

ANALISIS TEORICO SOBRE PARAMETROS EXPERIMENTALES Y TECNICAS EMPLEADAS EN EL CENTRADO DE SUPERFICIES OPTICAS

A. Cordero-Dávila[†], A. Cornejo-Rodríguez*, O. Harris-Muñoz[†] y
J. Pedraza-Contreras*

[†]Escuela de Ciencias Físico-Matemáticas de la U.A.P.

*I.N.A.O.E., Apartado Postal 216, Puebla, Pue., MEXICO

(recibido marzo 2, 1981, aceptado marzo 9, 1981)

RESUMEN

En el presente trabajo se analizan, desde el punto de vista teórico, dos técnicas para centrado de lentes y superficies ópticas. Una de estas técnicas utiliza el control óptico por reflexión (ya sea externa o interna) y la otra usa el control óptico por transmisión. Para analizar estas técnicas se propone una definición matemática adecuada del descentramiento de una superficie óptica individual, calculándose, para cada técnica, el efecto paraxial del descentramiento y, además, se hace una comparación con los resultados presentados por otros autores. Por otra parte, también se deriva una fórmula exacta que permite el cálculo de la desviación extrema del centro de curvatura de la superficie óptica que está en contacto con la boquilla, en función tanto de las características de calidad del sistema mecánico utilizado para sostener y rotar las lentes, como de las características propias de la superficie óptica.

ABSTRACT

The centering techniques of a lens are analyzed, from a theoretical point of view, either by reflexion or/and refraction. Using the

matrix theory, we derived some mathematical expressions for the decentering of an optical surface and its influence in an optical system of several components. Since during the centering process⁽¹⁾, the shape of the surface as well as the clamp holding it are important parameters, this situation has also been analyzed.

1. INTRODUCCION

Para la instalación de las componentes ópticas en las estructuras mecánicas de un instrumento óptico, la definición física del eje óptico de las lentes es muy importante⁽¹⁾. Considerando que en la literatura se dan algunas cifras "prácticas" sobre las tolerancias permisibles en el centrado, pero no existen tratamientos teóricos sobre dichos valores, en el presente trabajo se hace un análisis matemático sobre las diferentes técnicas de centrado y se derivan algunas expresiones matemáticas para las tolerancias.

La técnica que utiliza control óptico por reflexión consiste en un sistema en el cual el elemento óptico es montado sobre un eje giratorio, y se ilumina la superficie. Se dice que la superficie óptica o lente estará centrada cuando al rotar el eje, manual o mecánicamente, la(s) imagen(es) reflejada(s) permanece(n) en reposo. Shade⁽²⁾ realizó un análisis teórico de este método clasificando las limitaciones debidas al sistema mecánico de soporte y giro, y al aparato de observación empleado. Ese análisis toma en cuenta que se observa visualmente y que la única reflexión observada es la debida a la superficie exterior de la lente a centrar. Horne⁽³⁾ menciona, sin dar razones, que cuando no existe movimiento en la reflexión anterior, se puede tolerar "media división en la reflexión interior".

La técnica que utiliza el control óptico por transmisión es descrita por Twyman⁽⁴⁾ y consiste en un sistema que es básicamente el mismo que el anterior excepto que la flecha del torno debe ser hueca para permitir el paso de luz del sistema de iluminación a través de la componente óptica. El sistema de observación consiste, aparte de un microscopio o un telescopio, de una lente compensadora que dé posibilidades de estabilidad mecánica y de observación adecuada. Los errores debidos al sistema mecánico de soporte son idénticos a los de la técnica anterior. Sin embargo, parece ser que no existe un análisis conocido de los errores

debidos al sistema de medición.

De lo anteriormente expuesto se puede concluir que para analizar estos métodos de centrado se requiere, sólo, localizar la posición de las imágenes geométricas (por ejemplo, imágenes de retículas), y observar sus movimientos cuando se hace girar el sistema de rotación mecánica, con la componente óptica montada en dicho sistema.

2. TEORIA

2.1 *Expresión Matemática de la Desviación de Rayos para una Superficie Descentrada.*

Consideremos una superficie óptica (ver Fig. 1) cuyo centro de curvatura está descentrado por una cantidad ΔY del eje óptico ideal. En este caso, si hacemos incidir un rayo arbitrario, éste se desviará un ángulo δ de su trayectoria ideal después de refractarse. Se espera que esta cantidad δ dependa de: a) las características del rayo incidente en función del ángulo u y la altura Y medidas respecto al eje óptico ideal; b) radio de curvatura r de la superficie óptica; c) índices de refracción de los medios anterior n y posterior n' de la superficie óptica; y d) desplazamiento lateral ΔY .

