

## ROTACION DE LAS GALAXIAS

A. Serrano

Instituto de Astronomía

Universidad Nacional Autónoma de México

### RESUMEN

Se presentan algunas líneas actuales de investigación en torno al problema de la rotación de las diferentes estructuras que configuran el Universo. Se muestra como la relación entre momento angular y masa en el Universo puede entenderse como producto de la formación en equilibrio mecánico de los cuerpos celestes. Respecto a la rotación de las galaxias se mencionan, a guisa de ejemplo: la posible relación entre la tasa de formación de estrellas y la densidad de momento angular, el origen y la persistencia de la estructura espiral y, en galaxias elípticas, el origen no rotacional de su achatamiento.

### ABSTRACT

This paper reviews some aspects related to the rotation of the different structures that make up the Universe. Emphasis is given to those aspects of active current research. It is shown how we can understand the Universal relation between angular momentum and mass as a consequence of the formation in mechanical equilibrium of astronomical bodies. In relation to the rotation in galaxies, I discuss in particular: the possible relation between the stellar birthrate and the angular momentum density, the origin and permanence of the spiral structure, and the question of the non-rotational origin of the flatness in elliptical galaxies.

## I. INTRODUCCION

La rotación de los cuerpos celestes es un fenómeno universalmente extendido. Recordemos que su manifestación más cercana, la rotación de los satélites alrededor de los planetas y de éstos alrededor del Sol, permea las bases mismas de la ciencia moderna (de Pitágoras a Heraclides, de Copérnico a Galileo) y permitió a Newton establecer la ley de la gravitación. El Universo que hoy conocemos es mucho más complejo y rico que el de Copérnico y Newton; sabemos que hay multitud de estrellas similares al Sol, que éstas se agrupan en cúmulos estelares y en galaxias, que las galaxias se agrupan en cúmulos y éstos en hipercúmulos. Y todos estos objetos, desde los asteroides hasta los hipercúmulos de galaxias, rotan. Como mostraremos en §II la rotación de los cuerpos astronómicos obedece una relación, descubierta apenas hace 18 años, que nos permite investigar las condiciones en las cuales se formaron los diferentes objetos.

Aunque el análisis de la rotación de las diferentes instancias que componen el Universo presenta aspectos innumerables y fascinantes, me limitaré en este artículo a presentar algunos de los aspectos que se investigan en la actualidad en lo que a galaxias se refiere. En §III presento, a los lectores no familiarizados con el tema, las características generales de las galaxias y de sus dos especies principales: las galaxias espirales y las elípticas. En §IV trataré de dos problemas en relación a las galaxias espirales: a) la curva de rotación de estas galaxias y su importancia en lo que respecta a la relación entre la tasa de formación estelar y la densidad de momento angular, y b) el origen y persistencia de la estructura espiral. Finalmente en §V presentaré la historia del descubrimiento de la rotación en galaxias elípticas y el origen no rotacional de su achatamiento.

## II. ROTACION EN EL UNIVERSO

Una gran variedad de objetos astronómicos, desde los asteroides hasta los hipercúmulos de galaxias, muestran una correlación entre su momento angular y su masa. Esta relación, válida para objetos en un intervalo de masas de más de 20 órdenes de magnitud, fue descubierta por

Brosche<sup>(1)</sup> en 1963 (véase, sin embargo, su "descubrimiento" en Wesson<sup>(2)</sup>).

Desde entonces varios autores han estudiado la relación entre momento angular y masa en diferentes tipos de objetos (p.ej.: Hartmann y Larson<sup>(3)</sup>; Fish<sup>(4)</sup>; Takase y Kinoshita<sup>(5)</sup>; Ozernoy<sup>(6)</sup>; Kraft<sup>(7)</sup>; Dai-Wen-Sai et al.<sup>(8)</sup>; Wesson<sup>(9)</sup>; Carrasco, Roth y Serrano<sup>(10,11)</sup>). El resultado ha sido siempre encontrar que el momento angular total,  $J$ , varía como una potencia de la masa:

$$J \propto M^{\alpha+1} \quad , \quad (1)$$

con  $\alpha$  entre 1/2 y 1.

Casi todos estos intentos se refieren a una clase específica de objetos, por ejemplo: asteroides o estrellas o galaxias. Entre estos intentos destaca el trabajo de Ozernoy<sup>(6)</sup> que encuentra, para galaxias espirales, que el momento angular específico,  $j = J/M$ , sigue una ley  $j \propto M^{2/3}$ , y la explica en términos de equilibrio mecánico.

Carrasco, Roth y Serrano<sup>(10,11)</sup> han revisado, a la luz de más y mejores observaciones, el diagrama original de Brosche<sup>(1)</sup>, y demostrando que

$$j \propto \bar{\rho}^{-1/6} M^{2/3} \quad , \quad (2)$$

donde  $\bar{\rho}$  es la densidad media del sistema. En la Fig.1 se muestra cómo la relación (2) es válida tanto para cada tipo de objetos con densidad parecida, como, gracias al escalamiento  $\bar{\rho}^{-1/6}$ , para todos en conjunto. Como en el modelo de Ozernoy, la relación (2) puede derivarse del simple equilibrio mecánico implícito en el Teorema Virial:

$$2E_{\text{cin}} = -E_{\text{grav}} \quad . \quad (3)$$

Actualmente se cree que los objetos chicos se formaron a partir de los objetos grandes. Hay, pues, siempre un exceso de momento angular en la "nube" de la cual se forma un objeto dado. La relación (2) parece indicar, según Carrasco, Roth y Serrano, que la identidad

del nuevo sistema físico se establece en el momento en que el protosistema es capaz de deshacerse de su momento angular. Esta idea se contraponen a la de que la "nube" originalmente no rota y que su momento angular se adquiere a través de interacciones de marea (por ejemplo, para las galaxias espirales en Peebles<sup>(12)</sup>, Gott y Thuan<sup>(13)</sup>). Sin embargo, un análisis de Sharp *et al.*<sup>(14)</sup> en 1979 de las orientaciones de las galaxias espirales binarias muestra que la hipótesis de las interacciones de marea como fuente de momento angular es incorrecta, por lo menos para las galaxias espirales.

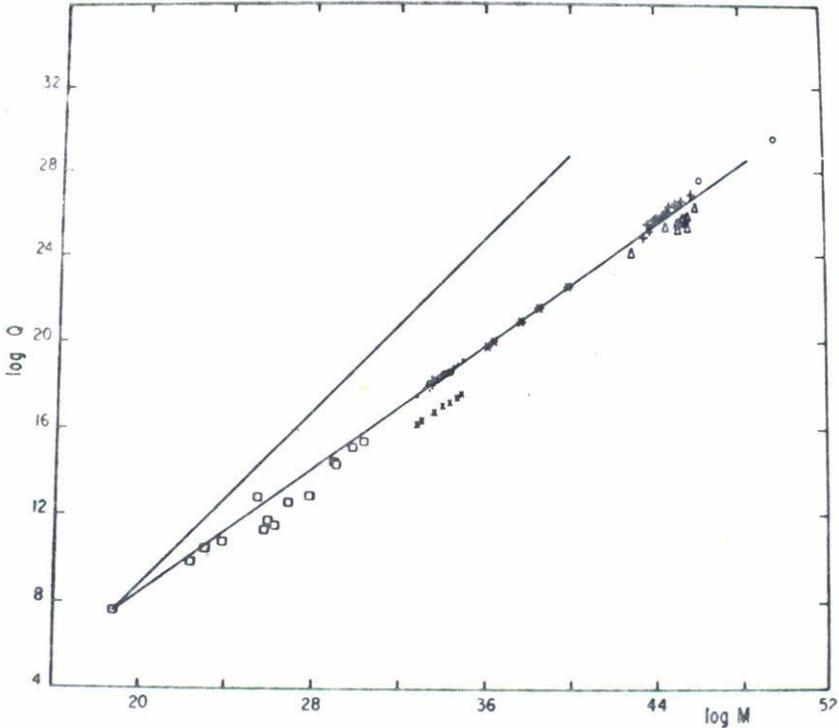


Fig. 1 Momento angular específico,  $j$ , corregido por efectos de densidad,  $Q = j\rho^{1/6}$ , contra masa, para diversos objetos astronómicos, desde asteroides hasta hipercúmulos de galaxias. La línea que pasa por los puntos es un ajuste lineal por cuadrados mínimos y tiene pendiente  $\beta = 0.71$ . Se muestra también una línea de pendiente unitaria.

Un aspecto sorprendente de la Fig.1 es que hay sistemas en donde la rotación claramente no domina y que sin embargo siguen una ley  $j \propto M^{2/3}$ . Esto indica que hubo un cambio de una fracción constante del momento angular para toda la familia. Se cree que el frenado magnético puede explicar este fenómeno, pero los detalles de esta interacción aún están bajo estudio.

Desgraciadamente, como muestran Carrasco, Roth y Serrano, no siempre hay objetividad al juzgar la relación  $j$  contra  $M$ . Wesson<sup>(2,9)</sup> por ejemplo, en abierta violación a los datos observados y en el afán de descubrir nuevas leyes cósmicas, insiste en que  $j \propto M$ . Es claro de la Fig.1 que tal nueva ley de la naturaleza no es ni necesaria, ni verdadera.

Quisiera hacer notar que nuestro conocimiento de los procesos de formación de los objetos mostrados en la Fig.1 es aún muy pobre. En particular, la formación de estrellas y de galaxias es un área activa de investigación donde la rotación juega un papel importante y donde debemos esperar resultados fundamentales en los próximos años.

