revista mexicana de física 27 no. 3 (1981) 449-474 congreso enseñanza

LAS MATEMATICAS EN LA ENSEÑANZA DE LA FISICA

E. Ley-Koo†

Inst. de Física, UNAM
Apdo. Postal 20-364
México 20, D.F.

RESUMEN

Se analizan e ilustran algunos aspectos curriculares, históricos, conceptuales y didácticos del papel que juegan las matemáticas en el estudio de la física. Aunque nuestro interés está enfocado en el nivel profesional, resulta conveniente, especialmente desde el punto de vista didáctico, incluir una discusión de lo que se espera del estudiante que recientemente ha completado el nivel medio superior.

ABSTRACT

Several aspects, curricular, historical, conceptual and didactic, of the role that mathematics play in the study of physics are analyzed. Although our interest is focussed at the professional level, it is convenient, specially from the didactic point of view, to include a discussion of what is to be expected from a student that has recently completed a high school education.

† Asesor del Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares.

I. INTRODUCCION

El papel múltiple de las matemáticas —como lenguaje, marco conceptual, herramienta de razonamiento lógico y herramienta de cálculo— en el desarrollo de la física, es reconocible y aprovechable en el estudio y la enseñanza de ambas disciplinas. En la presente contribución se destaca la importancia de la primera en la enseñanza de la segunda, analizando e ilustrando aspectos curriculares, históricos, conceptuales y didácticos de las relaciones entre ellas.

En la Sección II se analiza un plan de estudios de la carrera de físico, señalando la concatenación de los cursos de física y matemáticas en forma global e ilustrando el desarrollo y la aplicación de algunos temas comunes a materias de una y otra disciplinas.

La Sección III incluye algunas observaciones históricas sobre el desarrollo de conceptos y/o temas de matemáticas, con énfasis especial en aquéllos que han surgido del estudio de fenómenos físicos. También se reconoce que los creadores de algunos de esos conceptos y/o temas han contribuido simultáneamente al desarrollo de ambas disciplinas.

En la Sección IV se presentan algunos materiales didácticos que pueden ser de interés para estudiantes y profesores de la carrera de físico. En la Parte A se hace referencia a la Bibliografía Comentada, publicada por CONACYT. La Parte B corresponde a un repaso de las matemáticas y la física a nivel medio superior. Y la Parte C comprende las funciones comunes de la física.

II. UN PLAN DE ESTUDIOS DE LA CARRERA DE FISICO

En esta sección mi intención es destacar e ilustrar la relación entre los cursos de matemáticas y física en la carrera de físico. Para ser específico tomo como referencia el plan de la Facultad de Ciencias de la UNAM[1], dentro del cual he estado trabajando; pero, desde luego, se puede realizar un análisis similar utilizando los planes de otras escuelas. La Tabla I presenta dicho plan en forma resumida, indicando las materias obligatorias de física y matemáticas correspondientes a cada uno de los nueve semestres; en los semestres 4, 5, 8 y 9 el estudiante debe

TABLA I

1. Física General
   Cálculo Diferencial e Integral I
   Geometría Analítica I
2. Física Clásica I (Mecánica)
   Cálculo Diferencial e Integral II
   Algebra Superior I
3. Física Clásica II (Ondas, Fluídos, Calor)
   Cálculo Diferencial e Integral III
   Geometría Analítica II
   Algebra Superior II
4. Física Clásica III (Optica)
   Cálculo Diferencial e Integral IV
   Física Moderna I
5. Física Clásica IV (Electricidad)
   Ecuaciones Diferenciales I
   Física Moderna II
6. Física Teórica I (Mecánica)
   Física Teórica II (Termodinámica)
   Algebra Lineal I
   Estadística Descriptiva
7. Física Teórica III (Electromagnetismo)
   Electrónica I
   Variable Compleja I
   Funciones Especiales y Transformadas Integrales
8. Física Teórica IV (Introducción a la Mecánica Cuántica)
   Laboratorio I
9. Física Moderna III
   Laboratorio II

MATERIAS OPTATIVAS DE MATEMATICAS

Matemáticas Aplicadas
Métodos Numéricos y Programación
Probabilidad y Estadística en la Física
Tensores y Grupos
Introducción a la Teoría de Grupos y sus Aplicaciones
El Grupo de Lorentz
Biofísica Matemática

TABLA I. Plan de estudios de la carrera de físico de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

cursar algunas materias optativas, entre las que se ofrecen algunas de matemáticas como las que aparecen explícitamente, y en el semestre 10 se debe desarrollar una tesis para obtener el título profesional.

Dentro de este plan se pueden distinguir la primera mitad de la carrera (semestres 1-5) y la segunda (semestres 6-9), en las cuales los conocimientos de matemáticas respectivos determinan hasta cierto punto el rigor y la rapidez con que se pueden formular y asimilar los conocimientos de física. Esto se puede apreciar especialmente en la mayor proporción de cursos de matemáticas al principio de cada una de esas mitades. Correspondientemente, el curso de Física General del primer semestre prácticamente hace uso sólo de las matemáticas con que llegan del bachillerato los estudiantes, y sobre las cuales digo algo en la Sección IVB. En la primera mitad de la carrera se cubren en paralelo los conocimientos de Física Clásica I-IV y de Cálculo Diferencial e Integral I-IV, Geometría Analítica I-II y Algebra Superior I-II; hacia el final se tienen los cursos introductorios de Física Moderna I-II y el curso de Ecuaciones Diferenciales I, cuyo contenido es fundamental para la segunda mitad de la carrera. Efectivamente, dentro de ésta, destacan los cursos de Física Teórica I-IV; se tienen además otros cuatro cursos que podemos llamar de Métodos Matemáticos de la Física, así como los cursos de Electrónica I, Física Moderna III y Laboratorios (de Física Moderna) I-II. Con respecto a las materias optativas, la de Métodos Numéricos y Programación ocupa un lugar especial por su aplicabilidad y necesidad generales, pudiendo cursarla desde el cuarto o quinto semestres; las otras, sean de matemáticas o de física, dependen de intereses más específicos.

Mi participación dentro de este plan de estudios ha consistido en impartir los cursos de Física Clásica I, Física Clásica II, Funciones Especiales y Transformadas Integrales y Física Moderna III. A manera de ilustración me referiré a algunos temas de matemáticas que hay que cubrir en los cursos de física y al uso de ejemplos de física en el curso de matemáticas.