En el caso de una superficie centrada, $n' u'$ se encuentra utilizando la fórmula conocida de óptica-geométrica paraxial^(5,6):

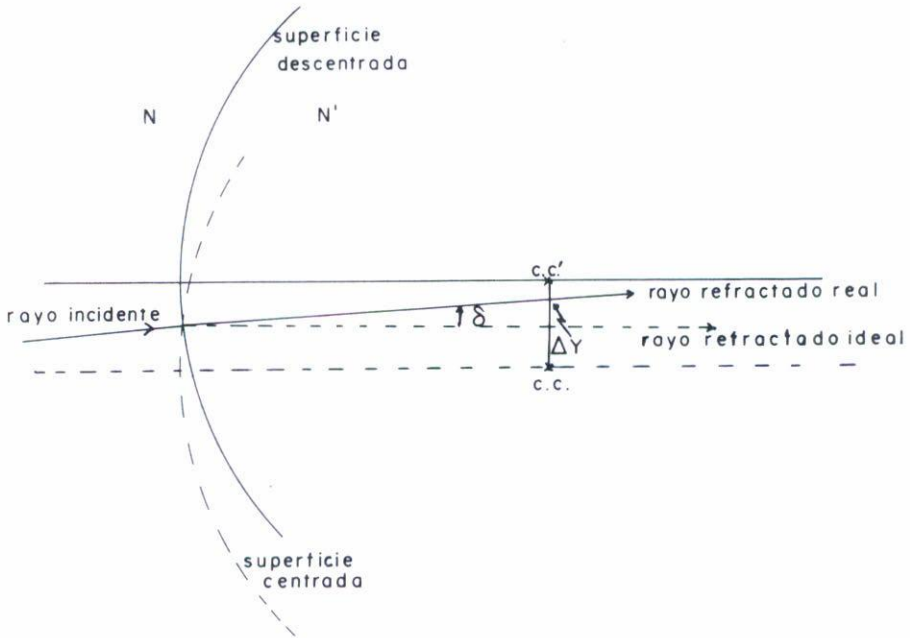
$$n' u' = Y \frac{n' - n}{r} + n u \quad . \quad (1)$$

En el caso de una superficie óptica descentrada, donde $Y = Y_1 - \Delta Y$, tendremos:

$$n' u' = Y_1 \frac{n' - n}{r} + n u - \Delta Y \left(\frac{n' - n}{r} \right) \quad . \quad (2)$$

Esta última ecuación reproduce la Ec. (1), a excepción del tercer término. Este, no depende de las características del rayo incidente (u , Y) sino sólo de las características de la superficie óptica y del descentrado de su centro de curvatura ΔY . Por tanto, esta variación en el coseno direc-

tor óptico del rayo nos sirve para definir paraxial y operativamente el descentrado de una superficie óptica.



c.c.— Centro de curvatura de la superficie centrada.

c.c'.— Centro de curvatura de la superficie descentrada.

δ — Desplazamiento angular.

ΔY — Desplazamiento lateral.

Fig. 1. Efecto angular (δ), sobre un rayo incidente, debido al descentrado de una superficie óptica.

2.2 Representación Matricial del Descentrado de una Superficie y su Contribución a la Desviación Final en un Sistema Óptico.

En el caso de una superficie óptica centrada, la representación matricial⁽⁷⁾ del paso de un rayo a través de ella puede expresarse como

$$\begin{pmatrix} Y_{i+1} \\ V_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_i \\ V_i \end{pmatrix} = R_i \begin{pmatrix} Y_i \\ V_i \end{pmatrix}, \quad (3)$$

donde Y_i, V_i son la altura y coseno director óptico del rayo incidente, respectivamente; Y_{i+1}, V_{i+1} son los parámetros correspondientes al rayo refractado (o reflejado), y

$$\begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix} = R_i \quad (4)$$

es la matriz de transformación que caracteriza a la superficie.

Cuando la superficie está descentrada se puede obtener

$$\begin{pmatrix} Y_{i+1} \\ V_{i+1} \end{pmatrix} = R_i \begin{pmatrix} Y_i \\ v_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta V_i \end{pmatrix}, \quad (5)$$

con $\Delta V_i = \Delta Y_i (n'_i - n_i) / r_i$.