### III. GALAXIAS

El proceso de nuestra comprensión de esa banda difusa de luz que llamamos Vía Láctea es un proceso fascinante (quien se interese puede leer p.ej. el libro de Withney<sup>(15)</sup>); de hecho, provocó el destronamiento definitivo del hombre, esto es del sistema solar, como centro del Universo. Para acabar lo que Copérnico había empezado, dos conceptos tenían que desarrollarse. Primero, que la Vía Láctea es un universo-isla, semejante a otros universos-isla, como la nebulosa de Andrómeda o aquellas nubes que redescubrió Magallanes, que se encuentran fuera de nuestro sistema. Pero también había que entender las escalas fantásticas envueltas en esta discusión: que el Sol se encuentra a  $310^{17}$  Km ( $\approx 10$  Kpc) del centro de la Vía Láctea, y que las otras galaxias se encuentran a distancias típicas 100 veces mayores.

Ya Kant<sup>(16)</sup> argumentaba en 1755, con una profunda intuición física, que la forma achatada de la Vía Láctea se debía a la rotación, que el Sol no estaba en el centro del sistema y que nebulosas como Andrómeda debían estar formadas de estrellas y ser, por tanto, simila-

res a nuestra Galaxia. No fue, sin embargo, sino hasta el primer tercio de este siglo cuando estas intuiciones dieron paso a argumentos convincentes y cuantitativos. Shapley<sup>(17)</sup> (1918) mostró que el subsistema galáctico de los cúmulos globulares, que por cierto es esférico y no aplanado como el resto de la Galaxia, se encontraba a una gran distancia del Sol ( $\approx 10$  Kpc) en la dirección de Sagitario. Hubble<sup>(18,19)</sup> (1926, 1929) mostró que las galaxias externas se encontraban a distancias mucho más grandes que las dimensiones de la Vía Láctea, es decir fuera de nuestro sistema, y que se alejaban de nosotros a velocidades tanto más grandes cuanto más lejos estuvieran.

Hubble dividió a las nebulosas extragalácticas en 4 clases: irregulares (I), elípticas (E), espirales (S) y espirales barradas (SB); y las arregló en tres secuencias que se intersectan (ver Fig.2).

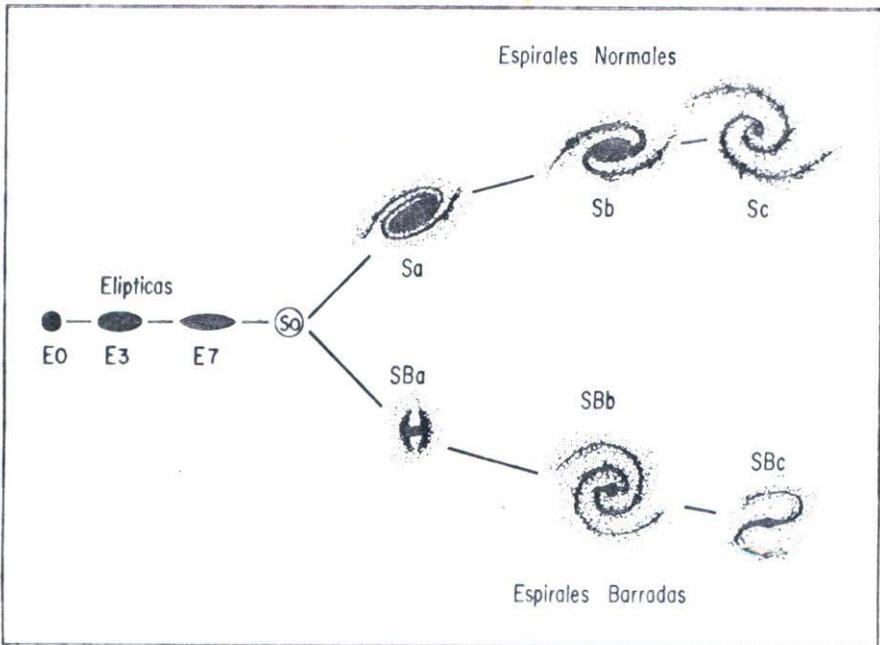


Fig.2 Clasificación morfológica de las galaxias de acuerdo a Hubble.

Las galaxias elípticas (Fig.3) son muy similares entre sí excepto por su elipticidad

$$\epsilon = 1 - b/a \quad , \quad (4)$$

donde a y b son los semiejes mayor y menor respectivamente. Se denotan por una letra E seguida por un solo dígito igual a  $10\epsilon$ . Así las E0 son galaxias redondas y las galaxias elípticas más aplanadas, con  $\epsilon = 0.7$ , son E7.

Las galaxias espirales (Fig.4) combinan un disco, donde aparece un patrón espiral, con un bulbo central parecido a una galaxia elíptica. Las secuencias S y SB se subdividen en a,b,c de acuerdo al tamaño relativo del bulbo central y al grado de enrollamiento, de grosor y de coherencia de los brazos espirales (ver Fig.2).

Así pues, desde hace 50 años sabemos que las galaxias son la unidad fundamental en la estructura del Universo, sabemos que son gigantescos conglomerados de estrellas y, en ocasiones, de gas y polvo.

La luz que recibimos de diferentes tipos de galaxias difiere tanto en la distribución general de la energía (colores) como en las características detalladas del espectro. Un análisis de estos aspectos nos permite distinguir el tipo de estrellas predominantes en cada galaxia así como investigar los tiempos en que estas estrellas se formaron.

Los estudios de evolución estelar nos indican que las estrellas tienen un tiempo de vida finito y que varía fuertemente con la masa inicial de la estrella. Las estrellas de gran masa (100 veces la del Sol, digamos) tienen tiempos de vida del orden de algunos millones de años, son calientes y por tanto azules. Las estrellas como el Sol viven cerca de  $10^{10}$  años y estrellas aún más chicas viven más. Estas estrellas pequeñas son frías y por tanto rojas.

La luz emitida por las galaxias espirales, está dominada por estrellas azules y masivas. Dado que la edad de las galaxias es del orden de  $10^{10}$  años, tenemos que concluir que el proceso de formación de estrellas ha tenido lugar en estas galaxias durante mucho tiempo y continúa hoy en día. En cambio, en las galaxias elípticas la luz emitida proviene esencialmente de estrellas viejas, frías y rojas: parece

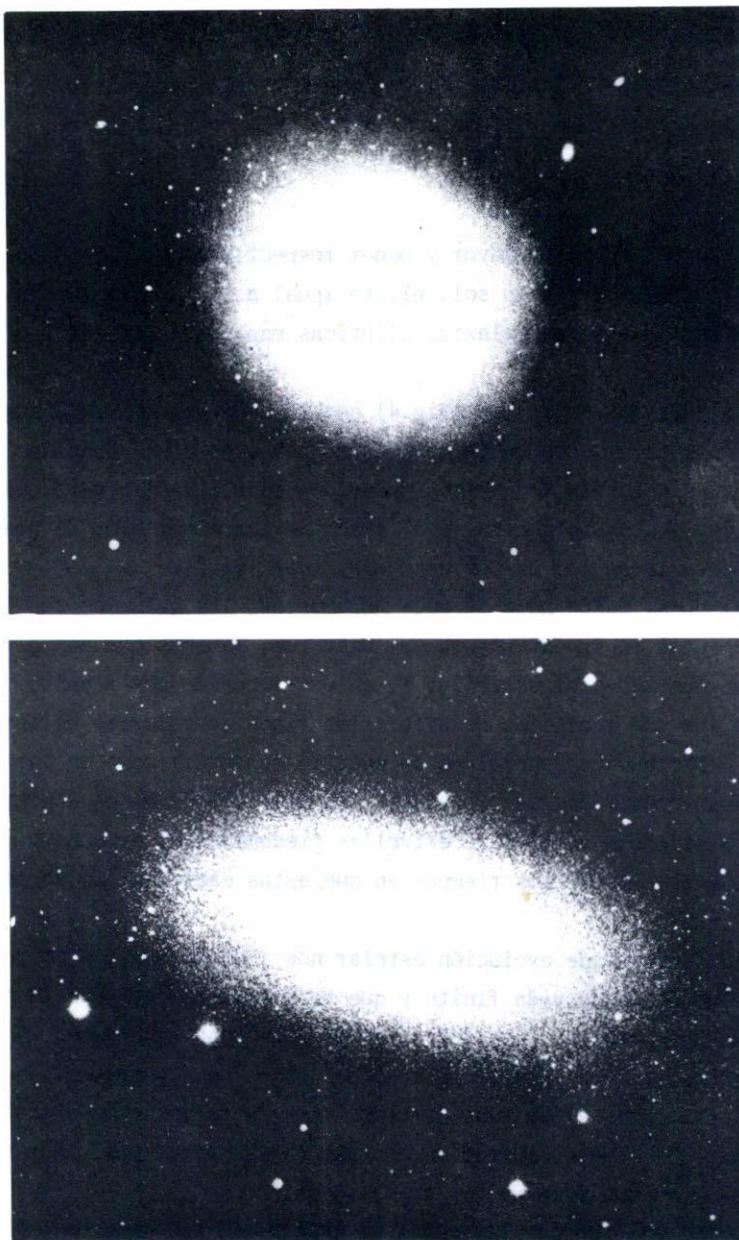


Fig.3 Galaxias elípticas: a) M87, una galaxia E0.  
b) NGC 205, compañera de Andrómeda.

