmente de interés pues, aun cuando sí es extensiva la energía de su estado fundamental, no posee singularidad (en la densidad de partículas, que sería la única variable) alguna que revelase una transición de fase—como sí ocurre en este mismo sistema tanto en tres como en dos dimensiones, e.g., la formación de un estado periódicamente ordenado<sup>(4)</sup> (cristalino), de un estado desordenado<sup>(5)</sup> o amorfo (vítreo), etc.

Finalmente, el modelo iii) para bosones<sup>(6)</sup> se colapsa cuando  $N \rightarrow \infty$  a una densidad infinita y energía de enlace también infinita, como  $N^3$ . Sin embargo, ese mismo modelo pero para fermiones<sup>(5)</sup>—y gracias a la "repulsión estadística" proporcionada por el principio de exclusión de Pauli—sí alcanza a dar un estado fundamental con energía de enlace extensiva pero en que no se ligan entre sí todas la  $N$  partículas (como ocurriría en cualquier espécimen de materia normal) sino que queda tan sólo un gas ideal de "dímeros" (si los fermiones poseen dos grados intrínsecos de libertad, e.g., spin para arriba y para abajo), o "cuatrímetros" (si hay cuatro grados intrínsecos—como con un nucleón, que además de sus dos grados espinoriales puede ser o protón o neutrón), etc. Todo esto significa, como nos convencería un poco de reflexión, que la densidad de saturación o de equilibrio del sistema sería cero, contrario a lo que ocurre con los líquidos, sólidos, etc., de la natu-



raleza, que se saturan a una densidad finita.

Ante estos fracasos de los modelos exactamente solubles, pasemos a revisar lo que nos proporciona, acerca de sistemas no tan idealizados, la única técnica disponible de aproximaciones sucesivas pero sistemática. Esta es la teoría perturbativa de muchos cuerpos de Rayleigh-Schrödinger, refinada por Feynman y por Goldstone, entre otros.

### III. TEORIA PERTURBATIVA A ORDEN INFINITO

Bástenos decir aquí, para evitar entrar en numerosos detalles realmente técnicos, que: 1) gracias a Goldstone las contribuciones, por ejemplo a la energía del estado fundamental de un sistema de  $N$  cuerpos en interacción, son todas ellas en cada orden  $n$ ,  $1 \leq n < \infty$ , extensivas o, como decíamos antes, proporcionales exactamente a  $N$ ; que 2) gracias a Feynman podemos representar gráficamente cada contribución en términos de un llamado diagrama de Feynman, en principio evaluable (aunque sea numéricamente), y en términos de los cuales se pueden jerarquizar los distintos órdenes de magnitud (e inclusive divergencias) de los mismos. Una vez hecha esta jerarquización puede, en ocasiones, efectuarse una suma parcial hasta orden infinito sobre determinadas clases de contribuciones (léase, "diagramas") como serían las "escaleras", los "anillos", etc., etc. Nos quedamos así con una expansión en algún "parámetro de pequeñez" (como la densidad, la magnitud del acoplamiento de la interacción, etc.). Todo esto sirve no solo para poder sondear profundamente la estructura analítica del problema sino que, en algunos casos (casi la mayoría) para eliminar sistemáticamente contribuciones divergentes—todo al estilo de la teoría cuántica del campo, en particular del caso de la electrodinámica cuántica.

Desgraciadamente los esfuerzos son muy laboriosos, y los resultados muy parcos en el sentido que tan sólo unos cuantos coeficientes se han podido evaluar (¡en tanto como 70 años!) de las expansiones asintóticas antes mencionadas, mismos, no obstante, que se suponen ser "correctos" (para pequeños valores del parámetro relevante) hasta encontrarse evidencia al contrario. Es decir, hasta hallarse contra-ejemplos.

En este espíritu optimista, veamos lo que se tiene para sistemas con interacciones tanto de largo como de corto alcance.

## IV. SISTEMAS DE MUCHOS CUERPOS CARGADOS

Estos representan toda la materia en el llamado 4° estado del "plasma" así como los metales, semi-conductores, superconductores, etc. Pero restrinjámonos tan sólo a un modelo prototípico de éstos—y también nada trivial por ser en tres dimensiones espaciales—que inventó Sommerfeld hace varias décadas, en imitación tal vez del famoso "modelo atómico gelatinoso" de Thomson que fue para pocas partículas cargadas. El modelo de Sommerfeld es un conjunto  $N$  (muy grande, es decir, termodinámico) de partículas de masa  $m$  y carga  $e$  puntual sumergidas en un fondo de carga opuesta y uniformemente distribuida en un espacio de volumen  $V$  y en forma rígida. El sistema es globalmente neutro, por construcción, y se le llama a veces el modelo del "jellium". Su operador hamiltoniano puede escribirse explícitamente; y el parámetro de acoplamiento resultante no es más que la distancia promedio entre las partículas  $r_0 \equiv (3V/4\pi N)^{1/3}$  en unidades del radio de Bohr  $a_0 \equiv \hbar^2/me^2$ , es decir  $0 < r_s \equiv r_0/a_0 < \infty$ .