En el programa de Mecánica aparece explícitamente un capítulo sobre *vectores*, aunque este tema también aparece posteriormente en una forma u otra, en los programas de materias de matemáticas, por ejemplo, como *Espacios Vectoriales* en Algebra Superior I y en Algebra Lineal I, y como *Espacios Euclídeos* en Cálculo Diferencial e Integral III. Desde luego el enfoque, tratamiento y grado de abstracción en el estudio del tema es diferente en cada una de esas materias. El estudio de vectores en el contexto de la mecánica es elemental y directamente conectado con la descripción de movimientos, donde aparecen ejemplificados a través de los vectores de posición, desplazamiento, velocidad, aceleración, fuerza, cantidad de movimiento, etc. Por supuesto, la familiaridad con estas situaciones puede y debe ser aprovechada en las formulaciones más avanzadas y más abstractas; y también dentro de tales formulaciones, más generales y más rigurosas, se puede reconocer el caso particular de aquéllas. Desde luego las operaciones con vectores —como la suma, la resta, el producto escalar, el producto vectorial, la derivación con respecto al tiempo, la integración en el tiempo y la integración a lo largo de una trayectoria— permiten generar otras cantidades interesantes que, en el caso de la mecánica, además de los vectores antes mencionados, incluyen el trabajo de una fuerza, el momento angular, la torca, etc. A estas alturas en el curso de Mecánica se pueden aprovechar y reforzar conocimientos de los cursos de Cálculo Diferencial e Integral I y II, en los cuales se incluyen como aplicaciones los siguientes temas: conceptos de velocidad y rapidez de cambio; caída libre y tiro parabólico; trabajo y energía; conservación de energía para una partícula sometida a un potencial; movimiento de partículas en un plano; Leyes de Kepler.

El curso de Física Moderna III incluye un capítulo sobre Teoría de la Relatividad, el cual considero que debe ser tratado a un nivel avanzado y en forma cuantitativa, ya que en el curso de Física Moderna I ha sido estudiado a un nivel elemental y más bien cualitativo. Entonces se requiere que el estudiante tenga conocimientos sobre *tensores*, lo cual no ocurre en general de acuerdo con el plan vigente, excepto para quienes han tomado el curso optativo correspondiente; por lo tanto, dentro del curso de Física Moderna III se lleva a cabo el estudio de *tensores*, aprovechando al máximo los conocimientos previos y afines especialmente de Algebra Lineal I. En este estudio el objetivo principal es familiarizar al estudiante con las propiedades de transformación de los tensores, las operaciones que se pueden realizar con ellos y la notación respectiva. Lo anterior permite reconocer la naturaleza tensorial de las diferentes cantidades físicas en el espacio-tiempo, o sea sus propiedades de transformación al pasar de un sistema de referencia inercial a otro, así como expresar las leyes de la física en forma obviamente covariante. También se reconocen las propiedades de grupo de las transformaciones de Lorentz. En la parte de relatividad general se introduce el tensor métrico, se construyen los tensores de curvatura y se establece su relación con el tensor de esfuerzos a través de la ecuación de campo de Einstein.

Los cursos de Variable Compleja I y Funciones Especiales y Transformadas Integrales son los últimos cursos formales de matemáticas de la carrera de físico, como se puede ver en la Tabla I. Los conocimientos correspondientes son de gran utilidad en el estudio de la Teoría Electromagnética y de la Mecánica Cuántica correspondientes a los cursos de Física Teórica III y IV. Al inicio del curso de F.E.T.I. he dedicado un par de clases para discutir junto con los alumnos lo que llamo las Funciones Comunes de la Física, las cuales son ya familiares para ellos y nos sirven como punto de referencia en el estudio de las Funciones Especiales. Estas se introducen como soluciones de algunas ecuaciones diferenciales de la física —como son las ecuaciones de Laplace, de Poisson, de Helmholtz, de onda clásica, de onda de Schrödinger dependiente e independiente del tiempo— en diferentes dimensiones y con diferentes condiciones iniciales y/o de frontera. Algunas funciones comunes y las funciones especiales comparten la propiedad de formar conjuntos linealmente independientes; pero, mientras aquéllas pueden no ser cuadráticamente integrables, las segundas sí lo son y además forman conjuntos ortogonales. De hecho estos conjuntos de funciones constituyen bases completas y se pueden usar combinaciones lineales de las mismas para representar funciones arbitrarias, en analogía con las representaciones en series de potencias o en series de Fourier; los coeficientes de tales series son fáciles de obtener aprovechando la propiedad de ortogonalidad de la base. Conviene reconocer que algunas de las ecuaciones diferenciales antes mencionadas son o conducen a ecuaciones lineales homogéneas, las cuales definen problemas de eigenvalores para las condiciones de frontera impuestas; entonces, las funciones especiales corresponden a modos característicos del sistema y la solución más general es una superposición de los mismos. Obviamente aquí se manifiesta la validez del principio de superposición, el cual sabemos que efectivamente opera en los fenómenos electromagnéticos y cuánticos, entre otros. Como ejemplo de tales superposiciones y su interpretación física podemos mencionar el caso de polinomios de Legendre que en el caso electrostático corresponden a diferentes contribuciones multipolares y en el caso cuántico a estados con momentos angulares bien definidos. Por otra parte, la solución de las ecuaciones diferenciales inhomogéneas también se puede desarrollar tomando como base las funciones especiales de la ecuación homogénea correspondiente, así como interpretar físicamente término a término. Alternativamente, la solución se puede expresar como una integral sobre el término inhomogéneo por el propagador o función de Green correspondiente. Esta última es la solución para una fuente puntual como término inhomogéneo y la integral da el efecto de superposición para la fuente asociada al término inhomogéneo específico. La conexión entre estas dos formas alternativas de la solución permite también obtener una representación de la función de Green en términos de una serie de funciones especiales. Por ejemplo, en el caso electrostático, la función de Green corresponde al potencial electrostático de una carga puntual unitaria, el cual se puede expresar a través de la serie del desarrollo multipolar; incidentalmente esta relación corresponde matemáticamente a la función generadora de los polinomios de Legendre. Por lo que se refiere a las transformadas integrales, por ejemplo las transformadas de Fourier, éstas se pueden introducir como la extensión natural de los coeficientes de una serie de Fourier cuando el intervalo de interés tiende a infinito; entonces en vez de un número infinito y numerable de coeficientes de Fourier se tiene la transformada de Fourier que depende de la variable conjugada que varía continuamente en un intervalo también infinito, y la función original queda expresada no como una serie sino como una integral sobre esa variable conjugada del producto de la transformada de Fourier y la función base de Fourier. Si en vez de la base de Fourier se tienen otras funciones base, en forma análoga se obtienen las transformadas integrales correspondientes. En mecánica cuántica las funciones de onda en las representaciones espacial y de cantidad de movimiento son transformadas de Fourier la una de la otra, siendo las funciones base eigenfunciones de la cantidad de movimiento. Una relación similar existe entre las amplitudes de onda espacial y de número de onda que describen otros fenómenos ondulatorios; por ejemplo, sonido, ultrasonido, ondas electromagnéticas visibles, rayos X, etc.

