LAGRANGIANOS EQUIVALENTES*†

Sergio Hojman
Centro de Estudios Nucleares,
Universidad Nacional Autónoma de México
Circuito Exterior, C.U.
04510 México, D.F.

y

L. C. Shepley
Center for Relativity
The University of Texas at Austin
Austin, Texas 78712

RESUMEN

Presentamos una reseña del problema inverso del cálculo de variaciones destacando las ambigüedades que surgen debidas a la existencia de lagrangianos equivalentes para el mismo sistema clásico. En particular, analizamos las propiedades de lagrangianos equivalentes para sistemas multidimensionales, estudiamos las condiciones para la existencia de un principio variacional para ecuaciones de movimiento y sus soluciones (tanto para ecuaciones de segundo como de primer orden), consideramos el problema inverso del cálculo de variaciones para sistemas singulares, planteamos las ambigüedades que emergen en la relación entre simetrías y cantidades conservadas en el caso de lagrangianos equivalentes, discutimos los problemas

*Parcialmente financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, proyecto No. 955 y National Science Foundation Grant No. INT 78-22553.

†Presentado por Sergio Hojman en la asamblea general ordinaria de la SMF del 11 de junio de 1981.

que aparecen al intentar cuantizar sistemas clásicos que poseen lagrangianos equivalentes, describimos la situación que se presenta en el estudio de lagrangianos equivalentes en teoría de campos y, finalmente, proponemos una serie de problemas no resueltos y temas de discusión relacionados con el contenido de este artículo.

ABSTRACT

We present a review of the Inverse Problem of the Calculus of Variations, emphasizing the ambiguities which appear due to the existence of equivalent lagrangians for a given classical system. In particular, we analyze the properties of equivalent lagrangians in the multidimensional case, we study the conditions for the existence of a variational principle for (second as well as first order) equations of motion and their solutions, we consider the Inverse Problem of the Calculus of Variations for singular systems, we state the ambiguities which emerge in the relationship between symmetries and conserved quantities in the case of equivalent lagrangians, we discuss the problems which appear in trying to quantize classical systems which have different equivalent lagrangians, we describe the situation which arises in the study of equivalent lagrangians in field theory and finally, we present some unsolved problems and discussion topics related to the content of this article.

I. INTRODUCCION

Los objetos del mundo físico en mecánica clásica son partículas y campos. Las posiciones de aquéllas se describen por sus coordenadas en el espacio como funciones del tiempo; éstos se describen por funciones del espacio y del tiempo. La conducta de estos objetos queda determinada por sus ecuaciones de movimiento, y toda la información que podemos obtener de la mecánica clásica es la colección S de soluciones de estas ecuaciones. Consideramos ahora un sistema de partículas con constricciones holonómicas (Goldstein, 1980). Nos preocuparemos de situaciones más generales más adelante. Se tiene N coordenadas independientes q^i $(i = 1,\dots,N)$ para describir la configuración del sistema, y sus ecuaciones de movimiento son N ecuaciones de segundo orden. La colección S consiste de las trayectorias reales $q^i(t)$ que son todas las soluciones de las ecuaciones.

El principio de Hamilton establece que S es el conjunto de trayectorias que son extremos de una integral de acción. Escribimos esta integral como

$$I = \int L\, dt \quad ,$$

donde L es el lagrangiano. Pero si S es todo lo que podemos conocer, es posible que L no exista (es decir que el principio de Hamilton no sea correcto) o que haya otros lagrangianos $\overline{L}$ que podríamos usar. Estas posibilidades afectan la existencia y la unicidad del hamiltoniano y el paso a la mecánica cuántica.

Es claro que la mecánica cuántica describe la realidad en mejor forma que la mecánica clásica. Pero hay dificultades en mecánica cuántica, dificultades de interpretación, de descripción de sistemas dependientes del tiempo, y de infinitos en la teoría de campos. Muchas veces es necesario empezar con una descripción clásica y después pasar a una descripción cuántica. El problema fundamental de este programa es el tema de este artículo, es decir, la existencia de la posibilidad que el paso de S a un lagrangiano no sea único.

Entonces, hay algunas preguntas que se pueden formular para intentar comprender la relación entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica:

1) Dado S , ¿cuál es un posible sistema E de ecuaciones cuya colección de soluciones es S ? Decimos que dos sistemas de ecuaciones E , $\overline{E}$ son equivalentes si la colección S de soluciones de E es igual a la de $\overline{E}$. Entonces podemos preguntar ¿Cuáles son todos los sistemas $\overline{E}$ que son equivalentes a un E dado?