Como puede observarse, el rayo a la salida de la superficie no está relacionado con el rayo a la entrada, mediante una sola multiplicación matricial (lo cual significaría linealidad). Ya que esta propiedad de linealidad es deseable por operatividad, ésta se puede obtener si se emplea el resultado de Gerrard y Burch⁽⁷⁾ (1975), quienes trabajaron una transformación matricial de 3×3 de la forma

$$\begin{pmatrix} Y_{i+1} \\ V_{i+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_i & B_i & 0 \\ C_i & D_i & \Delta V_i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_i \\ V_i \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

De donde puede notarse que la matriz de transformación utilizada caracteriza tanto a la superficie óptica centrada, como a su descentramiento y con esta matriz es posible obtener la linealidad deseada.

Utilizando esta formulación, la variación en las característi-

cas de un rayo arbitrario se pueden expresar como

$$\begin{pmatrix} \Delta Y_f \\ \Delta V_f \end{pmatrix} = \sum_{r=1}^n \begin{pmatrix} A_{r+1} & B_{r+1} \\ C_{r+1} & D_{r+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta V_r \end{pmatrix}, \quad (7)$$

donde la matriz $\begin{pmatrix} A_{r+1} & B_{r+1} \\ C_{r+1} & D_{r+1} \end{pmatrix}$ es la que caracteriza al sistema posterior a la superficie óptica donde se produjo la desviación angular ΔV_r , y, además, cada superficie contribuirá dependiendo de si está centrada o no.

2.3 Cálculos de las Desviaciones de Rayos para una Lente Descentrada.

Como se mencionó, tanto el método de control de reflexión (ya sea externa o interna), como el que usa el control por transmisión emplean las desviaciones de los rayos de su posición ideal para determinar los descentramientos. Esto nos plantea la necesidad de calcular ΔY_f y ΔV_f de los rayos aplicando la Ec. (7), tanto para transmisión como para reflexión (ya sea externa o interna).

Reflexión Externa.- En base a la Fig. 2 y realizando los cálculos con la Ec. (7), se encuentra que

$$\begin{aligned} \Delta Y_f &= -\ell' \frac{\Delta Y_2}{r_2}, \\ \Delta V_f &= -2 \frac{\Delta Y_2}{r_2}, \end{aligned} \quad (8)$$

donde ℓ' es la posición de la imagen observada respecto a la superficie que no está en contacto con la boquilla, y producida por la reflexión de la segunda superficie de la lente, con radio de curvatura r_2 .

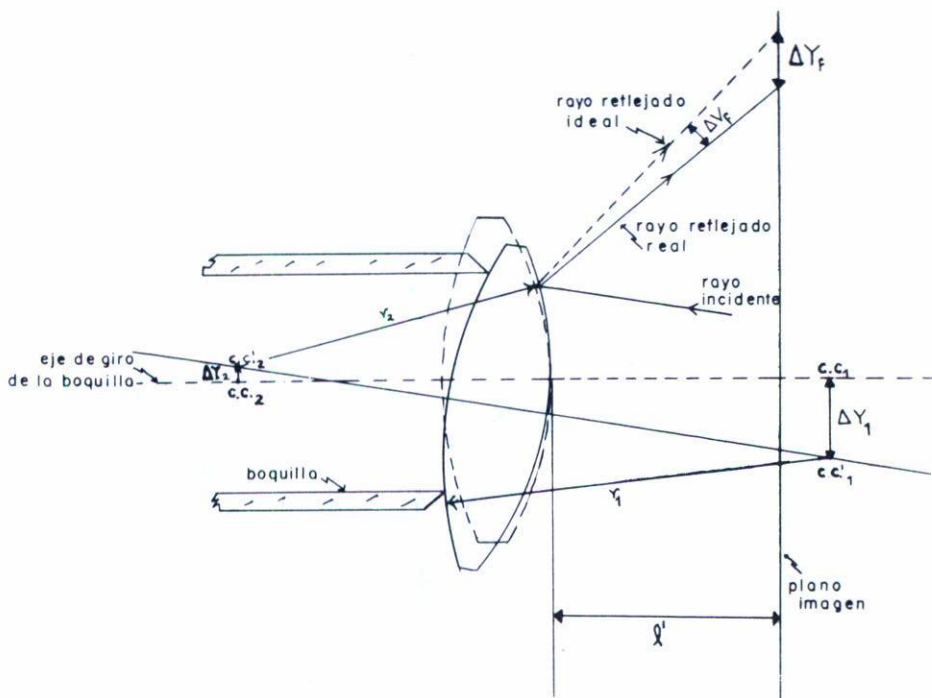


Fig. 2. Se muestra tanto la posición de la lente "idealmente" centrada (trazo punteado), como la lente descentrada (trazo continuo). Ambas medidas son con respecto al eje de giro de la boquilla. Las variaciones en el rayo reflejado, debidas al descentramiento, se denotan por ΔY y ΔV .