La energía por partícula de este sistema se conoce (presumiblemente de manera exacta) gracias a Macke<sup>(8)</sup>, Gell-Mann & Brueckner<sup>(9)</sup> y muchos otros<sup>(10)</sup>, quienes aplicaron la teoría perturbativa sumada hasta orden infinito antes descrita, para valores de  $r_s \ll 1$ , o sea, altas densidades y/o acoplamiento débil. La expansión en  $r_s$  resultante—pese a que se empezó (antes de las sumas parciales) con la teoría de Rayleigh-Schrödinger, que es una serie de potencias aquí en  $r_s$ —no es ya una serie tal sino que contiene términos tales como  $\ln r_s$ ,  $r_s \ln r_s$ , etc., además de potencias crecientes en  $r_s$ . Tenemos pues una expansión perturbativa llamada singular, de la cual se conocen los coeficientes numéricos de apenas unos 5 ó 6 términos—de una expansión válida en el mejor de los casos para  $r_s \ll 1$ . (Mientras tanto, los valores empíricos de  $r_s$  en un gas de electrones en un metal real—donde en vez de un fondo de cargas positivas uniformemente distribuido tenemos, por supuesto, una red periódica de iones positivos, van entre 2 y 6).

En el otro extremo de valores muy grandes de  $r_s$  se tiene 1) la hipótesis<sup>(11)</sup> de los años 1930 de Wigner de que, debido al acoplamiento muy fuerte entre los electrones y pese a su baja densidad, éstos se cristalizarían formando lo que se conoce como el "Sólido de Wigner",

y 2) el resultado<sup>(12)</sup> para la energía por partícula que resulta de una teoría de acoplamiento fuerte, inspirada en la hipótesis de Wigner y en la cual el hamiltoniano no perturbado es precisamente la red cristalina, pero clásica y perfecta, cuya energía es potencial pura, y la perturbación se toma como el operador de energía cinética. Este análisis, debido principalmente a Carr<sup>(12)</sup>, nos deja con una expansión asintótica en potencias de  $r_s^{-1/2}$ , que arranca con  $r_s^{-1}$ , es decir, de nuevo con una teoría perturbativa singular aunque ahora con supuesta validez para  $r_s \gg 1$ .

Un verdadero tour de force en la física (?) cuántica de muchos cuerpos en las últimas décadas ha sido la posibilidad de resolver con el método llamado de Monte Carlo, con grandes computadoras y a costos elevadísimos (cien mil dólares por punto), numéricamente la ecuación de Schrödinger de  $N \approx 256$  partículas en interacción. El caso más sencillo, relativamente, de bosones se realizó primeramente por Kalos<sup>(13)</sup> y colaboradores y, muy recientemente, para fermiones Alder y Ceperley<sup>(14)</sup> han abordado el modelo de Sommerfeld para electrones encontrando, entre otras cosas, que la transición entre el fluido al sólido de Wigner ocurre a  $r_s = 100 \pm 20$ .

La aplicabilidad de este modelo de Sommerfeld podría encontrarse tal vez en los metales alcalinos a muy bajas temperaturas si interpretamos las cargas puntuales del modelo ahora como los iones positivos y el fondo neutralizante como el gas de electrones conductores. Este cambio, que evidentemente involucra una reinterpretación de la masa  $m$  como la masa ( $\approx 1837$  veces mayor) de cada ión, establece un valor empíricamente sustraído para la  $r_s$  relevante muy por encima del valor de cristalización señalado por los cálculos Monte Carlo, justificándose<sup>(15)</sup> así de primeros principios que los alcalinos son cristalinos a bajas temperaturas, y no por ejemplo líquidos o sólidos amorfos.