Aunque en esta sección he tomado como ejemplos específicos algunos de los cursos que he impartido, es claro que se puede llevar a cabo un análisis sistemático de las matemáticas requeridas en los diversos cursos de física, así como de las posibles aplicaciones en la descripción de fenómenos físicos de los diversos cursos de matemáticas. Aunque idealmente convendría que hubiera una hilación gradual y lógica entre ambos tipos de cursos, e incluso más específicamente en los temas afines, en la práctica tal situación no necesariamente ocurre. Entonces es necesario que tanto el maestro como los estudiantes estén alertas para detectar este problema y sobre la marcha le den solución. En los cursos de física esto puede implicar que se dedique tiempo para introducir los conceptos matemáticos, explicar la notación y/o desarrollar las técnicas de cálculo, etc. que se necesiten en el estudio de los fenómenos físicos del tema correspondiente. Por otra parte, en los cursos de matemáticas, especialmente en los niveles introductorios, es conveniente que se dé una motivación física al hablar de conceptos matemáticos nuevos y también, posteriormente, se señalen aplicaciones de los mismos en la descripción de fenómenos físicos; todo esto, desde luego, sin menoscabo de que los conceptos sean formulados en forma general con todo el rigor y grado de abstracción apropiados.

III. OBSERVACIONES HISTORICAS SOBRE EL DESARROLLO DE ALGUNOS CONCEPTOS MATEMATICOS

De las diversas formas alternativas de abordar el tema de la historia de las matemáticas, tomando en cuenta las limitaciones de espacio y tiempo, voy a referirme solamente a dos posibilidades extremas y complementarias dentro de esta sección. La primera, que es la que considero con cierto detalle en los párrafos siguientes, consiste en un bosquejo global del desarrollo de las matemáticas en diversos períodos y por diversas civilizaciones, con énfasis en las motivaciones y aplicaciones en otras actividades humanas, especialmente en la física. La segunda posibilidad, sobre la cual simplemente quiero señalar aquí su potencialidad didáctica, consiste en seguir el proceso histórico del desarrollo de conceptos matemáticos específicos. El valor didáctico de un estudio de este tipo radica en el hecho de que los obstáculos y confusiones con que se encontraron los inventores originales de esos conceptos y sus contemporáneos son también puntos difíciles y fuentes de confusión para los estudiantes que iniciaron su familiarización con tales conceptos; el conocer la forma en que se remontaron esos obstáculos y se aclararon esas confusiones, o bien el reconocer que en algunos casos tales obstáculos y confusiones aún persisten, es muy útil para el estudiante. Recomiendo el libro de M. Kline[2], "Pensamiento matemático de tiempos antiguos a modernos", como una excelente referencia para el material de esta sección.

El desarrollo de las matemáticas en las civilizaciones antiguas tuvo una motivación eminentemente práctica directamente en conexión con actividades comerciales, de distribución de tierras y cosechas, de colección de impuestos, de obras de ingeniería, de observaciones astronómicas para medición del tiempo, etc. Específicamente en el caso de las civilizaciones de Babilonia y Egipto, sobre las que se tiene información a través de las tabletas cuneiformes (que datan desde 2000 años a.c.) y de los papiros (que datan de 1700 a.c.), se ha establecido que habían desarrollado conocimientos de aritmética, álgebra y geometría, algunos de los cuales hemos heredado y seguimos usando hasta el presente. Por ejemplo, el sistema sexagesimal usado en Babilonia persiste hasta nuestros días en la división del tiempo en horas, minutos y segundos; por otra parte, los egipcios introdujeron la base decimal, así como el calendario con el año de 365 días. Por supuesto, otras civilizaciones desarrollaron también conocimientos de matemáticas y en algunos casos no han sido debidamente estudiados; para quienes tengan especial interés en las contribuciones de los mayas, los aztecas y los chinos, las referencias 3, 4 y 5, respectivamente, pueden ser de utilidad.

Las contribuciones de la Grecia Antigua al conocimiento en general, y a las matemáticas en particular, son ampliamente reconocidas. Una diferencia cualitativa muy importante entre estas contribuciones y las de las otras civilizaciones de la antigüedad e incluso posteriores, es que los griegos las desarrollaron desde un punto de vista abstracto desligándolas un tanto de las situaciones prácticas y concretas que originalmente sirvieron de motivación. Así por ejemplo, para los griegos la aritmética se convirtió en la teoría de los números en contraste con la logística constituida por el arte de calcular. Es interesante hacer notar que la dicotomía de matemáticas puras y matemáticas aplicadas que persiste en nuestros días tiene aquel precedente. Históricamente se distingue el Período Clásico (600-300 a.c.) y el Período de Alejandría (300 a.c.-600 d.c.) en la civilización griega. En el primero hubo varias escuelas, entre las que destaca la de Pitágoras en el estudio de las matemáticas: los números se representaban mediante conjuntos de piedras (cálculos) o de agujeros en la arena (ábaco); de acuerdo con el arreglo de esos conjuntos se introdujeron los números triangulares, cuadrados, rectangulares, poligonales. También se reconocieronlos números primos, progresiones, razones y proporciones, promedios y la idea de inconmensurabilidad. Esta última puso en duda la identificación de números con figuras geométricas o la correspondencia de aritmética con geometría. La escuela de Eudoxus, dentro de este mismo período, abordó el estudio de la inconmensurabilidad en la obra *Nueva teoría de la proporción*, conduciendo a un mayor énfasis en el estudio de la geometría; él mismo desarrolló el método de agotamiento para el cálculo de áreas o volúmenes mediante la inscripción y circunscripción de las figuras de interés en otras figuras conocidas. El Período Clásico se caracteriza por el establecimiento de la deducción como método de demostración y culmina con los *Elementos* de Euclides y las *Secciones Cónicas* de Apolonio. El Período de Alejandría muestra la incorporación creciente de los conocimientos de Egipto y también un mayor número de aplicaciones de las matemáticas al estudio de otras ramas. En la etapa inicial destaca Arquímedes con sus obras *El contador de arena*, en la que estudió la representación de números muy grandes, *Esfera y cilindros*, *Conoides y esferoides*, *Espirales*, en las que extendió el uso del método de agotamiento e introdujo curvas que no se pueden trazar con regla y compás solamente, *Equilibrio de planos*, *Palancas*, *Centros de gravedad*, *Cuerpos en flotación*, en las que estudió diferentes fenómenos físicos. El desarrollo de la trigonometría tuvo como motivación la astronomía cuantitativa y la medición del tiempo. Su fundador fue Hiparco, de quien no se tienen trabajos escritos directamente pero cuyas contribuciones están acreditadas por Ptolomeo en su obra *Colección Matemática o Almagesta*. Aquí se encuentra la conexión con la herencia de Babilonia del uso de fracciones sexagesimales y la introducción de la función seno a través de las cuerdas en un círculo. Otra parte de la herencia de Babilonia y Egipto aparece en algunos problemas de álgebra del *Códice Palatino de Epigramas Griegos*, el cual también contiene ese tipo de problemas formulados verbalmente por Metrodorus (500 años d.c.), Arquímedes y Euclides. En contraste con esas formulaciones verbales, Diofantes introdujo el uso de símbolos en el álgebra e inició el estudio de las ecuaciones diofantinas, que son ecuaciones indeterminadas en las que interesan las soluciones que son números enteros.