Reflexión Interna.- En el caso de reflexión interna (ver Fig. 3), las ecuaciones para ΔY_f y ΔV_f vienen dadas por

$$\Delta Y_f = \left[\left(\frac{2t}{n} + \frac{2t^2}{nr_1} \right) + \left(1 - \frac{t(n-1)}{nr_2} \right) \left(2 + \frac{2t}{r_1} \right) l' \right] (n-1) \frac{\Delta Y_2}{r_2} - \left[\frac{t}{n} + \left(1 - \frac{t(n-1)}{nr_2} \right) l' \right] 2n \frac{\Delta Y_1}{r_1} , \quad (9a)$$

$$\Delta V_f = \left(1 - \frac{t(n-1)}{nr_2}\right) \left(2 + \frac{2t}{r_1}\right) (n-1) \frac{\Delta Y_2}{r_2} - \left(1 - \frac{t(n-1)}{nr_2}\right) 2n \frac{\Delta Y_1}{r_1}, \quad (9b)$$

donde t es el espesor de la lente, n el índice de refracción, r_1 y r_2 los radios de curvatura, l' la posición del plano imagen respecto a la segunda superficie de la lente centrada y, por último, ΔY_1 y ΔY_2 las desviaciones, perpendiculares al eje de la boquilla, del primero y segundo centros de curvatura de la lente.

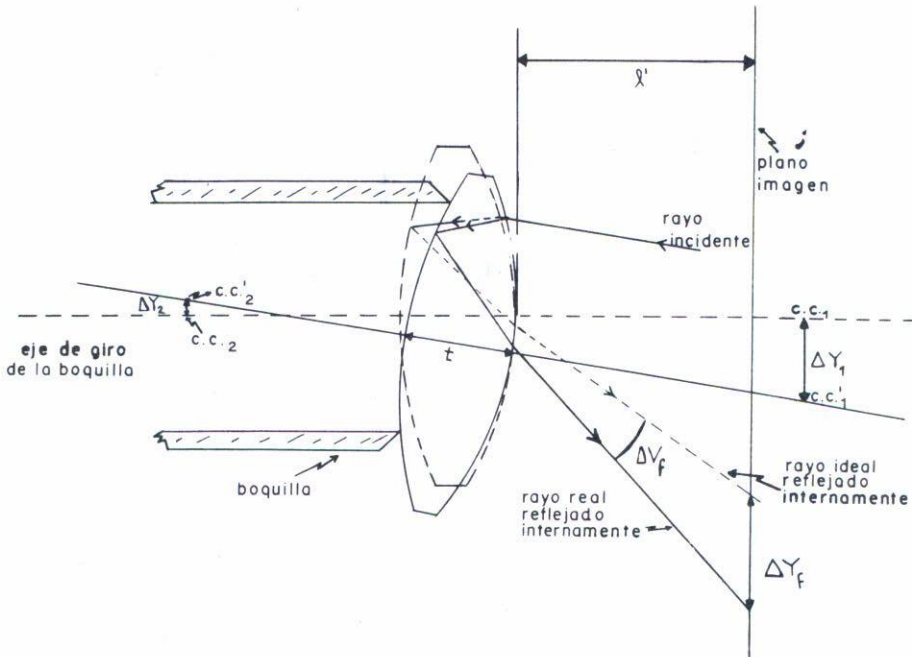


Fig. 3. Con la misma notación de lente centrada y descentrada de la Fig. 2, se muestran los efectos del descentramiento (ΔY , ΔV) para el rayo reflejado internamente en la superficie primera.