#### V. SISTEMAS DE MUCHOS CUERPOS CON INTERACCIONES DE CORTO ALCANCE

Caben bajo esta categoría no solo materiales "cuánticos" como los helios líquidos de  $\text{He}^3$  y  $\text{He}^4$ , sino además la materia nuclear, que constituye a los núcleos atómicos de la naturaleza, la materia neu-



trónica de la que supuestamente están hechos los "pulsares", así como las sustancias que podríamos denominar "ultra-cuánticas" que actualmente se procuran producir en cantidades macroscópicas en distintos laboratorios de bajas temperaturas. Estos, debido a la muy débil interacción entre pares de átomos (precisamente por habérseles polarizado los espines electrónicos artificialmente), ofrecen, para el caso de bosones, la primera oportunidad de observar directamente la condensación de Bose.

Fue Lenz<sup>(16)</sup> quien en 1929, y sin usar las modernas técnicas de la teoría de campos cuánticos, calculó la corrección de orden más bajo a la energía de un gas cuántico, para bosones y fermiones, imperfecto, es decir, cuyas partículas interactúan débilmente a bajas densidades. Gracias a las técnicas de las teorías perturbativa diagramática de la del campo y de las funciones de Green, se vienen calculando desde entonces los coeficientes numéricos de una expansión no-regular (es decir, no una serie de potencias en el parámetro de pequeñez, que es para bosones  $\sqrt{\rho a^3}$  con  $\rho$  la densidad de partículas y a la longitud de dispersión, y  $\rho^{1/3} a$  para fermiones). La longitud caracteriza totalmente una interacción central entre dos cuerpos a bajas energías relativas, y se reduce, e.g., al diámetro del carozo repulsivo infinito en caso de no haber atracción alguna en el problema de esferas duras. Los esfuerzos para determinar estos coeficientes han sido verdaderamente heroicos—pese a que sólo se ha conseguido calcular en forma definitiva una media docena de ellos—y fueron realizados desde Lee, Huang & Yang<sup>(17)</sup> hasta Baker<sup>(18)</sup>. La sorpresa en todo esto ha sido (como en el caso del gas de electrones) precisamente la aparición de términos singulares como potencias fraccionarias, logarítmicos, etc., del parámetro de pequeñez.

Pero más interesante aún es el caso de bosones donde surge, apenas en la segunda corrección a bajas densidades un término  $\sim \sqrt{\rho a^3}$ , que claramente dará a la energía total del sistema de N cuerpos una componente compleja en el momento que el potencial entre pares se vuelva lo suficientemente atractivo como para hacer  $a < 0$ . Este acontecer, hasta ahora visto<sup>(19)</sup> como una señal de que se resquebraja la validez del formalismo, podría simple y sencillamente indicar la aparición de estados "transitorios" (o no-estacionarios, o resonantes, o metaestables) consistentes en la rápida formación y desaparición de cúmulos con tres o más partículas, como preludio a la formación del gran cúmulo de N par-

tículas que debe ser la fase condensada.

Estas expansiones, asintóticamente válidas para densidades muy pequeñas, cuando más, serían relevantes—si es que pudiésemos extender por algún método a densidades físicas (que no son tan pequeñas)—al estudio de los diferentes líquidos cuánticos (o quizás sólidos, o cristales líquidos o amorfos, o no sabemos a ciencia cierta ¿qué cosa?) tales como, en el caso de fermiones: la materia nuclear, la neutrónica, el helio-3; y en el caso de bosones: la materia de partículas alfa y el helio-4 y, para ambos toda la serie de sistemas spin-polarizados. La mayoría de estas sustancias se "saturan" a una densidad definida, es decir, la energía (negativa, por ser de enlace) adquiere un mínimo para una cierta densidad de equilibrio.

Una excepción insólita es la materia de neutrones que, bajo la acción exclusiva de sus fuerzas nucleares propiamente hablando, es un gas no condensado a ninguna densidad—aunque tal vez se cristalice a densidades muy altas. Sin embargo, al tomar en cuenta la única otra fuerza disponible entre aquellas partículas, la gravitacional, que es atractiva y actúa en virtud de que cada neutrón posee una cierta masa, podemos estimar muy fácilmente que predominará la fuerza gravitatoria sobre la nuclear cuando el número de neutrones es algo mayor que 10 partículas, haciendo que se colapse todo el sistema a lo que se conoce como un "agujero negro" con densidad y energía de enlace infinitos y del cual ni un solo fotón de luz puede escaparse. La manera en que la energía diverge para  $N \rightarrow \infty$  ha sido precisada, por argumentos basados en la teoría de Thomas-Fermi, con una dependencia  $E \sim -N^{7/3}$  o bien

$$N^{-1} E \rightarrow -N^{4/3} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} -\infty.$$