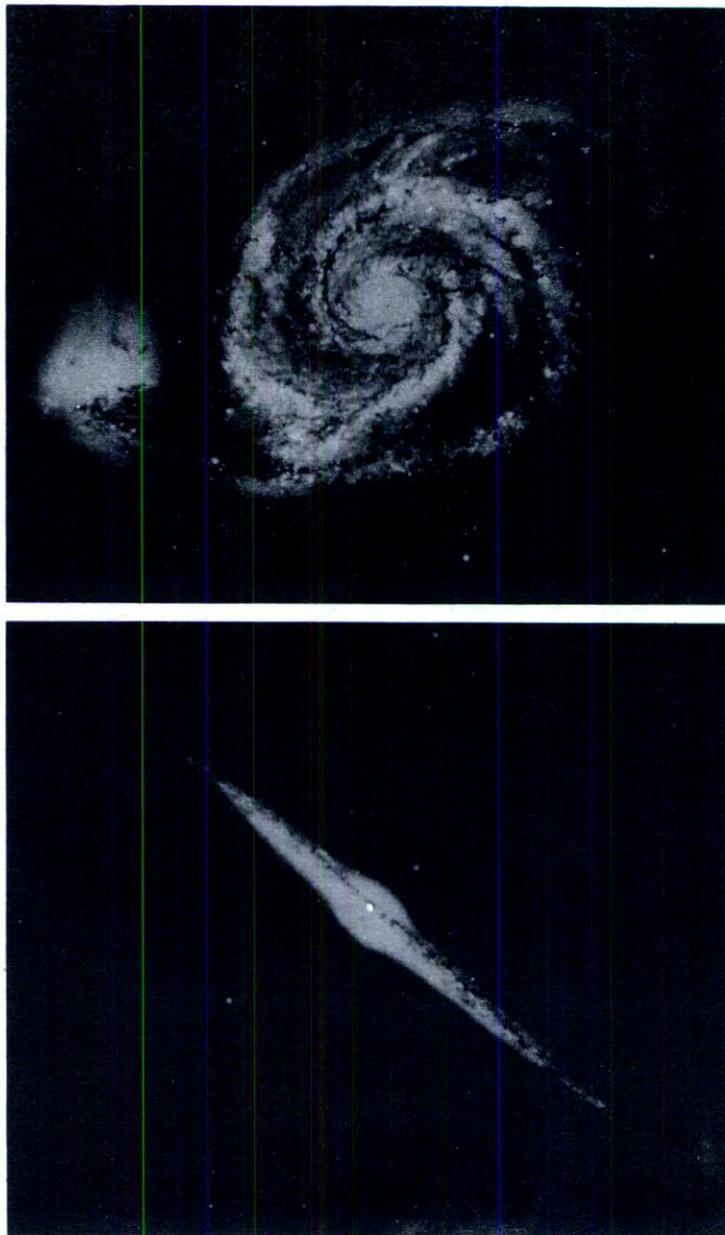


Fig.4 Galaxias espirales: a) M51, mostrando un vigoroso patrón espiral.  
b) NGC 4565, una espiral Sb de canto.

que toda formación estelar paró hace  $10^{10}$  años. Estas conclusiones se ven reforzadas por el hecho de que en las galaxias espirales observamos gas y polvo, materia prima para formar estrellas, mientras que en las galaxias elípticas no los vemos. Esto es evidente en las Figs. 3 y 4.

Una diferencia más entre galaxias espirales y elípticas es que en las primeras domina un movimiento ordenado de rotación en torno al centro, mientras que en las segundas dominan los movimientos al azar. Esto se refleja en la misma morfología: las galaxias espirales son sistemas planos mientras que las elípticas son aproximadamente esféricas.

Como ya mencionamos anteriormente, en las galaxias espirales se puede observar, además del disco, una componente esferoidal, muy fácil de distinguir en las partes centrales, que es el bulbo de la Galaxia. Estos bulbos tienen todas las características de una galaxia elíptica aunque en escala más pequeña: tienen dispersiones altas de velocidad e incluso tienen la misma distribución radial de la luz. La distribución esferoidal se continúa en las partes exteriores en forma de un halo de estrellas frías y viejas. Los cúmulos globulares, enjambres esferoidales de, típicamente, un millón de estrellas, también se distribuyen esféricamente alrededor del centro.

En otras palabras, en las galaxias espirales coexisten dos subsistemas: uno viejo y esferoidal (llamado Población II) y uno joven y en forma de disco (Población I). Además de las diferencias mencionadas hay diferencias importantes de composición química entre las Poblaciones I y II ya que estas últimas muestran muy bajas abundancias de los elementos pesados (aquellos con masa atómica mayor o igual al Carbono).

#### IV. ROTACION EN GALAXIAS ESPIRALES

Como puede verse en la Tabla I, la energía dominante en una galaxia espiral como la nuestra es la rotación. La única otra forma de energía que tiene importancia en la dinámica global de estas galaxias es, naturalmente, la gravitación.

TABLA I

DENSIDAD DE DIVERSAS FORMAS DE ENERGIA EN LA  
VECINDAD SOLAR (eV cm<sup>-3</sup>)

Radiación estelar	1
Movimiento turbulento	1
Radiación de fondo	1
Rayos cósmicos	1
Campo magnético	1
Rotación	5000

En nuestra galaxia no fue sino hasta la década de los 20 cuando se estableció el carácter de esta rotación: en una serie de artículos entre 1925 y 1928, Lindblad<sup>(20)</sup> (e.g., 1927) y Oort<sup>(21)</sup> (e.g., 1928) mostraron, en base a un análisis de las velocidades estelares en nuestra vecindad, que la galaxia rotaba diferencialmente. No era fácil llegar a esta conclusión por la dificultad que representa el tener varios subsistemas, cada uno con diferentes características de rotación, coexistiendo en nuestro entorno.

En cuanto a las galaxias externas la situación fue más confusa. Lord Rosse en 1848 descubre que M51 muestra una estructura espiral, sin duda reminiscente de rotación; Slipher<sup>(22)</sup> (1914) vió en la inclinación de las líneas espectrales de M104 una señal más de rotación; Pease<sup>(23)</sup> (1916) encontró incluso que la velocidad radial en M31 (Andrómeda) aumenta linealmente con la distancia al centro, i.e., que parece rotar como un cuerpo rígido. Sin embargo, todas estas señales de rotación se dieron en un momento histórico en que la concepción de las nebulosas espirales como galaxias externas todavía no tomaba forma definitiva. Recordemos que hasta 1925-1930 es cuando se establece que las

las galaxias son sistemas estelares similares a la Vía Láctea (ver §III). Es entonces cuando las señales de rotación pueden reinterpretarse en su forma actual.

La rotación en galaxias espirales es un campo activo de investigación contemporánea. Para ilustrar esta investigación, y sin pretender ser exhaustivo, presentaré aquí dos facetas de estos trabajos. Trataré primero la curva de rotación de las galaxias y las implicaciones que tiene en el espacio de las velocidades, así como las inferencias que pueden sacarse de la curva de rotación acerca de la tasa de formación de estrellas. Como segundo punto trataré el problema de la persistencia de la estructura espiral, de su interpretación como una onda de densidad y de la necesidad de un mecanismo permanente de excitación de la onda.

#### a) Curvas de rotación

Por medio de la espectroscopía óptica, principalmente en líneas de emisión, y de observaciones en la línea de 21 cm en radio, podemos conocer la velocidad de rotación,  $V_{rot}$ , como función de la distancia galactocéntrica,  $r$ , tanto en nuestra galaxia como en galaxias externas. En la Fig. 5 se muestran algunas de estas curvas de rotación.

En general siempre hay una parte central que rota como un cuerpo rígido en donde  $V_{rot}$  aumenta linealmente con  $r$  hasta llegar a un máximo, típicamente entre 200 y 300  $\text{km}^{-1}$ . A radios más grandes, le sigue una región con  $V_{rot} \approx \text{constante}$ , i.e., en rotación diferencial.

Uno se espera que si  $r$  es suficientemente grande y casi toda la masa del sistema se encuentra ya al interior de  $r$ , la curva de rotación debe ser Kepleriana,  $V_{rot} \propto r^{-1/2}$ . Sin embargo, lo que se encuentra es que  $V_{rot}$  decae mucho más lentamente con  $r$  o incluso se mantiene constante (e.g., Roberts y Rots<sup>(24)</sup>, Krumm y Salpeter<sup>(25)</sup>, Bosma<sup>(26)</sup>). Aparantemente, no hay una sola galaxia en donde se haya observado, a  $r$  grande, una curva Kepleriana de rotación (van der Kruit y Allen<sup>(27)</sup>). Esto nos indica o bien que los movimientos observados no corresponden a órbitas circulares, o bien que hay todavía una cantidad de masa apreciable fuera de las regiones observadas.

La rotación diferencial de las galaxias fuera de la región central contrasta fuertemente con la rotación rígida que muestra un gas ideal (Boltzmann<sup>(28)</sup>). La razón de esta diferencia se encuentra en la estructura "microscópica" en el espacio de velocidades: en un sistema estelar las colisiones son prácticamente nulas y esto se manifiesta en la

distribución de velocidades estelares, que no es Maxwelliana, sino más bien elipsoidal (Schwarzschild<sup>(29)</sup>).