Las conquistas de Alejandro extendieron el conocimiento griego hacia Asia, asimilándose especialmente en India (200-1200 años d.c.) y Arabia (800-1300 d.c.). Estas civilizaciones no se preocuparon con el rigor de los griegos en la formulación de los conocimientos y correspondientemente usaron éstos en forma libre e inclusive los extendieron. En India se inició el uso de la notación para números fraccionarios con el numerador arriba y el denominador abajo, pero todavía sin la raya de quebrado, y se trabajaba libremente con números negativos y números irracionales. También se reconoció que las ecuaciones cuadráticas tienen dos soluciones y se introdujeron las fracciones continuas en la solución de ecuaciones indeterminadas. En trigonometría se dieron pasos adicionales para llegar a la función seno que conocemos al pasar a las correspondencias entre media cuerda: arco completo y media cuerda: medio arco. De Arabia heredamos lo que ellos a su vez aprendieron de la India: símbolos para los números con base decimal y notación posicional. Ellos agregaron la raya de quebrado y también usaron los números irracionales, pero no los negativos. La palabra álgebra es de origen árabe y significa restauración (de la igualdad entre los miembros de una ecuación). La solución de ecuaciones cuadráticas la llevaban a cabo con una explicación o justificación geométrica y Omar Khayyam resolvió ecuaciones cúbicas y cuárticas como intersección de cónicas. También se debe a los árabes la introducción de las otras funciones trigonométricas y el establecimiento de identidades trigonométricas.

La Edad Media en Europa (1100-1450) no produjo grandes avances ni en la ciencia ni en las matemáticas. Entre las contribuciones aisladas más destacadas se cuentan las siguientes: Leonardo de Pisa o Fibonacci (1170-1250) escribió en latín *Liber Abaci*, sobre métodos de cálculo usados por los griegos y los árabes; *Liber Quadratorum*, sobre álgebra basada en métodos aritméticos; *Practica Geometriae*, que reproducía los *Elementos de Euclides* y la trigonometría griega. El también reconoció la existencia de otros números irracionales diferentes de los estudiados por los griegos. Nicole Oresme (1323-82), en París, en *Algorismus Proportionum* introdujo la notación y cálculos con exponentes fraccionarios; en *De Uniformitate et Difformitate Intensionum* reconoció la distinción entre cambio y rapidez de cambio de una magnitud estudiando el movimiento uniforme (con velocidad constante), el movimiento diforme (con velocidad de variable) y el movimiento uniformemente diforme (con aceleración constante); en *Tractatus de Latitudinibus Formarum* introdujo la idea de que las cantidades medibles se pueden representar mediante puntos, líneas y superficies, concretamente:para representar velocidades que varían con el tiempo llevaba el tiempo a lo largo de una horizontal, a la que llamaba longitud, y las velocidades a diferentes tiempos eran líneas verticales, a las que llamaba latitudes. Jean Buridan (1300-1360), también en París, introdujo el concepto de ímpetu y formuló con éste una teoría del movimiento, la cual eventualmente desplazó a las teorías prevalentes de Aristóteles. Las contribuciones anteriores señalan el inicio de una tendencia en el estudio de la física caracterizada por la sustitución de explicaciones cualitativas por descripciones cuantitativas.

La época del Renacimiento (1400-1600) en Europa está caracterizada inicialmente por el redescubrimiento del conocimiento de los griegos. El punto de vista racional de la naturaleza de la Antigua Grecia reaparece reforzado bajo la forma de la matematización de la ciencia en el renacimiento como lo atestiguan los trabajos de algunos de los investigadores más influyentes de la época: *De Revolutionibus Orbium Coelestium* de Copérnico; *Mysterium Cosmographicum, Astronomia Nova y Armonía del Mundo* de Kepler; *Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la verite dans les sciences* incluyendo los tres apéndices *La Geométrie, La Dioptrique y Les Meteors*, de Descartes; *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, de Galileo; *Quadrature* *of curves, The method of fluxions and infinite series* y *Philosophiae naturalis principia mathematica*, de Newton. Por otra parte, las actividades artísticas también estimularon el desarrollo de las matemáticas; concretamente de los problemas de la pintura surgió la geometría proyectiva, inicialmente a través de los trabajos de Desargues, Pascal y La Hire.

El período del siglo XVII al siglo XIX fue mutuamente fructífero para las matemáticas y la física; la necesidad de métodos cuantitativos para abordar los problemas de la última estimuló el desarrollo de nuevas ramas de la primera. La geometría coordenada o geometría analítica fue creada por Fermat y Descartes, quienes reconocieron la ventaja de usar métodos algebraicos en el estudio de la geometría asociando ecuaciones con curvas o superficies. Entre los problemas que estimularon la creación del cálculo podemos mencionar: 1) conocida la posición de un móvil como función del tiempo, encontrar su velocidad y su aceleración, y viceversa, conocida la aceleración del móvil como función del tiempo, encontrar su velocidad y posición; 2) encontrar la tangente a una curva; 3) encontrar máximos y mínimos de una función; 4) encontrar longitudes de curvas, áreas de superficies, volúmenes de sólidos, centros de gravedad de cuerpos. Muchos investigadores abordaron la solución de alguno de estos problemas, inclusive Fermat y Descartes, pero Newton y Leibnitz son considerados los creadores del cálculo. Como es sabido, esta rama de las matemáticas creció tanto que dió lugar a otras ramas cuyo conjunto se conoce bajo el nombre general de Análisis e incluye ecuaciones diferenciales, series infinitas, geometría diferencial, cálculo de variaciones, funciones de variable compleja, ecuaciones integrales, etc.

Los nombres de los investigadores que estudiaron o establecieron los conceptos, condiciones, teoremas, principios, ecuaciones, series, etc. de algunas de estas ramas matemáticas se reconocen también en las diversas ramas de la física clásica, reflejando el entrelazamiento en el desarrollo de ambas disciplinas.

Se debe señalar que durante este período de los siglos XVII y XIX en que se crearon muchos nuevos conceptos, también surgieron dudas y confusiones sobre el significado y la validez de éstos. Al principio, los éxitos en sus aplicaciones en la investigación de situaciones físicas favoreció la continuación de su uso, aunque no necesariamente fueran bien entendidos. De la necesidad de formular algunos de estos conceptos en forma rigurosa y abstracta, así como de la extensión y generalización de tales conceptos, se lograron avances adicionales de las matemáticas, especialmente desde el siglo XIX y ya independientemente de la física.