En el caso de lentes delgadas, estas ecuaciones se reducen a

$$\Delta Y_f = 2\ell'(n-1) \frac{\Delta Y_2}{r_2} - \ell'(2n) \frac{\Delta Y_1}{r_1} \quad , \quad (10a)$$

$$\Delta V_f = 2(n-1) \frac{\Delta Y_2}{r_2} - (2n) \frac{\Delta Y_1}{r_1} \quad . \quad (10b)$$

Suponiendo $n=1.5$ en la ecuación para ΔV_f , nos queda

$$\Delta V_f = \frac{\Delta Y_2}{r_2} - 3 \frac{\Delta Y_1}{r_1} \quad . \quad (11)$$

De esta última ecuación puede notarse que cuando la lente está rotando alrededor del eje mecánico de la boquilla y si la imagen debida a la reflexión externa aparece estática, $\Delta Y_2=0$. Por tanto, la desviación angular del rayo que se refleja en la superficie interna de la lente se deberá, totalmente, al descentrado de la superficie que está en contacto con la boquilla. Por otro lado, el factor de 3 que aparece nos dice que podemos dejar mayor tolerancia en las desviaciones de la imagen observada con reflexión interna que con externa. Esto reproduce lo enunciado, aunque no demostrado, por Horne.

Transmisión. - En este caso (ver Fig. 4), ΔY_f y ΔV_f están dadas por

$$\Delta Y_f = \left\{ \ell' \left[1 + \frac{t(n-1)}{nr_2} \right] \frac{(n-1)}{r_1} + \frac{t(n-1)}{nr_1} \right\} \Delta Y_1 - \ell'(n-1) \frac{\Delta Y_2}{r_2} \quad , \quad (12a)$$

$$\Delta V_f = \left[1 + \frac{t(n-1)}{nr_2} \right] (n-1) \frac{\Delta Y_1}{r_1} - (n-1) \frac{\Delta Y_2}{r_2} \quad , \quad (12b)$$

donde t , n , r_1 , r_2 , ΔY_1 y ΔY_2 se definen como en el caso de reflexión interna sólo que, ahora, ℓ' es la posición del plano imagen respecto a la superficie.

En el caso en que $t \rightarrow 0$ (lentes delgadas), ΔV_f queda como

$$\Delta V_f = \frac{n-1}{r_1} \Delta Y_1 - (n-1) \frac{\Delta Y_2}{r_2} \quad .$$

Si suponemos que $\Delta Y_1 = \Delta Y_2 = \Delta$ y recordando que $(n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{f}$, la última ecuación queda como

$$\Delta V_f = \frac{\Delta}{f} \quad (13)$$

Esto es, la Ec. (13) reproduce la ecuación derivada por Smith (1966) para el caso particular de lentes delgadas y suponiendo que el descentramiento de ambas superficies es idéntico ($\Delta Y_1 = \Delta Y_2 = \Delta$). Es conveniente aclarar que mientras Smith⁽⁸⁾ afirma que ΔV_f "se debe a la suma vectorial de las desviaciones de los elementos individuales", del análisis aquí realizado se desprende que la agregación de cada desviación angular está sopesada por el término D_{x+1} de la Ec. (7) que caracteriza al sistema restante.

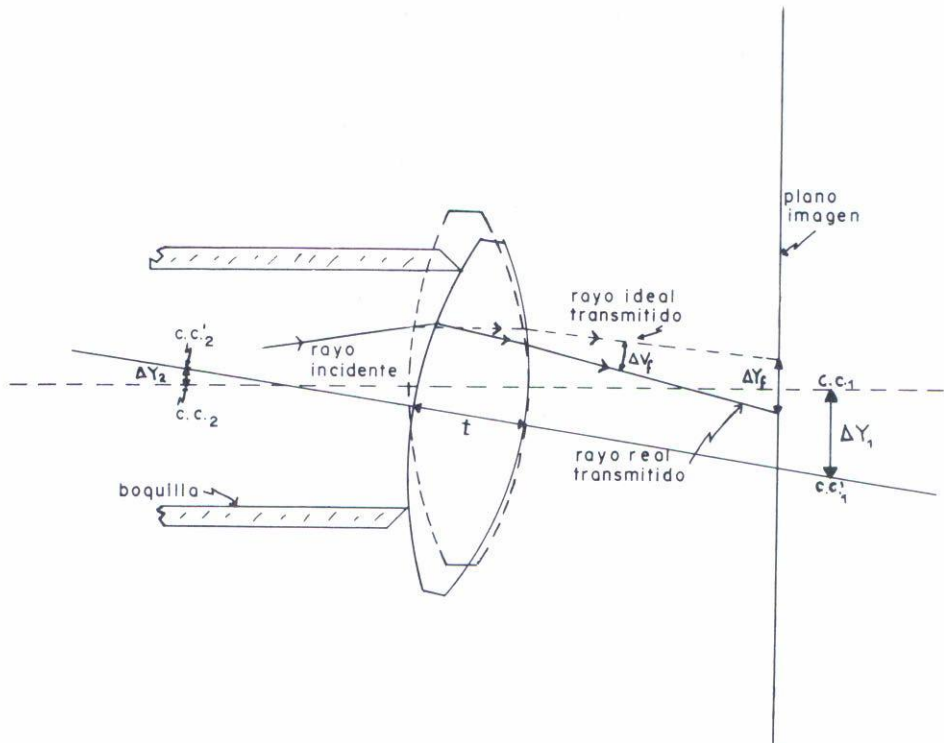


Fig. 4. Empleando la notación de las últimas figuras, se analiza el caso en la desviación de un rayo transmitido, debido al descentramiento de la lente.