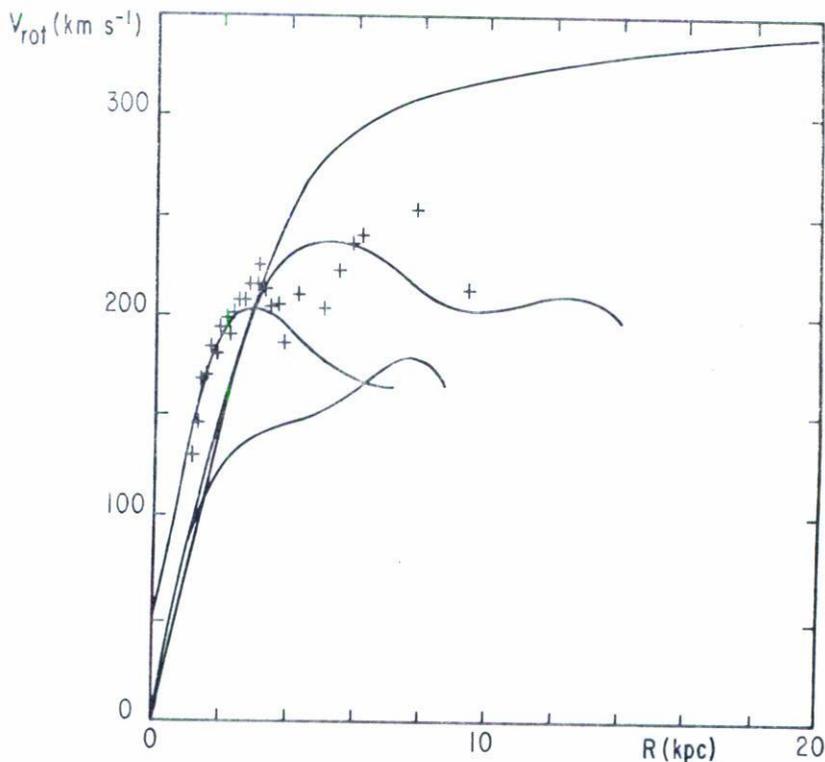


Fig.5 Velocidad de rotación como función de la distancia galactocéntrica en Kpc ( $1\text{Kpc}=310^{16}$  Km), para algunas galaxias espirales.

Para ilustrar este punto, consideremos una galaxia bidimensional y un sistema de coordenadas polares  $(r, \theta)$  con origen en el centro de la galaxia. La función de distribución elipsoidal más simple es

$$f = \rho \frac{hK}{\pi} \exp \{-h^2 U^2 - k^2 (V - V_{rot})^2\}, \quad (5)$$

donde  $(U, V) = (\dot{r}, r\dot{\theta})$  son las velocidades en las direcciones radial y tangencial respectivamente, y  $\rho$  es la densidad. Hemos supuesto en (5) que la velocidad radial promedio es cero, que el elipsoide de velocidades tiene ejes principales en las direcciones radial y tangencial, y que el sistema es independiente del tiempo y axialmente simétrico, de tal forma que  $V_{rot}$ ,  $\rho$ ,  $h$  y  $k$  son funciones de  $r$ . Como las aceleraciones  $\dot{U}$ ,  $\dot{V}$  están dadas por

$$\dot{U} = \frac{V^2}{r} - \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

(6)

y

$$\dot{V} = -\frac{UV}{r},$$

donde  $\phi$  es el potencial gravitacional, la ecuación de Boltzmann,  $Df/Dt=0$ , se reduce a

$$U \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{V}{r} (V \frac{\partial f}{\partial U} - U \frac{\partial f}{\partial V}) - \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial U} = 0.$$

(7)

Si usamos (5) y (7) y dividimos entre  $-f$ , obtenemos un polinomio cúbico en  $U$  y  $V$  con coeficientes que dependen sólo de  $r$ , cada uno de los cuales debe anularse. Del coeficiente de  $UV^2$  se obtiene

$$\frac{dk^2}{dr} = 2 \frac{(k^2 - h^2)}{r},$$

(8)

mientras que del coeficiente de  $UV$ ,

$$\frac{d(k^2 V_{rot})}{dr} = k^2 \frac{V_{rot}}{r}.$$

(9)

Eliminando  $dk^2/dr$  de (8) y (9), se tiene que

$$\frac{h^2}{k^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} (r V_{rot}).$$

(10)

Por otro lado, de la definición (5) puede verse que las dispersiones de velocidad,  $\sigma_r^2$  y  $\sigma_\theta^2$ , en las direcciones radial y tangencial, son inversamente proporcionales a  $h^2$  y  $k^2$  respectivamente. De

este modo, se puede reescribir (10) como

$$\frac{\sigma_{\theta}^2}{\sigma_r^2} = \frac{-B}{A-B}, \quad (11)$$

donde A y B, conocidas como las constantes de Oort, están definidas por

$$A = -\frac{r}{2} \frac{d\Omega}{dr} \quad (12)$$

y

$$B = -\frac{1}{2r} \frac{d(r^2\Omega)}{dr}; \quad (13)$$

siendo

$$\Omega = \frac{V_{rot}}{r} \quad (14)$$

la velocidad angular de rotación. Nótese que B es proporcional al gradiente de momento angular, y que  $B < 0$  si  $\Omega$  disminuye con  $r$  más lentamente que  $r^{-2}$ ; A, por otro lado, es la vorticidad en un sistema que rota con velocidad angular  $\Omega(r)$ .

La Ec. (11) fue obtenida por vez primera por Lindblad<sup>(20)</sup> (1927) al analizar pequeñas perturbaciones de órbitas circulares, en cuyo caso es válida para cualquier función de distribución. Oort<sup>(21)</sup> (1928) derivó la Ec.(11), en forma similar a la presentada aquí, a partir de la función de distribución elipsoidal más general en tres dimensiones.

En la Ec.(11) puede verse claramente que si la galaxia rota rígidamente a cierta  $r$ ,  $A(r) = 0$ , las dispersiones de velocidad en las direcciones radial y tangencial, serán iguales en esa  $r$ . Como en general  $A > 0$ , la dispersión radial será la mayor, como de hecho se observa en nuestra vecindad.

En la Fig.5 se distinguen, sobrepuestas a las características descritas anteriormente, variaciones ondulatorias en la curva de rotación. Durante mucho tiempo se consideraron estas "jorobas" como errores observacionales, no obstante la insistencia de Pishmish<sup>(30)</sup> (1965) en que eran variaciones reales. Hoy en día podemos asegurar que la amplitud de las ondas es mucho mayor que el error observacional.

Varias explicaciones se han propuesto para las "jorobas" de las curvas de rotación. Pishmish<sup>(31)</sup> (1975) afirma que se deben a efec-

tos de mezcla de diferentes poblaciones, mientras que Yuan<sup>(32)</sup> (1969) asegura que representan movimientos no circulares asociados a la estructura espiral. Sin embargo, Humphreys<sup>(33)</sup> (1976) encuentra que la teoría de ondas de densidad de la estructura espiral, que Yuan usa, implica desviaciones de la velocidad circular menores, por un factor de dos, que las observadas en el brazo espiral de Perseo en nuestra galaxia.

Carrasco, Serrano y Roth<sup>(34)</sup> (1980, de aquí en adelante CSR), desde una perspectiva diferente, señalan que a partir de la curva de rotación  $V_{rot}(r)$  se puede encontrar, por diferenciación numérica, la curva de vorticidad  $A(r)$  [véase la Ec.(12)]; regiones en donde  $V_{rot}$  aumenta linealmente con  $r$  se traducirán en ceros de  $A(r)$ . De esta forma, la región creciente de las "jorobas" en la curva de rotación corresponde a lugares donde la vorticidad baja bruscamente.

Analizando así las curvas de rotación de nuestra galaxia y de algunas galaxias cercanas, CSR han mostrado que los mínimos de  $A(r)$  corresponden a máximos tanto en la curva de tasa de formación estelar como en la de densidad de gas interestelar como función de distancia galactocéntrica. Esto es, ahí donde existe rotación diferencial, se forman pocas estrellas, mientras que donde el gas rota rígidamente, la formación estelar aumenta. Nótese que para una nube de un tamaño dado,  $\ell$ , el momento angular de espín de la nube es justamente  $\ell^2 A$ . De esta forma, parece que sólo nubes con poco momento angular pueden colapsarse y formar estrellas. Más específicamente, CSR muestran que, para explicar las curvas observadas, la tasa de formación de estrellas debe variar como  $A(r)^{-1}$ .

Esta relación permite entender las diferencias sustanciales entre el grupo de las galaxias elípticas y el de las espirales tanto en lo que se refiere a la tasa de formación estelar inicial, mucho mayor en las elípticas, como en lo concerniente al momento angular, mucho mayor en las espirales.

Finalmente, CSR señalan que las estrellas jóvenes, por haber nacido en una región con  $A \approx 0$ , deben tener, de acuerdo a la Ec.(11),  $\sigma_r$  igual a  $\sigma_\theta$ , y esto es justamente lo que se observa (ver p.ej., Mihalas<sup>(35)</sup>). Nuevas observaciones son necesarias para confirmar la relación entre tasa de formación de estrellas y momento angular. Esta rela-

ción permitirá construir, por otro lado, modelos de formación y evolución de galaxias que puedan confrontarse con las observaciones.

b) Estructura espiral.

Más del 60% de las galaxias brillantes muestran una estructura espiral como su característica morfológica más notable (de Vaucouleurs<sup>(36)</sup>). Como hemos visto en §III, el tipo de estructura espiral (i.e., grado de enrollamiento, de grosor y de coherencia) está fuertemente relacionado con otras propiedades de la galaxia como son la prominencia de su región nuclear y el contenido de gas y de estrellas jóvenes.

En un principio se pensó en brazos materiales que contenían siempre a las mismas estrellas y nubes de gas. Sin embargo, casi todas las galaxias rotan diferencialmente fuera de la región central y esto implica que después de unas cuantas revoluciones ( $\sim 10^8$  años cada una) el patrón espiral se enrollaría. Este dilema puede resolverse si se considera a los brazos espirales como ondas de densidad que son mantenidas por autogravitación.

Bertil Lindblad desarrolló el concepto de ondas de densidad alrededor de 1940 (véase Lindblad<sup>(37)</sup>). Sin embargo, su énfasis era cinemático, i.e., un conjunto de órbitas individuales, y no pudo tratar cuantitativamente los efectos gravitacionales colectivos en gran escala. Mucho de su trabajo precedió a la física de plasmas, cuyas técnicas dieron nuevos ímpetus a las teorías de onda de densidad, que revivieron con los trabajos de Lin y sus colaboradores a partir de 1964 (e.g., Lin y Shu<sup>(38)</sup>).