Para concluir esta sección y destacar la importancia de las matemáticas en el desarrollo de la física podemos dar un paso más en nuestro bosquejo histórico, entrando al siglo XX. En nuestra disciplina esto correspondió al paso de la física clásica a la física moderna, cuyas dos ramas fundamentales, la relatividad y la mecánica cuántica, demandaron desde un principio que los físicos descubrieran lo que los matemáticos ya habían estudiado. Así, en nuestras clases seguimos los ejemplos de Einstein, al estudiar geometría riemanniana, o de Heisenberg y Dirac, al estudiar álgebras no conmutativas.

IV. MATERIALES DIDACTICOS

La selección de los materiales presentados en esta sección es definitivamente arbitraria y está formada por algunas experiencias en las cuales he participado directamente. La Parte A es de interés para estudiantes y profesores de la carrera de físico, no sólo en el contexto del tema específico bajo consideración sino en un sentido mucho más amplio. La Parte B puede ser de interés en el nivel introductorio de la carrera y también de manera especial para estudiantes y profesores de bachillerato. La Parte C constituye un repaso de las funciones matemáticas estudiadas en los seis primeros semestres de la carrera.

A. UNA BIBLIOGRAFIA COMENTADA

La "Bibliografía comentada sobre un acervo básico para escuelas de física a nivel de licenciatura en México"[6] es la referencia de nuestra discusión. El lector interesado encuentra ahí materiales bibliográficos sobre las diversas materias de la carrera, pero aquí me limito a señalar las secciones pertinentes a las matemáticas.

La sección titulada "Matemáticas", seleccionada y comentada por el Dr. José Luis Abreu León, corresponde al nivel de la primera mitad de la carrera. Se incluyen libros de álgebra moderna y álgebra lineal, cálculo elemental y cálculo avanzado, geometría, ecuaciones diferenciales y lecturas generales en matemáticas.

Yo estuve a cargo de la sección titulada "Métodos matemáticos de la física", la cual corresponde al nivel de la segunda mitad de la carrera. De hecho los libros se agrupan de acuerdo con el nivel, distinguiendo el introductorio y el avanzado a estas alturas de la carrera, así como algunos textos clásicos. Además, ahora aprovecho la oportunidad para complementarla con dos referencias de trabajos recientes de K.B. Wolf: su texto sobre transformadas integrales(7) y su ponencia sobre "La enseñanza de los métodos matemáticos de la física"(8).

La sección titulada "Computación y programación" fue seleccionada y comentada por el M.en C. Manuel Alvarez Alvarez. Se inicia con una nota introductoria sobre los conocimientos básicos de computación, incluyendo los cursos que se ofrecen en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Las referencias bibliográficas aparecen sucesivamente agrupadas en libros básicos, libros complementarios, lecturas auxiliares, obras de consulta, publicaciones periódicas y manuales.

Esta bibliografía puede ser muy útil para estudiantes y profesores, a quienes recomiendo que directamente vean las selecciones y lean los comentarios incluidos ahí.

B. UN REPASO DE MATEMATICAS Y FISICA A NIVEL MEDIO SUPERIOR

Mi participación en un repaso de esta naturaleza ha sido en conexión con el Curso Básico de Radioisótopos e Instrumentación Nuclear(9) en el que ha habido la necesidad de proporcionar a los alumnos las bases para entender los conceptos del curso mismo, así como para expresar e interpretar apropiadamente los resultados del trabajo en el laboratorio. A continuación describo el contenido del repaso de las áreas de matemáticas y de física, tal como lo he hecho en la introducción a las notas correspondientes y con la advertencia de que la orientación y selección de temas y ejemplos han sido determinados por los objetivos específicos del curso mencionado. Desde luego, la posibilidad está abierta para hacer las modificaciones apropiadas de acuerdo con las situaciones que se presenten.

La parte de matemáticas de repaso cubre los conceptos básicos de aritmética, álgebra, geometría, trigonometría, cálculo diferencial y cálculo integral, que son necesarios en el Curso Básico de Radioisótopos e Instrumentación Nuclear. Se introducen y desarrollan dichos conceptos destacando las conexiones lógicas entre ellos y poniendo énfasis en su uso y aplicación dentro del curso.

La parte de aritmética y álgebra se inicia con las operaciones más elementales y se continúa con las operaciones más complicadas, señalando cómo las complicaciones de las últimas se pueden entender y simplificar a través de sus relaciones con las anteriores. También se reconocen los diferentes tipos de números que se necesitan introducir al desarrollar las operaciones más complicadas. En esta forma, primero se considera la operación básica de contar y la aparición de los números naturales. A continuación se consideran sucesivamente y por pares las operaciones de suma y resta, multiplicación y división, potenciación y radicación y exponenciación y logaritmos. Se reconoce que las operaciones dentro de cada par son inversas o complementarias entre sí, y también que la primera operación dentro de cada par es un caso particular o forma abreviada de la primera operación del par anterior. Por ejemplo: la suma se reduce a contar, la multiplicación es una suma de sumandos iguales, la potenciación es una multiplicación de factores iguales y la exponenciación da las diferentes potencias de una misma base. Por otra parte, la resta equivale a encontrar un sumando en una suma, la división equivale a encontrar un factor en un producto, la radicación equivale a encontrar la base de una potencia y el logaritmo es el exponente de una potencia.

En forma sucesiva y correspondiente a estos pares de operaciones, se identifican los números de los siguientes tipos: positivos, negativos y cero; enteros y fraccionarios; reales, imaginarios y complejos; formas compactas para representar números muy grandes o muy pequeños. La representación de los números reales y las operaciones que se realizan con ellos se lleva a cabo de manera muy ilustrativa y útil, tanto conceptual como prácticamente, utilizando escalas numéricas ya sean naturales o logarítmicas; así se pueden construir reglas o dispositivos de cálculo.

La parte de aritmética y álgebra se continúa al distinguir entre cantidades constantes y variables, y al estudiar las relaciones más simples de proporcionalidad (directa, inversa, cuadrática e inversa del cuadrado) entre dos variables. Dentro de un marco más general se reconoce la naturaleza independiente o dependiente de las variables y su representación gráfica en un sistema de coordenadas cartesianas, estableciendo así las implicaciones geométricas de las relaciones o dependencias funcionales entre ellas. Explícitamente se reconocen las líneas recta, hipérbola, parábola e hipérbola cuadrática asociada con las relaciones de proporcionalidad mencionadas. Haciendo uso de constantes aditivas o de proporcionalidad para las variables, se muestran los efectos de cambios de posición o de escala en las curvas correspondientes. También se dan ejemplos de tales relaciones y funciones que se utilizarán en el curso.