3. APLICACIONES

3.1 Observación y Medición de Parámetros.

De los resultados obtenidos en las secciones anteriores, las variables a medir experimentalmente en los tres sistemas de centrado (reflexión externa, interna y transmisión) son desplazamiento y/o desviación angular. Esto es, debe observarse el desplazamiento ΔY_f de la imagen de una retícula (respecto a otra fija) o bien se observan desviaciones angulares de los rayos a la salida del sistema. Resumiendo, tenemos los casos siguientes:

- a) Para el caso de reflexión externa, si ΔV_f o $\Delta Y_f = 0$, se tiene que $\Delta Y_2 = 0$. Observamos, sin embargo, que no se garantiza que $\Delta Y_1 = 0$.
- b) Por otro lado, tenemos que las ecuaciones derivadas tanto para reflexión interna como para transmisión (ver Ecs. (9), (10) y (12)) son de la forma

$$\begin{aligned}\Delta Y_f &= a_{11}\Delta Y_1 + a_{12}\Delta Y_2 \quad , \\ \Delta V_f &= a_{21}\Delta Y_1 + a_{22}\Delta Y_2 \quad ,\end{aligned}\tag{14}$$

donde las a_{ij} son todas diferentes de cero. De aquí que

$$\Delta Y_1 = 0 \quad \text{y} \quad \Delta Y_2 = 0\tag{15}$$

si y sólo si

$$\Delta Y_f = 0 \quad \text{y} \quad \Delta V_f = 0 \quad .\tag{16}$$

La condición última significa que sin usar dos instrumentos (telescopio para ΔV_f y microscopio para ΔY_f) es imposible garantizar el centrado de ambas superficies ópticas de la lente a centrar.

Una forma comúnmente usada⁽²⁾ de medir la calidad de los sistemas centradores se realiza colocando un vidrio de caras plano-paralelas sobre la boquilla y observando el movimiento de la imagen de una retícula

debida a la reflexión sobre la placa. Esta medida sólo da información de las variaciones del borde de la boquilla sobre el eje Z (ver Fig. 1).

Sin embargo, es posible que la boquilla tenga errores en la dirección Y. Estos errores son importantes cuando la superficie a centrar es esférica, ya que en este caso las variaciones del borde en la dirección Y pueden causar errores en el centrado de la superficie inferior de la lente. Por tanto, es necesario realizar mediciones, por un lado, de las variaciones del borde de la boquilla en la dirección Z (Δb_z) y, por otro, en la dirección Y (Δb_y). De aquí se concluye que para controlar el centrado de ambas superficies se deben usar dos métodos; ya sean de reflexión interna y externa, como lo indica Horne⁽³⁾, en forma sucesiva; o como lo hace Hopkins⁽⁹⁾, simultáneamente.

3.2 Efecto de los Errores de la Boquilla sobre el Descentramiento de las Superficies.

Suele suceder que cuando la calidad de la boquilla empleada es dudosa, la substancia que se usa para fijar la lente a la boquilla puede ser utilizada para "compensar" las fallas en esta última y disminuir los errores en el proceso de centrado. Sin embargo, pensamos que para poder estar seguros de la "compensación" mencionada y, al mismo tiempo, poder derivar los límites tolerables en los errores en la boquilla que aseguren cierta calidad de centrado, antes es necesario realizar un estudio de los efectos que se obtendrán en el centrado de la superficie en contacto con la boquilla, cuando esta última tiene defectos. La importancia de poder cuantificar la calidad de la boquilla la podemos ejemplificar de la forma siguiente. Si la boquilla es de calidad aceptable, la superficie en contacto con ella puede considerarse centrada y deberá procederse a centrar únicamente la otra superficie, y por lo tanto, un solo método de centrado podrá ser utilizado.

En base a la discusión previa, a continuación se derivará una fórmula exacta que permita el cálculo de la desviación externa del centro de curvatura de la superficie óptica que está en contacto con la boquilla.