Bajo un potencial gravitacional,  $\Phi$ , axialmente simétrico e independiente del tiempo, el momento angular  $j$  y la energía

$$E_j = \frac{1}{2} \frac{j^2}{r_j^2} + \Phi(r_j) \quad , \quad (15)$$

son constantes del movimiento para órbitas circulares  $r_j = \text{constante}$ , determinadas por la condición de balance centrífugo

$$\frac{j^2}{r_j^3} = - \frac{\partial \Phi}{\partial r}(r_j) \quad . \quad (16)$$

Para una cierta  $j$ , la energía  $E$  tiene además su valor mínimo justamente

en  $r = r_j$ .

Lindblad demostró, siguiendo el tratamiento que Maxwell había desarrollado para los anillos de Saturno, que para órbitas cercanas a una órbita circular,

$$r - r_j = a \cos(\kappa t)$$

y

$$\theta - \theta_0 = \Omega_j t - \frac{\Omega_j}{\kappa} \frac{a}{r_j} \sin(\kappa t), \quad (17)$$

donde

$$a^2 = 2(E - E_j) / \kappa^2, \quad (18)$$

$$\Omega_j = j / r_j^2 \quad (19)$$

y  $\kappa$  es la frecuencia epicíclica dada por

$$\kappa^2 = \frac{3j^2}{r_j^4} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}(r_j) = -4B(A-B). \quad (20)$$

Las Ecs. (17) nos muestran que la órbita perturbada será un epiciclo, es decir, una elipse en el sistema que rota en una órbita circular con velocidad angular  $\Omega_j$  (ver Fig.6).

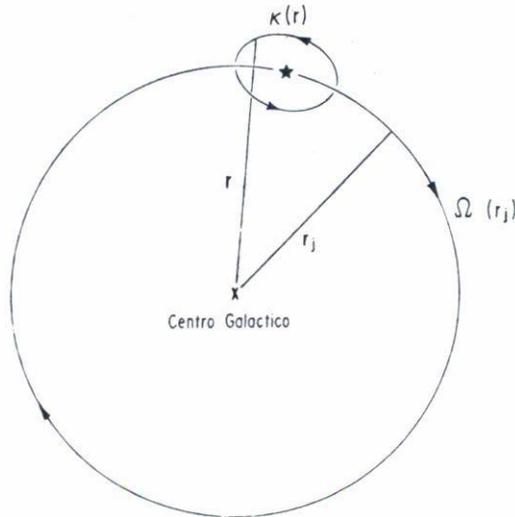


Fig.6 Órbita circular perturbada. El movimiento es un epiciclo, i.e., una elipse, recorrida con frecuencia  $\kappa$ , en un sistema que se mueve con velocidad angular  $\Omega(r_j)$ .

Lindblad se dió cuenta de que la cantidad

$$\Omega_e = \Omega - \kappa/2 \quad (21)$$

es aproximadamente constante en una región grande de la galaxia (Fig.7). Si usamos  $\Omega_e = \text{constante}$  en (17) podemos demostrar que en un marco de referencia con origen en el centro de la galaxia y rotando con velocidad angular  $\Omega_e$ , las órbitas perturbadas son aproximadamente elipses. Combinando apropiadamente estas órbitas podemos construir cualquier configuración bisimétrica (ver Fig.8), i.e., una onda de densidad que rota rígidamente con velocidad angular  $\Omega_e$ . Estas ondas son cinemáticas en la medida en que no incorporan los efectos de autogravitación que el aumento local de densidad implica.

Para lograr ondas dinámicas hay que resolver simultáneamente la ecuación de Boltzmann y la ecuación de Poisson. Partamos de un estado estacionario y axialmente simétrico, descrito por una función de distribución  $f_0$  y una hamiltoniana  $H_0$ . La evolución del sistema está dada por la ecuación de Boltzmann

$$\frac{Df_0}{Dt} = \frac{\partial f_0}{\partial t} + [f_0, H_0] = 0, \quad (22)$$

donde [ ] es el paréntesis de Poisson. Si perturbamos la función de distribución a  $f_0 + f$ , y la hamiltoniana a  $H_0 + V$ , y usamos (22), la ecuación de Boltzmann linealizada para el sistema perturbado será

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + [f_1, H_0] + [f_0, V] = 0, \quad (23)$$

mientras que la ecuación de Poisson indica que

$$\nabla^2 V = 4\pi G \int f_1 d\mu, \quad (24)$$

donde  $d\mu$  es un elemento de volumen en el espacio de velocidades. El problema es entonces determinar bajo qué condiciones existe una onda

$$V = \exp i[\chi(r) + \omega t - m\theta], \quad (25)$$

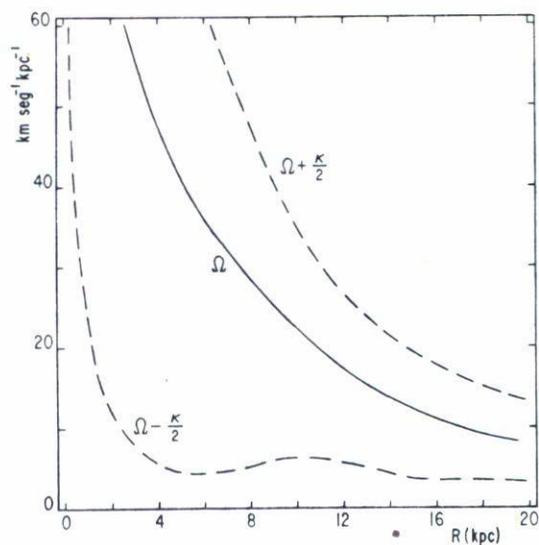


Fig.7 Velocidad angular  $\Omega$  y  $\Omega \pm \kappa/2$  donde  $\kappa$  es la frecuencia epicíclica. Nótese que en una región extendida de la galaxia,  $\Omega - \kappa/2$  es aproximadamente constante.

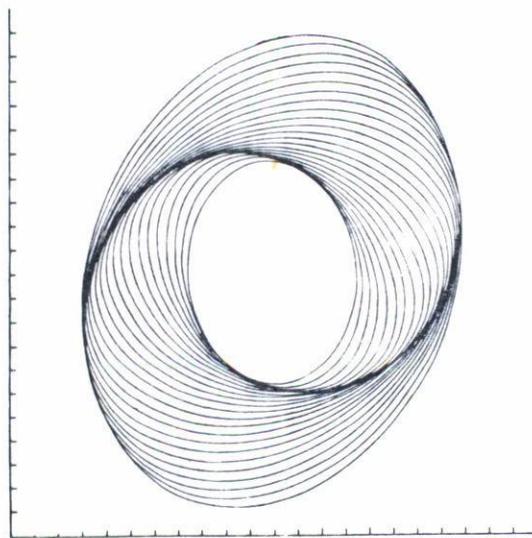


Fig.8 Onda espiral cinemática, formada con órbitas elípticas tangentes (adaptado de Cruz-González<sup>(39)</sup>).

que rota rígidamente con la frecuencia

$$\Omega_e = \frac{\omega}{m}, \quad (26)$$

donde  $m$  es el número de brazos espirales, y que es solución simultánea de (23) y (24).

El patrón espiral está descrito por los mínimos de  $V$  a cada  $r$ , i.e., por

$$\theta_e(r) = \frac{1}{m}\chi(r) + \Omega_e t - \frac{\pi}{2} \quad (27)$$

y por  $\theta_e + \pi$ ; está por tanto determinado por  $\chi$ . Más aún,  $\chi$  determina el número de onda

$$\kappa = \frac{d\chi}{dr}, \quad (28)$$

y por tanto la longitud de onda radial

$$\lambda = 2\pi/\text{Re}(\kappa). \quad (29)$$

Si  $\lambda > 0$  la onda rota en el sentido en que se desarrolla la espiral ("dirige"), mientras que si  $\lambda < 0$  rota en el sentido de enrollamiento ("sigue"), que es justamente lo que se observa.

Para resolver las ecuaciones (23) y (24) Lin y sus colaboradores (Lin y Shu<sup>(38)</sup>, Lin<sup>(40)</sup>, Shu<sup>(41)</sup>) utilizan el método WKB para encontrar ondas neutras,  $\text{Im}(\omega) = 0$ , para espirales muy cerradas ( $\lambda \ll r$ ). En esta aproximación se obtiene como solución una relación entre  $\lambda$  y la frecuencia local relativa de la onda

$$v = m(\Omega - \Omega_e)/\kappa. \quad (30)$$

En la Fig. 9 se muestra esta relación de dispersión,  $\lambda(v)$ , para nuestra galaxia. Lin et al.<sup>(42)</sup> obtienen a partir de esta relación, la estructura espiral de la Vía Láctea. Para encontrar la amplitud de la onda, se tienen que resolver (23) y (24) en el siguiente orden en  $\lambda/r$  (Shu<sup>(43)</sup>).