La parte de aritmética y álgebra se complementa examinando la función exponencial y la función logarítmica desde el punto de vista gráfico y utilizando diferentes bases. También se estudia la construcción de gráficas en papel semilog y loglog, para diferentes funciones. El uso de la función exponencial y este tipo de gráficas se necesitan continuamente durante el curso.

La parte de geometría incluye a continuación el estudio del círculo y de triángulos, especialmente las relaciones entre ángulos, arcos y radios, para poder entrar a la parte de trigonometría. En ésta se estudian principalmente las funciones seno, coseno y tangente, incluyendo sus gráficas. Las funciones seno y coseno son útiles en la descripción de fenómenos ondulatorios, algunos de los cuales se presentan en diferentes partes del curso. La función tangente es apropiada para medir la pendiente de una recta, y en las gráficas en coordenadas cartesianas corresponde a la rapidez de cambio de la ordenada con respecto a la abscisa; esto se utiliza en la interpretación geométrica del concepto de derivada y tiene múltiples aplicaciones.

En la parte de geometría también se estudia el sistema de coordenadas polares y las gráficas de algunas curvas que son más fáciles de definir a través de una relación funcional entre el radio y el ángulo. Las gráficas en coordenadas polares son especialmente convenientes en algunos temas del curso relacionados con distribuciones angulares.

En la parte de cálculo diferencial se desarrolla el concepto de derivada, empezando con la determinación de la rapidez de cambio promedio de una función con respecto a la variable independiente para intervalos finitos y pasando a la situación límite de rapidez de cambio puntual correspondiente a un intervalo infinitesimalmente pequeño. Desde el punto de vista geométrico, estos conceptos permiten interpretar a la derivada de una función en términos de la pendiente de la tangente a la curva en el punto de interés. Desde el punto de vista físico se identifica a la derivada como una velocidad instantánea o rapidez de cambio puntual, y se señalan múltiples ejemplos de conceptos del curso que corresponden a esta interpretación. También se calculan y grafican las derivadas de las funciones estudiadas con anterioridad y se hacen destacar sus propiedades y aplicaciones dentro del curso.

En la parte de cálculo integral se desarrollan los conceptos de integral indefinida y de integral definida. Para la primera se hace notar que la integración es una operación inversa a la derivación, y la libertad asociada con constantes de integración. Esto permite aprovechar los resultados de cálculo diferencial para construir una lista de integrales de las funciones cuyas derivadas ya se estudiaron, y desde el punto de vista gráfico implica la obtención de familias de curvas. La integral definida se presenta al considerar los límites entre los que se lleva a cabo la integración, y geométricamente corresponde al área bajo la curva de la derivada y el eje de abscisas entre las ordenadas correspondientes a los límites.

Por cada vez que se aplican derivadas en los diferentes temas del curso, prácticamente se tiene la aplicación correspondiente de las integrales asociadas.

El repaso de física cubre los conceptos básicos de mecánica, electricidad y magnetismo que se necesitan en el Curso Básico de Radioisótopos. Estos conceptos se introducen operacionalmente, se definen cuantitativamente incluyendo las unidades correspondientes, se ilustran con ejemplos específicos de interés para el curso y se relacionan con conceptos previos, estableciéndose las diferentes leyes o principios que gobiernan su comportamiento.

En la parte de mecánica, que es el estudio del movimiento, se distinguen las situaciones de cinemática, estática y dinámica.

Se empieza con la cinemática, que estudia la descripción del movimiento sin considerar las causas que lo producen, se definen los vectores de posición, de velocidad y de aceleración, señalando las relaciones entre ellos y con la trayectoria y el tiempo. En particular se estudian los siguientes movimientos: rectilíneo uniforme, uniformemente acelerado, circular uniforme y oscilatorio. En el curso aparecen múltiples situaciones en que las radiaciones o partículas realizan alguno de estos movimientos.

A continuación se inicia el estudio del movimiento desde el punto de vista de la dinámica, identificando a las fuerzas responsables de los diferentes tipos de movimiento. Esto se logra a través de la formulación y discusión de las Leyes de Movimiento de Newton: la Primera Ley de Newton o principio de inercia de Galileo; la Segunda Ley de Newton o ecuación de movimiento; la Tercera Ley de Newton o principio de acción y reacción. En la formulación de estas leyes se introducen e ilustran los conceptos de inercia, masa, fuerza y cantidad de movimiento, haciendo notar su naturaleza escalar o vectorial.

Se reconoce que la estática, que es el estudio de sistemas en equilibrio, se puede considerar como un caso particular de la dinámica, gobernado por la Primera Ley de Newton.

Otros conceptos de la dinámica que se introducen son los de impulso de una fuerza y de trabajo, los cuales miden los efectos integrados de una fuerza en un intervalo de tiempo y en un desplazamiento determinados, respectivamente. De la Segunda Ley de Newton se reconoce que el impulso de una fuerza es equivalente al cambio de la cantidad de movimiento del sistema sobre el que actúa la fuerza. De la misma ley se reconoce que el trabajo de una fuerza produce un cambio en la llamada energía cinética del sistema. También se reconoce la naturaleza conservativa de algunas fuerzas y la posibilidad de introducir una energía potencial para el sistema. Otro concepto íntimamente relacionado con el trabajo y la energía es la potencia, que es la rapidez con que se desarrolla el trabajo con respecto al tiempo.

En el estudio dinámico de sistemas aislados es posible y útil formular principios de conservación. En efecto, haciendo uso de la Segunda y Tercera Leyes de Newton se establece el principio de conservación de cantidad de movimiento. También considerando fuerzas conservativas se puede hablar de la energía total del sistema, definida como la suma de la energía cinética y la energía potencial, y se puede establecer el principio de conservación de energía. Estos dos principios resultan indispensables para analizar los procesos nucleares.

El estudio dinámico de la rotación de un sistema se puede formular en términos de conceptos de momento de inercia, torca y momento angular, que obedecen a tres Leyes de Newton análogas a las anteriores. A partir de éstas se pueden desarrollar los conceptos de impulso de una torca, trabajo de una torca, energía cinética de rotación, y también se puede establecer el principio de conservación de momento angular.

El estudio de las fuerzas gravitacionales, en las dos versiones de campo uniforme y campo inverso al cuadrado de la distancia, es útil para ilustrar los conceptos de la dinámica y como punto de comparación para el resto del curso.

La parte de electricidad se inicia reconociendo la existencia de cargas eléctricas y diferentes procesos para producirlas. Se distinguen las situaciones de cargas eléctricas en reposo y en movimiento.