Las variaciones en el borde de la boquilla (Δb_y , Δb_z) originan errores en el descentramiento del centro de curvatura de la superficie óptica (ver Fig. 5). Es decir, que si la posición del centro de curva-

tura debería estar en el punto ideal C, debido a los errores, se encuentra realmente en el punto C', desviado del punto C en una cantidad $\vec{CC}' = \Delta Y \hat{j} + \Delta Z \hat{k}$.

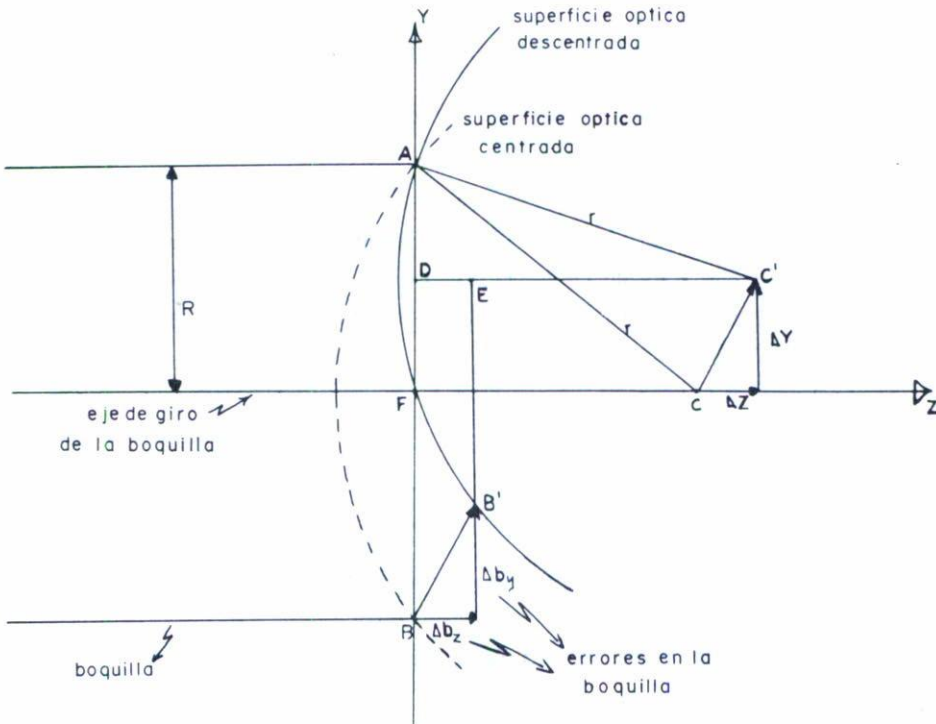


Fig. 5. Efectos sobre el centrado de una superficie óptica, cuando la boquilla que la soporta en el centrado está defectuosa (Δb_y , Δb_z).

Para analizar las relaciones entre \vec{CC}' , Δb_y y Δb_z , supondremos que el punto A es el punto extremo inferior del borde y B' es el extremo superior de la misma boquilla (de radio R). Podemos considerar, como caso extremo, que el error del borde en la dirección Y (Δb_y) se encuentra en el mismo punto sobre la boquilla que el error Δb_z , de tal forma que $\vec{BB}' = \Delta b_y \hat{j} + \Delta b_z \hat{k}$, "genera" una rotación del centro de curvatura de la

superficie óptica (con radio de curvatura r), alrededor del punto A, y, por tanto, las cantidades ΔY y ΔZ no son independientes.

Su relación se encuentra de manera simple, ya que

$$\Delta Z = DC' - FC' \quad , \quad (17)$$

y utilizando los triángulos rectángulos FBC y ADC' se llega a la fórmula

$$\Delta Z = \sqrt{r^2 - (R - \Delta Y)^2} - \sqrt{r^2 - R^2} \quad , \quad (18)$$

la cual nos proporciona la relación entre ΔY y ΔZ .