Kalnajs<sup>(44,45,46)</sup> en forma independiente, trata el problema

de ondas de densidad para casos más generales. Como las órbitas son doblemente periódicas, utiliza variables de acción, con lo cual la galaxia puede describirse como una colección infinita de osciladores armónicos. Kalnajs demuestra que para encontrar la solución de las ecuaciones (23) y (24) sólo hay que resolver una ecuación integral de la forma:

$$\tilde{V}(\omega) = R\tilde{V}(\omega) + \tilde{P}(\omega) \quad , \quad (31)$$

donde  $R$  es un operador integral inhomogéneo y lineal,  $\tilde{V}(\omega)$  es la transformada de Fourier de  $V$ , y  $\tilde{P}(\omega)$  depende de las condiciones iniciales (de equilibrio). La solución de la ecuación (31) da un conjunto discreto de modos en crecimiento con  $\text{Im}(\omega) < 0$ . Si se aísla el modo de crecimiento más rápido, se obtiene una espiral mucho más abierta que las de Lin. En este tratamiento la amplitud de la onda se encuentra simultáneamente al resolver la ecuación integral.

A pesar de que no se explicaba el origen de las ondas, sino solamente que su persistencia era posible, el clima era de optimismo a fines de los 60. Toomre<sup>(47)</sup> (1969) sin embargo, demostró que las ondas de densidad de Lin tienen una velocidad de grupo diferente de cero. La densidad de acción de la onda se transporta radialmente hacia adentro a  $\approx 10 \text{ Km}^{-1}$ . Así la onda de densidad desaparece después de  $10^9$  años ¡que es solamente  $\leq 1/20$  de la edad de la galaxia! Se necesita pues un mecanismo permanente de excitación de las ondas.

Los procesos que se han propuesto para ello son: perturbaciones de marea por galaxias vecinas (Toomre<sup>(47,48)</sup>, Toomre y Toomre<sup>(49)</sup>), una barra central (e.g., Feldman y Lin<sup>(50)</sup>), inestabilidad gravitacional local (Lin<sup>(51,52)</sup>), transferencia de momento angular (Lynden-Bell y Kalnajs<sup>(53)</sup>, Kalnajs<sup>(54)</sup>), inestabilidad de dos corrientes, análoga a la de los plasmas (Marochnick y Suckov<sup>(55)</sup>; Marochnick<sup>(56)</sup> et al., Kato<sup>(57)</sup>) y actividad eruptiva del núcleo galáctico (Ambartsumian<sup>(58)</sup>, Arp<sup>(59)</sup>, Oort<sup>(60)</sup>, van der Kruit<sup>(61)</sup>).

Para mayores detalles puede consultarse el artículo de revisión de Wielen<sup>(62)</sup>. Aquí quisiera esbozar solamente el argumento de Lynden-Bell y Kalnajs. Si una galaxia espiral obedece una especie de "2a. Ley de la Termodinámica", tenderá en su evolución a aumentar su energía en movimientos aleatorios. Si la energía total es constante,

esto puede suceder sólo a través de disminuir la energía rotacional; lo que a su vez se logra si hay transporte de momento angular hacia afuera de la galaxia. Lynden-Bell y Kalnajs proponen que la interacción de las estrellas con la onda espiral en las resonancias pueden producir este efecto de transporte de momento angular. Encuentran además, que esto sucede sólo si la onda espiral rota en el sentido de enrollamiento, que es justamente lo que se observa.

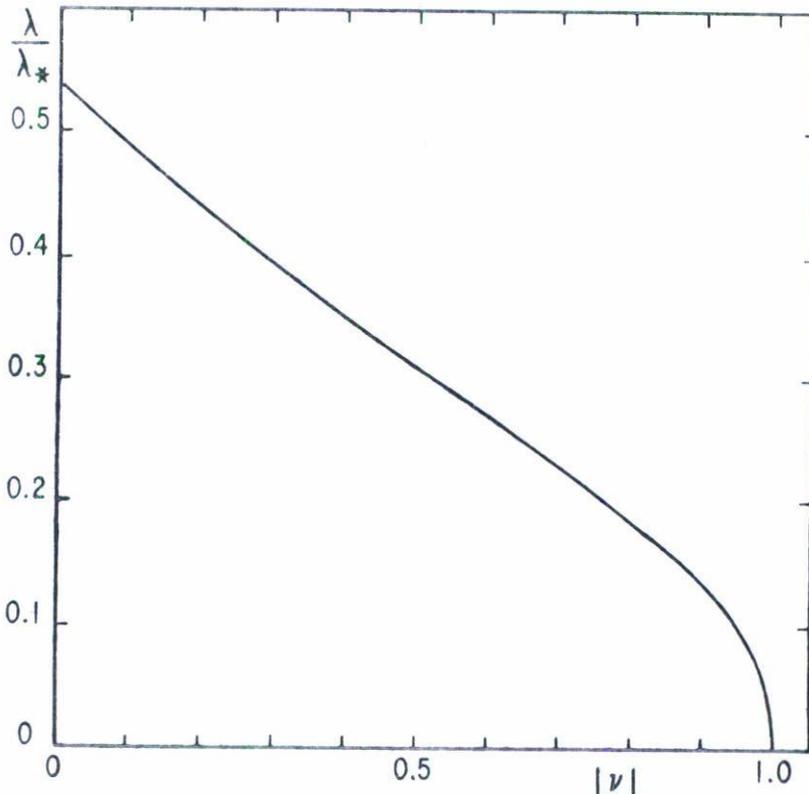


Fig.9 Relación de dispersión  $\lambda(\nu)$  para ondas de densidad en la aproximación espiral muy cerrada (Lin y Shu).  $\lambda_*$  es una unidad local dada por  $\lambda_* = 4\pi^2 G\sigma/\kappa^2$  donde  $\sigma$  es la densidad superficial y  $\kappa$  la frecuencia epicíclica;  $\nu$  está dada por la ecuación (30).

## V. ROTACION EN GALAXIAS ELIPTICAS

Justo después de tratar la ley de la gravitación, Newton<sup>(63)</sup> discute en el libro III de los Principia cómo debemos esperar que la rotación de la Tierra tenga como efecto hacerla ligeramente oblata. Newton argumenta que si perforamos dos canales de la superficie al centro de la Tierra, uno en el polo y otro en el ecuador, con longitudes  $a$  y  $b$  respectivamente, y los llenamos de agua; entonces la homogeneidad y una condición de equilibrio implican que las dos columnas pesan lo mismo, esto es

$$\frac{1}{2} a g_{ec} (1 - \zeta) = \frac{1}{2} b g_{polo} , \quad (32)$$

donde  $\zeta$  es la razón de las aceleraciones centrífuga y gravitacional en la superficie. Pero es fácil demostrar, y Newton lo había hecho, que para un cuerpo ligeramente oblato,

$$\frac{g_{polo}}{g_{ec}} \approx 1 + \frac{\epsilon}{5} , \quad (33)$$

donde  $\epsilon$  es la elipticidad (ver Ec.4). Así pues de las Ecs. (32) y (33)

$$\epsilon = \frac{5}{4} \zeta . \quad (34)$$

Como Newton sabía  $\zeta$ , pudo entonces estimar la elipticidad de la Tierra. Como es bien sabido es hasta 1738 cuando Laplace y Clairaut determinaron a partir de medidas geodésicas que, en efecto, la Tierra estaba achatada por los polos.

Con el mismo truco de los canales, Mc Laurin<sup>(64)</sup> demostró en 1762 que para líquidos rotantes en equilibrio de forma esferoidal

$$\frac{\Omega^2}{4\pi G\rho} = \frac{(1 - e^2)^{1/2}}{e^3} 2(3 - 2e^2) \arcsen(e) - 6 \frac{(1 - e^2)}{e^2} \quad (35)$$

donde  $e$  es la excentricidad

$$e = [1 - (\text{eje chico/eje grande})^2]^{1/2} \quad (36)$$

En 1834 Jacobi<sup>(65)</sup> demostró que si  $e > 0.81$  hay otra familia de elipsoides, esta vez triaxiales, que pueden rotar en equilibrio. Para una cierta  $e$ , el elipsoide de Jacobi rota más lento que el correspondiente de Mc Laurin. Esto se muestra en la Fig.10.

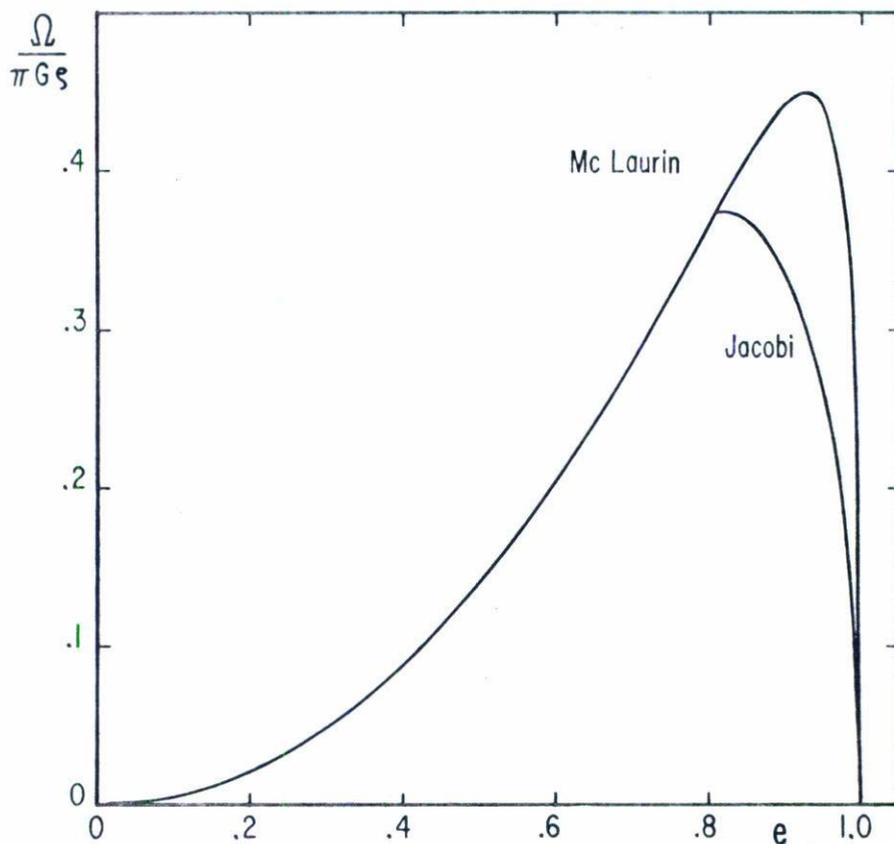


Fig.10 Velocidad angular de rotación  $\Omega$ , en unidades de  $\pi G \rho$ , como función de la elipticidad  $e$ , para los elipsoides de McLaurin y de Jacobi.