La electrostática estudia las cargas en reposo y las fuerzas que tienen que actuar sobre ellas para que se mantengan en sus posiciones. La Ley de Coulomb describe la fuerza entre dos cargas puntuales, reconociendo que es atractiva o repulsiva (según que las cargas sean de signos opuestos o del mismo signo). Actúa a lo largo de la recta que une a las dos cargas y es inversamente proporcional al cuadrado de la separación entre ellas; también es una fuerza conservativa. En general, es útil introducir el concepto de intensidad del campo eléctrico como la fuerza que actúa sobre la unidad de carga; esto permite calcular la fuerza que actúa sobre cualquier carga en un punto en que se conozca la intensidad del campo eléctrico. Entonces es inmediato y natural el hablar del potencial eléctrico como la energía potencial eléctrica por unidad de carga; y correspondientemente se puede calcular la energía potencial eléctrica de una carga dada en un punto en que se conozca el potencial eléctrico, o alternativamente se puede calcular el cambio de energía potencial de una carga al cambiar su posición de un punto a otro. Esto lleva de manera natural a la introducción del electrón volt como unidad de energía, la cual es ampliamente usada en el curso. También se estudian algunos dispositivos como electroscopios, fuentes de potencial eléctrico y condensadores, describiendo sus funciones y propiedades desde el punto de vista eléctrico. Dentro del curso se presentan diversas aplicaciones de los mismos, especialmente en la parte de instrumentación.

Las cargas en movimiento constituyen corrientes eléctricas y su estudio se denomina electrodinámica. En el curso interesa estudiar el movimiento de cargas tanto en el vacío (como ocurre en un tubo de osciloscopio, en un acelerador, en un espectrómetro de masas, etc.) como en diferentes materiales (como ocurre en cables de conducción, en las diferentes partes de un circuito eléctrico, en el paso de partículas cargadas a través de materia, etc.). Se reconoce la clasificación de materiales en conductores y aislantes de acuerdo con la facilidad o dificultad que presentan al movimiento de cargas a través de ellos, introduciendo cuantitativamente las propiedades de conductancia y resistencia. A través de la Ley de Ohm se relaciona esta última con la diferencia de potencial y la corriente. También se estudia el efecto Joule de disipación de energía en una resistencia por la que circula corriente. Se distingue entre corriente directa y corriente alterna y se analizan circuitos eléctricos simples con diversas combinaciones de fuentes de potencial, resistencias y condensadores.

La parte de magnetismo se inicia estudiando la interacción entre imanes y reconociendo la existencia de campos magnéticos, incluyendo el terrestre. También se reconoce la imposibilidad de obtener polos magnéticos aislados y se establece la analogía entre el comportamiento de un dipolo eléctrico en un campo eléctrico y el comportamiento de un imán o dipolo magnético en un campo magnético. Por otra parte se reconoce qué elementos de corriente eléctrica producen campo magnético, cómo se pone de manifiesto por la orientación que toman imanes colocados en su vecindad; específicamente, los campos magnéticos asociados a espiras o bobinas con corriente son similares a los de imanes permanentes. Recíprocamente se reconoce que los campos magnéticos, sean debidos a imanes o a elementos de corriente, también ejercen fuerzas sobre elementos de corriente. Estas interacciones permiten entender el funcionamiento de electroimanes, motores eléctricos, etc.

Desde el punto de vista de la electrodinámica, es necesario reconocer que las cargas eléctricas pueden ponerse en movimiento bajo la acción tanto de campos eléctricos como de campos magnéticos. Se analizan entonces diversos ejemplos de aceleración de partículas cargadas que son de interés en el curso, en conexión con procesos de detección, selección, identificación, etc. de radiaciones.

Continuando el estudio de fenómenos electromagnéticos se analiza el fenómeno de inducción magnética y su formulación cuantitativa a través de la Ley de Faraday, haciendo uso de los conceptos de fuerza electromotriz y flujo magnético. Como ilustraciones de este fenómeno se analizan el funcionamiento de un generador, la inductancia de una bobina y diversos circuitos oscilantes.

El punto culminante en el estudio de los fenómenos electromagnéticos fue la predicción de la existencia de ondas electromagnéticas y la identificación de la naturaleza electromagnética de la luz realizada por Maxwell y confirmada por los experimentos de Hertz. De acuerdo con la formulación de Maxwell, toda partícula cargada sujeta a una aceleración emite radiación electromagnética cuya velocidad de propagación en el vacío es igual a la velocidad de la luz. Se analizan entonces los conceptos de amplitud, intensidad, longitud de onda, número de onda, frecuencia y período de las ondas electromagnéticas. También se identifican las diferentes regiones del espectro electromagnético, especialmente las de rayos X y rayos γ que son de interés en el curso.

C. LAS FUNCIONES COMUNES DE LA FISICA

Aquí se presenta el bosquejo de un camino relativamente directo y unificado para obtener las funciones matemáticas con las que el estudiante de física ya está familiarizado al completar el sexto semestre.

El punto de partida es la ecuación $y = x^z$. Primero se analiza la relación funcional entre y y x, cuando z se toma como parámetro con valores fijos. Para $z = 0$, y es constante; para $z = 1$, $y = x$ y se tiene una relación lineal; para $z = 2$, $y = x^2$ se tiene una relación cuadrática y la gráfica correspondiente es una parábola; para $z = 3, 4 \ldots n$,

$y = x^3, x^4 \ldots x^n$, se tienen parábolas cúbicas, cuárticas... de grado n, cuyas gráficas se extienden en el primero y segundo cuadrantes o en el primero y tercer cuadrantes, según que n sea par o impar. Análogamente para $z = -1, -2, -3 \ldots -n$, $y = x^{-1}, x^{-2}, x^{-3} \ldots x^{-n}$ se tienen funciones inversas de las potencias sucesivas, cuyas gráficas son las hipérbolas correspondientes que se extienden en los cuadrantes I y II ó I y III, según que n sea par o impar, y tienen a los ejes coordenados como asíntotas. En este punto conviene hacer algunas observaciones sobre estos conjuntos de funciones que son potencias enteras, positivas o negativas, de la variable independiente: i) las funciones son linealmente independientes entre sí, ii) la derivada de una de las funciones es proporcional a la función vecina cuyo exponente es una unidad menor. Se reconoce desde luego que el primer conjunto constituye la base para el desarrollo de funciones en series de Taylor. Los casos de valores fraccionarios del exponente, por ejemplo $z = 1/2, 1/3 \ldots 1/n$ o $z = -1/2, -1/3 \ldots -1/n$, se podrían analizar directamente; pero aquí podemos obtenerlos a partir de lo anterior intercambiando los papeles de variables dependiente e independiente, o sea $x = y^{1/z}$. Si nos limitamos al dominio real de las variables, lo afirmado anteriormente sigue siendo válido, con la salvedad de que para n impar la función es univaluada y para n par es divaluada. Por otra parte, si consideramos el dominio complejo de ambas variables, la función resulta ser n-valuada y se tiene una superficie de Riemann con n hojas. La extensión a exponentes reales racionales es inmediata e involucra superficies de Riemann con un número finito de hojas. A su vez la inclusión de exponentes reales irracionales o inconmensurables da lugar a relaciones funcionales infinitamente valuadas, o sea superficies de Riemann con un número infinito de hojas. También se pueden incluir valores imaginarios o complejos del exponente, y las funciones resultan infinitamente valuadas

La discusión de la última parte del párrafo anterior, relacionada con los dominios complejos de las variables y del parámetro exponencial, se puede realizar en ese momento o posponerse un poco, dependiendo de la preparación de los estudiantes.