Por otro lado, la relación existente entre el error en el borde de la boquilla \vec{BB}' y el descentramiento de la superficie óptica, se encuentra de manera diferente al utilizar los triángulos rectángulos ADC' y EB'C', de donde se obtiene que

$$\Delta b_z = DC' - EC' \quad ; \quad (19)$$

por tanto,

$$\Delta b_z = \sqrt{r^2 - (R - \Delta Y)^2} - \sqrt{r^2 - (R + \Delta Y - \Delta b_y)^2} \quad (20)$$

y despejando de esta fórmula a ΔY se obtiene en el caso extremo

$$\Delta Y = \frac{\Delta b_y}{2} + \Delta b_z \sqrt{\frac{(r^2 - R^2) + \Delta b_y (R - \frac{\Delta b_y}{4}) - \frac{\Delta b_z^2}{4}}{(2R - \Delta b_y)^2 + \Delta b_z^2}} \quad . \quad (21)$$

De esta fórmula puede calcularse el error en el descentramiento en la dirección Y (ΔY), como función de r , R , Δb_y y Δb_z . Por otro lado, con ayuda de la Ec. (18) es posible calcular el descentramiento en la dirección Z (ΔZ).

Finalmente, con ΔY y ΔZ es posible predecir el máximo error vectorial \vec{CC}' en el descentramiento del centro de curvatura de la superficie óptica que está en contacto con la boquilla.

Realizando sobre la Ec. (21) las aproximaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \Delta b_y &\approx 0, \\ r^2 - R^2 &\gg \frac{\Delta b_z}{4}, \\ 4R^2 &\gg \Delta b_z^2, \end{aligned} \quad (22)$$

se obtiene, despejando Δb_z , la fórmula

$$\Delta b_z = 2\Delta Y \frac{R/r}{\sqrt{1 - (R/r)^2}} \quad (23)$$

De esta fórmula se puede calcular el valor máximo, aproximado, que puede tolerarse en la boquilla de tal forma que se cumpla con la tolerancia especificada por el diseño. Puede notarse que existe un factor de "sensibilidad"

$$\frac{\Delta b_z}{\Delta Y} = \frac{2R/r}{\sqrt{1 - (R/r)^2}}, \quad (24)$$

que depende sólo del cociente R/r .

Si suponemos, además, que $(\frac{R}{r})^2 \ll 1$, de la Ec. (24) se obtiene la ecuación derivada por Smith⁽⁸⁾:

$$\frac{\Delta b_z}{2R} = \frac{\Delta Y}{r}. \quad (25)$$

Cuando $R > r$, es posible, según esta última ecuación, encontrar una solución Δb_z . Sin embargo, en realidad, no es posible colocar la lente sobre la boquilla. Por otro lado, según la Ec. (24), los únicos valores de R/r para los cuales Δb_z tiene solución son cuando $|R/r| < 1$. Esto es, el intervalo (en la variable R/r) para el cual Δb_z tiene solución real correspondiente, precisamente, al permitido físicamente para colocar una superficie con radio de curvatura r sobre una boquilla de radio R .

CONCLUSIONES

Para hacer un análisis general teórico del descentramiento de superficies y componentes ópticas, se aplicaron métodos matriciales que simplificaron el problema y permitieron encontrar resultados semejantes a los de otros autores. En base a la formulación se demostró la necesidad de utilizar los métodos de reflexión externa e interna si se quiere garantizar el centrado de las dos superficies de una lente. Finalmente, se derivó una fórmula exacta que relaciona la calidad de la boquilla con el descentramiento máximo del centro de curvatura de la superficie óptica que se encuentra en contacto con la boquilla. A pesar de que los resultados son en base a la formulación paraxial, con los resultados obtenidos se tiene más certidumbre sobre la validez práctica de los diferentes métodos, su posible combinación y los límites tolerables en la calidad de la boquilla.

REFERENCIAS

1. Noble, R.H., Optical Shop Testing, Ed. D. Malacara, John Wiley Inters. (1978) p. 459.
2. Shade, H., Procedimientos de Trabajo en Optica de Taller, Ed. Reverte, S.A. (1961).
3. Horne, D.F., Optical Production Technology, Adam-Hilger, London (1972).
4. Twyman, F., Prism and Lens Making, Hilger and Watts Ltd., London (1957).
5. Conrady, A.E., Applied Optics and Optical Design, Dover Publications Inc. (1957) p. 36.
6. Kingslake, R., Lens Design Fundamentals, Academic Press (1978) p. 40.
7. Gerrard, A., Burch, J.M., Introduction to Matrix Methods in Optics, John Wiley & Sons (1975).
8. Smith, W.J., Modern Optical Engineering, McGraw-Hill, N.Y. (1966).
9. Hopkins, R.E., Optical Engineering 15 (1976) 428.

N. de los autores: Este trabajo es parte de la tesis de maestría de A. Cordero. Cuando este trabajo se realizó, en sus partes principales, todos los autores eran miembros del INAOE.