El problema de la figuras rotantes en equilibrio es relevante para estudiar la rotación de las galaxias elípticas ya que aplicando un razonamiento inverso al de Newton podemos concluir que si no son esféricas, es que necesariamente están rotando. Naturalmente las condiciones  $\Omega = \text{const}$  y  $\rho = \text{const}$ , implícitas en el estudio de los elipsoides de

Mc Laurin y de Jacobi, no se cumplen en los sistemas estelares. Sin embargo se han hecho estudios más detallados, con resultados similares, que relajan las condiciones de homogeneidad (p.ej. Aikawa<sup>(66)</sup>, Hurley y Roberts<sup>(67)</sup>) y de rotación rígida (Stoeckly<sup>(68)</sup>, Bodenheimer y Ostriker<sup>(69)</sup>). Estos últimos autores en particular, muestran que, a grandes rasgos, el comportamiento de secuencias politrópicas en rotación diferencial es esencialmente el mismo que en el caso  $\Omega = \text{const.}$ ,  $\rho = \text{const.}$ , descrito con anterioridad (véase también Chandrasekhar y Lebovitz<sup>(70)</sup>).

Modelos de la estructura y de la formación de galaxias elípticas se contruyeron, pues, bajo la suposición de que la elipticidad es causada por rotación (King<sup>(71)</sup>, Prendergast y Tomer<sup>(72)</sup>, Wilson<sup>(73)</sup>, Gott<sup>(74,75)</sup>, Larson<sup>(76)</sup>). Desgraciadamente, era difícil comparar estos modelos dinámicamente, con las observaciones: la curva de rotación en una galaxia elíptica debe obtenerse a partir de líneas de absorción, lo que dificulta notablemente la tarea.

En 1975, sin embargo, Bertola y Capaccioli<sup>(77)</sup> miden la curva de rotación de una galaxia elíptica, NGC 4697, más allá del punto de velocidad máxima. Sorpresivamente, la velocidad medida indicaba que la rotación no es suficiente como para causar el achatamiento observado. Esta inconsistencia dinámica quedó confirmada cuando en 1977 Illingworth<sup>(78)</sup> publicó curvas de rotación de 13 galaxias elípticas más, mostrando, todas ellas, velocidades de rotación muy pequeñas. Véase también Schechter y Gunn<sup>(79)</sup> (1979).

A partir de entonces se ha desarrollado un gran esfuerzo teórico para concebir mecanismos no rotacionales de achatamiento. Binney<sup>(80)</sup> (1978), por ejemplo, analiza los efectos geométricos y de anisotropía en la distribución de velocidades. Tomando el primer momento de la ecuación de Boltzmann, Chandrasekhar<sup>(81)</sup> (1964) prueba que

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{ij}}{dt^2} = 2T_{ij} + W_{ij} + D_{ij} \quad , \quad (37)$$

(Teorema Virial Tensorial). En (37),

$$T_{ij} = \frac{1}{2} \int \rho \langle V_i \rangle \langle V_j \rangle dV \quad , \quad (38)$$

$$W_{ij} = - \int \rho X_i \frac{\partial \phi}{\partial X_j} dV \quad (39)$$

y

$$D_{ij} = \int \rho \langle (V_i - \langle V_i \rangle)(V_j - \langle V_j \rangle) \rangle dV \quad (40)$$

representan tensores de energía cinética, gravitacional (bajo un potencial  $\phi$ ), e interna.

Por otro lado,

$$I_{ij} = \int \rho X_i X_j dV \quad (41)$$

es una especie de tensor de inercia.

Para un marco de referencia en el cual la forma del sistema rota con velocidad angular  $\omega$  alrededor del eje z, es fácil probar que

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{ij}}{dt^2} = \omega^2 \begin{pmatrix} \delta I & 0 & 0 \\ 0 & -\delta I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (42)$$

donde

$$\delta I = I_2 - I_1 > 0.$$

Es conveniente dividir a  $D_{ij}$ , el tensor de energía en movimientos aleatorios, en

$$D_{ij} = P\delta_{ij} + \tilde{D}_{ij}. \quad (43)$$

$P = 1/3$  (traza  $D$ ) es la presión, y  $\tilde{D}_{ij}$  representa la energía debida a anisotropía en la distribución de velocidades. Usando las ecuaciones (37), (42) y (43) para el caso de un elipsoide, Binney demuestra que la razón de la velocidad de rotación,  $V_{rot}$ , a la dispersión,  $\sigma$ , está dada por

$$\frac{V_{rot}}{\sigma} = \left| \frac{1}{3} \frac{1+3/2Q_3}{1-\alpha} - 1 - \frac{3}{2} Q_1 \right|^{-1/2}, \quad (44)$$

donde

$$Q_i = - \frac{\tilde{D}_{ij}}{T_{11}+T_{22}+T_{33}} \quad (45)$$

es la anisotropía en unidades de energía rotacional, y  $\alpha$  es un factor que depende de la razón de los ejes, pero que es independiente del perfil radial de densidad. Una galaxia oblata tendrá  $\alpha$  más grande y por tanto  $V_{rot}$  más grande que una galaxia prolata. Un sistema triaxial se comporta de forma intermedia. Esto se ilustra en la Fig. 11. Otra forma de reducir  $V_{rot}/\sigma$ , a una  $\epsilon$  dada, es aumentar la anisotropía, i.e., tomar  $Q_1 \neq 0$ .

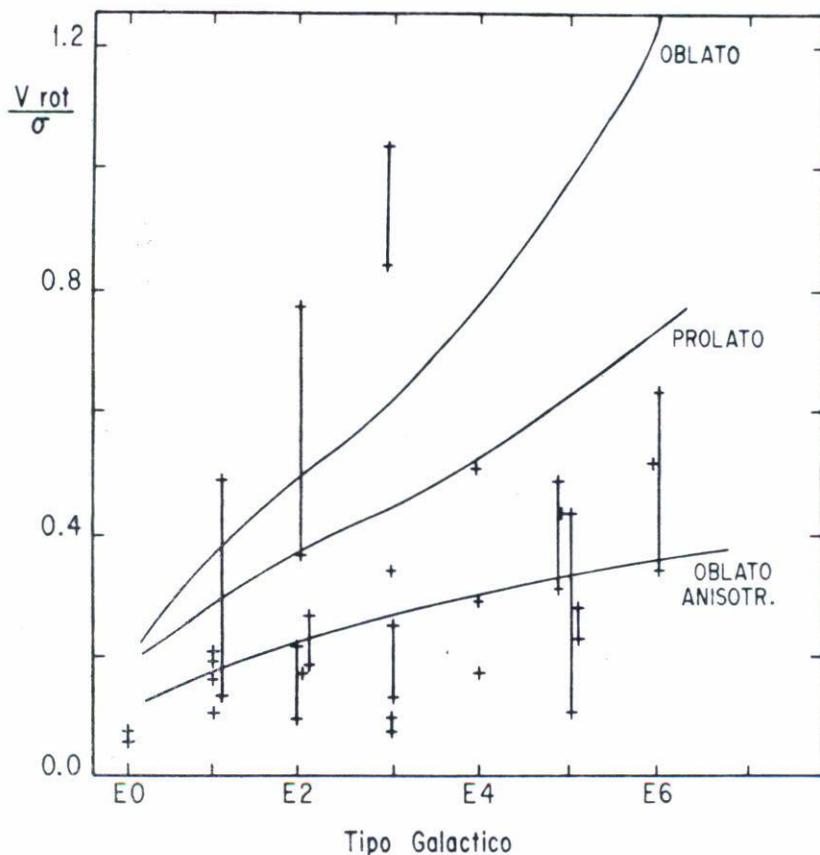


Fig. 11 Razón de velocidad de rotación,  $V_{rot}$ , a la dispersión de velocidades,  $\sigma$ , como función de la elipticidad en galaxias elípticas. Las cruces son puntos observados y las líneas son modelos descritos por la Ec. (44). (Adaptado de Capaccioli<sup>(82)</sup>).

Es claro de la Fig.11 que un modelo oblató isotrópico, el más natural intuitivamente, no es compatible con las observaciones. Es necesario aceptar o bien que las galaxias elípticas no son oblatas, o bien que la distribución de velocidades es marcadamente anisotrópica.

En cuanto a la primera posibilidad, galaxias triaxiales o incluso prolatas, Schwarzschild<sup>(83)</sup> ha demostrado que son configuraciones estables por  $10^{11}$  años. El estudio de las órbitas individuales indica la presencia de una tercera integral de movimiento, que debe añadirse a la energía y al momento angular (para la 3a. integral, véase, e.g., Serrano<sup>(84)</sup>). Triaxialidad en las galaxias elípticas puede también explicar, por otro lado, la rotación observada de sucesivas isofotas (p.ej., Williams y Schwarzschild<sup>(85)</sup>, Strom y Strom<sup>(86)</sup>) así como la correlación entre máximo achatamiento y máxima rotación de isofotas (Benacchio y Galleta<sup>(87)</sup>).