A continuación se analiza la relación funcional entre y y z; cuando x = b se toma como un parámetro. Entonces tenemos la función exponencial $y = b^z$; para $b > 1$ se tiene una exponencial creciente y para $0 < b < 1$ una exponencial decreciente. Los valores de la base $b = 0, 1$ normalmente se excluyen porque en tales casos la función está definida solamente como una situación límite. Para un valor dado de la base en uno de los intervalos arriba definidos, siempre es posible usar como otra base el valor recíproco que se encontrará en el otro intervalo, y las funciones exponenciales correspondientes $y_1 = b^z$, $y_2 = (1/b)^z = b^{-z}$ se transforman la una en la otra bajo la sustitución $z \to -z$, siendo una creciente y la otra decreciente. La derivada de la función exponencial creciente es positiva y proporcional a la misma función; la derivada de la función exponencial decreciente es negativa y proporcional a la misma función. En particular para la base natural $b = e$, la derivada de la exponencial creciente es la función misma y la derivada de la exponencial decreciente es el negativo de la función. Las funciones hiperbólicas se pueden introducir como las combinaciones con paridades bien definidas de estas exponenciales: $\operatorname{senh} z = (e^z - e^{-z})/2$, $\cosh z = (e^z + e^{-z})/2$. La función logaritmo se obtiene al tomar el exponente como variable dependiente del valor de la exponencial $z = \log_b y$. Obviamente la curva logaritmo y la curva exponencial tienen la misma forma y sólo difieren en su orientación. Ambas dan una correspondencia univaluada entre las variables dependientes e independientes siempre y cuando sus valores estén dentro de los intervalos reales $-\infty < z < \infty$, $0 < y < \infty$ y la base se encuentre en los intervalos definidos en párrafos anteriores. La extensión de cualquiera de éstos fuera de esos intervalos lleva al dominio complejo de una o ambas variables y/o de la base, así como a una relación infinitamente multivaluada. Por ejemplo, si se toman valores puramente imaginarios del exponente, $z = i\phi$, y la base natural, entonces la función exponencial imaginaria $y = e^{i\phi}$ puede tomar valores complejos en general y reales y negativos en particular fuera del intervalo de valores reales y positivos a que estaba restringida anteriormente. La derivada de esta exponencial es proporcional a la función misma, pero la constante de proporcionalidad es la unidad imaginaria, de modo que existe una diferencia de fases entre ellas. Las funciones circulares o trigonométricas están relacionadas con la exponencial imaginaria de modo análogo a la relación entre las funciones hiperbólicas y la exponencial real;

$\text{sen}\,\phi = (e^{i\phi} - e^{-i\phi})/2i$ y $\cos\phi = (e^{i\phi} + e^{-i\phi})/2$ constituyen las partes imaginaria y real de la exponencial imaginaria y son impar y par con respecto a la sustitución $\phi \to -\phi$, respectivamente; las otras funciones e identidades trigonométricas se obtienen también inmediatamente. En particular, $e^{\pm i\phi} = \cos\phi \pm i\,\text{sen}\,\phi$, $\text{sen}^2\phi + \cos^2\phi = 1$, $d(\text{sen}\,\phi)/d\phi = \cos\phi$ y $d(\cos\phi)/d\phi = -\text{sen}\,\phi$ nos permiten reconocer que $|e^{\pm i\phi}| = 1$, $-1 \leq \text{sen}\,\phi \leq 1$, $-1 \leq \cos\phi \leq 1$, y los máximos y mínimos de sen ϕ (cos ϕ) se encuentran en la misma posición que las raíces de cos ϕ (sen ϕ); específicamente donde uno vale ± 1, el otro vale cero, y la exponencial toma los valores correspondientes $\pm i$ (± 1). Esto se correlaciona desde luego con el carácter oscilatorio y periódico de estas funciones a medida que su argumento varía continuamente en el intervalo $-\infty < \phi < \infty$, así como con su carácter multivaluado. También la igualdad $1 = e^{im\pi}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ ó $\ln 1 = im\pi$ permite entender que la función logaritmo es infinitamente multivaluada. A su vez, al conectar la función potencia con la función logaritmo $y = x^z = (e^{\ln x})^z$ se puede establecer el orden de multiplicidad de aquélla para diferentes valores del exponente.

Conocidas las derivadas de la función exponencial y las otras funciones antes mencionadas, es también inmediato escribir sus representaciones en series de Taylor relacionándolas con la base de potencias enteras y positivas de la variable independiente. Por otra parte, las propiedades de ortogonalidad de las funciones sen$m\phi$, cos$m\phi$ o $e^{im\phi}$ se pueden demostrar directamente y hacen posible la representación de funciones mediante series de Fourier.

REFERENCIAS

1. Facultad de Ciencias, Carrera de Físico: Organización Académica, 31-96 (UNAM, 1978).
2. M. Kline, Mathematical thought from ancient to modern times (Oxford, New York, 1972).
3. D.H. Kelly, Deciphering the maya script (University of Texas, Austin, 1976).
4. H.R. Harvey and B.J. Williams, Science 210 (1980) 499.
5. J. Needham, Science and civilization in China, Vol. 3 (Cambridge, 1959).
6. H.A. Domínguez Alvarez y M.T. Román Haza, Bibliografía comentada so-

bre un acervo básico para escuelas de física a nivel de licenciatura en México (CONACYT, 1975).
7. K.B. Wolf, "Integral transforms in science and engineering" (Plenum Press, 1979).
8. K.B. Wolf, III Congreso Nacional de Enseñanza de la Física, Soc. Mex. Fís. Boletín 3 (1975) 49.
9. S. Alva Lozano, F. Iturbe Hermann, E. Ley-Koo, J.W. Mercado Vilchis y V.M. Tovar Muñoz, IV Congreso Nacional de Enseñanza de la Física, Soc. Mex. Fís. Boletín 2 (1977) 46.

DEDICATORIA

Deseo dedicar el presente trabajo a la memoria de mi maestro y amigo, el Ingeniero Joaquín Ancona Albertos. Numerosas generaciones de estudiantes de la Universidad de Puebla, tanto en la Escuela Preparatoria como en las Facultades de Ingeniería y de Química y en la Escuela de Ciencias Físico-Matemáticas, durante varias décadas tuvimos la fortuna de recibir la enseñanza de matemáticas del Maestro Ancona. Su conocimiento de la materia y su capacidad para enseñarla siempre fueron un gran estímulo en nuestro aprendizaje.