Pero volvamos a la materia "normal", es decir, la que si se satura a una densidad  $\rho$  finita, y que de hecho no es nada pequeña frente a la pequeñez en  $\rho$  requerida por las expansiones energéticas que tantos años y esfuerzos han llevado: ¿Cómo podemos esperar utilizar esta información, que se resume en los pocos coeficientes numéricos conocidos de la expansión, para los sistemas físicos reales antes mencionados? La posible respuesta quizás esté en los llamados "métodos constructivos", de lo que hablaremos muy brevemente más abajo, que representan una técnica para continuar analíticamente—más allá de su rango nor-



mal de convergencia (y por tanto validez)—una expansión regular o singular que contiene tan sólo unos cuantos términos. Pero éstos se basan sobre el conocimiento fidedigno del sistema de  $N$  cuerpos sin atracciones, es decir, podría ser del sistema de  $N$  esferas duras con la aproximación de orden cero. Este problema, muy simplificado, no tiene solución exacta en tres dimensiones, ni hay teorías muy satisfactorias tampoco. Con los "métodos constructivos" se pretende averiguar, por ejemplo, a qué densidad en unidades naturales de  $c^{-3}$ , donde  $c$  es el diámetro de cada esfera, ocurre el empaquetamiento periódico máximo, el empaquetamiento irregular (o amorfo) máximo, etc. En el caso clásico estos son  $\sqrt{2}/c^3$  y  $0.86 \sqrt{2}/c^3$  <sup>(20)</sup>, respectivamente. Pero en el caso cuántico (por efectos de difracción ondulatoria) las esferas aparecerán mayores, lo que hará que estos valores sean algo menores aunque no se sabe exactamente por cuanto. Dado que, a estos valores de la densidad, diverge la energía total del sistema debido a la localización y al principio de incertidumbre, serán claramente aspectos esenciales en la construcción de la ecuación de estado del sistema.

## VI. METODOS CONSTRUCTIVOS

Para convencer al lector de que las teorías arriba expuestas de muchos cuerpos supuestamente rigurosas pero muy limitadas en su región de aplicabilidad, pueden en principio servir de algo en la construcción de la energía total del sistema, por partícula, en función de la densidad, para densidades físicas reales, permítaseme ilustrar un caso, admisiblemente de gran éxito, de un "método constructivo" basado en los aproximantes de Padé <sup>(21)</sup> que, tomando información de una serie de potencias en la región en que esta serie converge, extiende analíticamente o, si deseamos, intenta "adivinar" lo que debería ser la función en cuestión más allá del radio de convergencia de la serie original. Este es el caso de la función  $f(x) \equiv [(1+2x)/(1+x)]^{1/2}$  cuyo desarrollo de Taylor, divergente para  $x > 1/2$ , es  $1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + \frac{13}{16}x^3 - \dots$  como es fácil comprobar. Conociendo, digamos, hasta el  $M$ -ésimo coeficiente de la serie de Taylor  $f_M(x) \equiv \sum_{i=0}^M a_i x^i$ , es posible construir los aproximantes (racionales) de Padé

$$[n/m](x) \equiv \frac{\sum_{i=0}^n p_i x^i}{\sum_{i=0}^m q_i x^i} \quad \text{tal que la dife-}$$

rencia entre éstos y la serie de Taylor truncada sea  $O(x^{n+m+1})$  donde  $n+m \leq M$ . Es inmediato ver, mediante una pequeña calculadora de mano, que el sencillísimo aproximante  $[1/1](x) = (1 + \frac{7}{4}x)/(1 + \frac{5}{4}x)$  ya da la forma cualitativa de la función original  $f(x)$  para toda  $x \geq 0$ , es decir, incluso para  $x > 1/2$  donde diverge la expansión de Taylor de donde se tomaron los datos (léanse, coeficientes) para construir el aproximante racional. Además, el aproximante de Padé  $[2/2](x)$  ya coincide (a una escala medianamente burda) con la función  $f(x)$  para toda  $x \geq 0$ . Finalmente, mientras el valor exacto de  $f(\infty)$  es  $\sqrt{2} = 1.41421356\dots$  se tiene que el Padé  $[5/5](\infty)$  da 1.41421355 es decir coincide hasta la séptima cifra decimal con el valor exacto.

Este ejemplo, que tal vez a la postre resulte exageradamente exitoso, como dijimos antes, ilustra la posibilidad de extraer de lo rigurosamente conocido acerca de las respectivas ecuaciones de estado del problema de muchos cuerpos, todas las propiedades relevantes para los valores físicos de sus parámetros generalmente ni muy grandes ni muy pequeños de la densidad, acoplamiento dinámico, etc. en que se encuentra la materia condensada cuántica.