En cuanto a la anisotropía en las velocidades, Binney<sup>(79)</sup> arguye que ésta viene desde la formación de las galaxias, eliminando así la posibilidad de una configuración inicial de alto momento angular y una formación con disipación. Sin embargo, Sanders y van Albada<sup>(88)</sup> demuestran que la dispersión resonante de estrellas en una galaxia triaxial tiene el efecto de producir una distribución anisotrópica de velocidades. Esta pues, no refleja las condiciones iniciales.

Para terminar hay que mencionar que ni la triaxialidad ni la anisotropía son aspectos bien entendidos o resueltos y que se investiga activamente en la actualidad para lograr una mejor comprensión de estos problemas.

#### REFERENCIAS

1. Brosche, P., *Zeitschrift für Astrophysik*, 57 (1963) 143.
2. Wesson, P. S., *Astronomy*, 9 (1981) 66.
3. Hartman, W.K. y Larson, S.M., *Icarus*, 7 (1967) 257.
4. Fish, F. F., *Icarus*, 7 (1967) 251.
5. Takase, B. y Kinoshita, H., *Publ. Astron. Soc. Japan*, 19 (1967) 40.
6. Ozernoy, L. M., *Astron. Tsirk*, No. 405 (1967).
7. Kraft, R.P., *Spectroscopic Astrophysics*, ed. G. Herbig (Univ. of California Press: Berkeley) (1970) p.385.
8. Dai, W.S., Lin, R.L. y Hu, F.X., *Acta Astron. Sinica*, 19 (1978) 24.
9. Wesson, P.S., *Astron. Astrophys.*, 80 (1979) 296.
10. Carrasco, L., Roth, M. y Serrano, A., *Bull. Amer. Astr. Soc.*, 12 (1980) 445.

11. Carrasco, L., Roth, M. y Serrano, A., enviado a *Astron. Astrophys.*, (1981).
12. Peebles, P.J.E., *Astrophys. J.*, 155 (1969) 393.
13. Gott, J.R. y Thuan, T.X., *Astrophys. J.*, 223 (1978) 426.
14. Sharp, N.A., Lin, D.N.C. y White, S.D.M., *Mon.Not. R. Astr. Soc.*, 187 (1979) 287.
15. Withney, C.A., *The Discovery of our Galaxy*, (A.A. Knopff: New York) (1971).
16. Kant, *General History of Nature and Theory of the Heavens*, pub.1798 (1755)
17. Shapley, H., *Astrophys. J.*, 48 (1918) 154.
18. Hubble, E., *Astrophys. J.*, 64 (1926) 321.
19. Hubble, E., *Proc. Natl. Academ. Sci. U.S.A.*, 15 (1929) 168.
20. Lindblad, B., *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 87 (1927) 553.
21. Oort, J.H., *Bull. Astr. Netherlands*, 4 (1928) 269.
22. Slipher, V.M., *Lowell Obs. Bull.*, II No. 12 (1914).
23. Pease, F.G., *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, 2 (1916) 517.
24. Roberts, M.S. y Rots, A.H., *Astron. Astrophys.*, 6 (1973) 105.
25. Krumm, N. y Salpeter, E.E., *Astron. Astrophys.*, 56 (1977) 465.
26. Bosma, A., En *IAU Symp 77, Structure and Properties of Nearby Galaxies*, eds. E.M. Berkhijzen, R.Wielebinski (Dordrecht: Reidel) (1978).
27. Kruit, P.C. van der y Allen, R.J., *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 16 (1978) 103.
28. Boltzmann, L., *Vorlesungen uber Gastheorie I*, (J.A. Bath: Leipzig) (1895) p. 139.
29. Schwarzschild, K., *Göttingen Nachrichten*, (1907) p. 614.
30. Pishmish, P., *Bol. Obs. Tonantzintla y Tacubaya*, 4 (1965) 8.
31. Pishmish, P., *Proc. First Europ. Astr. Meeting*, eds. B. Barbanis y J.D. Hadjinetusu (Springer Verlag: Berlin) (1975) p. 319.
32. Yuan, C., *Astrophys. J.*, 158 (1969) 871.
33. Humphreys, R.M., *Astrophys. J.*, 206 (1976) 114.
34. Carrasco, L, Serrano, A. y Roth, M., *Bull. Amer. Astr. Soc.*, 12 (1980) 445.
35. Mihalas, D., *Galactic Astronomy*, (Freeman: San Fco.) (1967).
36. Vaucouleurs G. de, *Astrophys. J. Suppl.*, 8 (1963) 31.
37. Lindblad, B., *Handbuch der Physik*, 53 (1959) 21.
38. Lin, C.C. y Shu, F.H., *Astrophys. J.*, 140 (1964) 646.
39. Cruz-González, C., Tesis, *Sussex University* (1975).
40. Lin, C.C., *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 55 (1966) 229.
41. Shu, F.H., Tesis, *Harvard Univ.* (1968).
42. Lin, C.C., Yuan C. y Shu, F. H., *Astrophys. J.*, 155 (1969) 721.
43. Shu, F.H., *Astrophys. J.*, 160 (1970) 89.
44. Kalnajs, A.J., Tesis, *Harvard University* (1965).
45. Kalnajs, A.J., *Astrophys. J.*, 166 (1971) 275.
46. Kalnajs, A.J., *Astrophys. J.*, 175 (1972) 63.
47. Toomre, A., *Astrophys. J.*, 158 (1969) 899.
48. Toomre, A., *The Spiral Structure of Our Galaxy*, *IAU Symp. 38*, eds.W. Becker y G. Contopoulos (Dordrecht: Reidel) (1970) p.334.
49. Toomre, A. y Toomre, J., *Astrophys. J.*, 178 (1972) 623.
50. Feldman, S.I. y Lin, C.C., *Studies in Appl. Math.*, 52 (1973) 1.
51. Lin, C.C., *The Spiral Structure of Our Galaxy*, *IAU Symp. 38*, eds. W. Becker y G. Contopoulos (Dordrecht: Reidel) (1970) p. 377.

52. Lin, C.C., En Highlights of Astronomy, Vol.2, ed.C.de Jager (Dordrecht: Reidel) (1971) p. 88
53. Lynden-Bell, D. y Kalnajs, A.J., Mon Not. R. Astr. Soc., 157 (1972) 1.
54. Kalnajs, A. J., Proc. Astr. Soc. Australia, 2 (1973) 174.
55. Marochnick, L.S. y Suchkov, A.A., Astrophys. Space Sci., 4 (1969) 317.
56. Marochnick, L.S., Mishurov, Y.N. y Suchkov, A.A., Astrophys. Space Sci. 19 (1972) 285.
57. Kato, S., Publ. Astr. Soc. Japan, 25 (1973) 231.
58. Ambartsumian, V.A., En La Structura et L'Evolution del'Univers, ed. R. Stoops (Bruselas: Solvay Inst.) (1958) p.241.
59. Arp. H., Astron. Astrophys., 3 (1969 a) 418; Sky and Tel., 38 (1969 b) 385.
60. Oort, J.H., Commentarii (Pontificia Acta Sci.) 2, No.55 (1973) 1.
61. Kruit, P.C. van der, Nature Phys. Sci., 243 (1973) 127.
62. Wielen, R., Pub. Astr. Soc. Pacific, 86 (1974) 341.
63. Newton, I., Principia, ed. F. Cajori (Univ. of California Press: Berkeley) (1946).
64. McLaurin, C., A Treatise on Fluxions (1942).
65. Jacobi, C.G.J., Peggendorff Ann, der Physik and Chemie, 33 (1834) 229.
66. Aikawa, T., Sci. Reports Tôhoku Univ. (1), 54 (1971) 13.
67. Hurley, M. y Roberts, P.H., Astrophys. J., 140 (1964) 583.
68. Stoeckly, R., Astrophys. J., 142 (1965) 208.
69. Bodenheimer, P. y Ostriker, J.P., Astrophys. J., 180 (1973) 159.
70. Chandrasekhar, S. y Lebovitz, N.R., Astrophys. J., 135 (1962) 38.
71. King, I. R., Astron. J., 71 (1966) 54.
72. Prendergast, K.H. y Tomer, E., Astron. J., 75 (1970) 674.
73. Wilson, C.P., Astron. J., 80 (1975) 175.
74. Gott, J.R., Astrophys. J., 186 (1973) 481.
75. Gott, J.R., Astrophys. J., 201 (1975) 296.
76. Larson, R.B., Mon. Not. R. Astr. Soc., 173 (1975) 671.
77. Bertola, F. y Capaccioli, M., Astrophys. J., 200 (1975) 439.
78. Illingworth, G., Astrophys. J., 218 (1977) L43.
79. Schechter, P.L. y Gunn, J., Astrophys. J., 229 (1979) 472.
80. Binney, J., Mon Not. R. Astr. Soc., 183 (1978) 501.
81. Chandrasekhar, S., En Lectures in Theoretical Physics, ed. Britten W.E., Univ. of Colorado Press, Boulder (1964).
82. Capaccioli, M., En Photometry, Kinematics and Dynamics of Galaxies, ed. D. S. Evans (Univ. of Texas: Austin) (1979).
83. Schwarzschild, M., Astrophys. J., 232 (1979) 236.
84. Serrano, A., Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México (1973).
85. Williams, T.B. y Schwarzschild, M., Astrophys. J., 227 (1978) 56.
86. Strom, K.M. y Strom, S.E., Astron. J., 83 (1978 a) 732; 83 (1978 b) 1239.
87. Benacchio, L. y Galleta, G., Mon. Not. R. Astr. Soc., 193 (1980) 885.
88. Sanders, R.H. y Albada, T.S. van, Mon Not. R. Astr. Soc., 189 (1979) 791.