#### VII. ¿BASTARAN LAS DESCRIPCIONES ACTUALES DE LA MATERIA CONDENSADA?

Estas, casi sin excepción, están basadas sobre el sistema sin interacciones, o sea, el gas ideal cuántico o, a lo sumo, el gas de esferas duras sin condensación alguna. Esto significa que, en todos estos enfoques, al hacer tender a cero la densidad de partículas  $\rho \rightarrow 0$ , también tenderá a cero la energía por partícula, tal y como lo haría un gas ideal o bien imperfecto. Esto discrepa contundentemente con lo que debería de suceder con cualquier fase condensada de la materia, a saber: densidad tendiente a cero significa, o puede significar, que el volumen original se hace tender al infinito mientras el número total de partículas (muy grande pero constante) permanece espontáneamente en un volumen mucho menor que el anterior.

Este defecto fundamental de la que padecen casi todas las formulaciones de la materia condensada tal vez pueda subsanarse definiendo un nuevo estado no-perturbado que ya esté condensado, es decir, por

ejemplo un estado de partícula independiente nuevo con las características de la fase condensada, alrededor del cual se harían las correcciones perturbativas, hasta orden finito o infinito. Este objetivo se encuentra aún muy distante de poderse lograr debido a la naturaleza no-lineal, y por la falta de solución única inmediatamente reconocible, del problema de Hartree-Fock que acompaña este enfoque. Sin embargo, por lo menos algunos estados no-triviales del problema se han encontrado<sup>(22)</sup> ya, y estos son bien distintos a los del gas antes señalado que corresponde a las teorías ortodoxas.

El problema así planteado corresponde, ni más ni menos, que a la búsqueda de una teoría que proporcione, automáticamente, la "construcción de Maxwell" de la ecuación de estado, o bien, la posibilidad de la acumulación de  $n$  cuerpos en estados ligados, donde  $2 \leq n \leq N$ .

#### REFERENCIAS

1. A.L. Fetter and J.D. Walecka, Quantum Theory of Many-Particle Systems (McGraw-Hill, 1971).
2. H.R. Post, Proc. Phys. Soc. (Lond.) 66 (1953) 649.
3. J.B. McGuire, J. Math. Phys. 5 (1964) 622; 6 (1965) 432; 7 (1966) 123.
4. N.M. Rosenbluth and A.W. Rosenbluth, J. Chem. Phys. 22 (1954) 881; B.J. Alder and T.E. Wainwright, J. Chem. Phys. 27 (1957) 1208; W.W. Wood and J.D. Jacobson, J. Chem. Phys. 27 (1957) 1207.
5. L.V. Woodcock, J. Chem. Soc. Faraday II, 72 (1976) 1667.
6. F. Calogero and A. Degasperis, Phys. Rev. A11 (1975) 265.
7. C.N. Yang, Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1312; M. Gaudin, Phys. Lett. 24A, (1967) 55.
8. W. Macke, Z. Naturforsch. 5a (1950) 192.
9. M. Gell-Mann and K.A. Brueckner, Phys. Rev. 106 (1957) 364.
10. D.F. Du Bois, Ann. Phys. (N.Y.) 7 (1959) 174; W.J. Carr, Jr., and A.A. Maradudin, Phys. Rev. 133 (1964) A371.
11. C.M. Case and N.H. March, Adv. Phys. 24 (1975) 101.
12. W.J. Carr, Jr., Phys. Rev. 122 (1961) 1437.
13. M.H. Kalos, D. Levesque and L. Verlet, Phys. Rev. 9A, (1974) 2178.
14. B. Alder & D. Ceperley, Phys. Rev. Lett. (1980).
15. M. de Llano & A. Plastino, KINAM, Revista de Física 1 (1979) 201.
16. W. Lenz. Z. Physik, 56 (1929) 778.
17. T.D. Lee, K. Huang and C.N. Yang, Phys. Rev. 106 (1957) 1135.
18. G.A. Baker, Jr., Rev. Mod. Phys. 43 (1971) 479.
19. N.M. Hugenholtz and D. Pines, Phys. Rev. 116 (1959) 489.
20. G.D. Scott and D.M. Kilgour, J. Phys. D2 (1969) 863; J.L. Finney, Proc. Roy. Soc. (Lond.) A319 (1970) 479. C.H. Bennett, J. Appl. Phys. 43 (1972) 2727; W.M. Visscher and M. Bolsterli, Nature 239 (1972) 504.



21. G.A. Baker, Jr., Essentials of Padé Approximants, (Academic, N.Y., 1975).
22. V.C. Aguilera-Navarro, M. de Llano & A. Plastino, KINAM, Revista de Física, 1 (1979) 441.