2) Dado E , ¿existe un lagrangiano L que produce E por el proceso de extremización de la integral de acción? Este es el "problema inverso" de la teoría de variaciones: ¿existe un L cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange son un E dado?

3) Dos lagrangianos L, $\overline{L}$ son equivalentes, si sus ecuaciones de Euler-Lagrange E , $\overline{E}$ son equivalentes; es decir, si las soluciones S de E son las mismas que las de $\overline{E}$. Entonces ¿cuáles son todas los $\overline{L}$ equivalentes a un L dado?

4) Después de las preguntas anteriores, cabe plantearse la del paso a la mecánica cuántica: Dados S , y L , $\overline{L}$ equivalentes ¿cuáles son las diferentes teorías cuánticas que resultan?

En el caso de fuerzas conservativas, que provienen del gradiente de una función potencial V, las ecuaciones de movimiento se escriben como ecuaciones de segundo orden. El lagrangiano se escribe como T-V, donde T es la energía cinética. L es función sólo de las coordenadas q^i, las velocidades $\dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt}$, y el tiempo t. Pero, a veces es necesario contemplar ecuaciones de otro orden y lagrangianos más generales. Helmholtz (1887) ha dado condiciones necesarias y suficientes para resolver el problema inverso para cualquier orden, pero la pregunta (3), es decir, aquélla acerca de la existencia de lagrangianos equivalentes, no está resuelta todavía.

Darboux (1891) ha resuelto la pregunta (3) para ecuaciones de una variable, Douglas (1941) la ha resuelto para dos dimensiones. Ambos han discutido el caso de ecuaciones de segundo orden. Havas (1957) ha comenzado la discusión general, y contribuyó mucho a la teoría de ecuaciones de primer orden y la teoría de constantes del movimiento. Otros nombres de importancia en este tema ahora son Santilli, Saletan y Marmo, y una descripción histórica muy buena ha sido hecha por Santilli (1978).

En este artículo presentamos una breve revisión de la teoría de lagrangianos equivalentes. Suponemos que el sistema de soluciones S tiene al menos un sistema conocido de ecuaciones E . En la sección II, la próxima, describimos el caso de un sistema no degenerado de partículas usando N coordenadas independientes. Supondremos que un lagrangiano L existe para las ecuaciones de movimiento E . El problema de esa sección es buscar otros lagrangianos $\bar{L}$ cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange $\bar{E}$ tengan las mismas soluciones S ; es decir, buscar lagrangianos $\bar{L}$ equivalentes a L. En la sección II mostramos que una matriz Λ juega un papel central. Todos los invariantes de Λ son constantes del movimiento y, por lo tanto, es interesante estudiar estas constantes especialmente.

En la sección III, describimos el problema inverso, es decir, estudiamos el problema de decidir cuándo existe un lagrangiano. Hay dos formas de este problema: El restringido consiste en determinar si existe un lagrangiano L para un sistema dado de ecuaciones E . El no restringido estudia la existencia de L para algún sistema $\bar{E}$ equivalente a un E dado. Los casos unidimensional y bidimensional pueden ser descritos completamente, y mostramos algunos de los problemas que se han constituido en obstáculos para resolver el caso general.

El caso de ecuaciones de movimiento de primer orden merece un lugar especial. Lo describimos en la sección IV. Dado un sistema S de soluciones es siempre posible, (excepto en casos especiales) encontrar un sistema E de ecuaciones de primer orden que sea satisfecho por S. Siempre existe un sistema $\bar{E}$ equivalente a E para el que existe un lagrangiano L. Este L es lineal en las velocidades $\dot{q}^i$ y podemos mostrar que todos los $\bar{L}$ equivalentes a L, también lo son. Pero existen problemas: discutimos en particular qué información se puede dar en los límites de la integral de acción.

En la sección V discutimos los sistemas degenerados. Estos son sistemas con constricciones o con invariancias de norma (o con ambos). Una norma (o calibre o medida) puede ser una norma interna, cuando t es invariante ante la transformación, o una norma externa cuando t es dependiente de ella.

En distintos lugares de la teoría aparecen constantes de movimiento. Por lo tanto regresamos a la relación entre estas constantes y simetrías en la sección VI. La relación más sencilla es cuando existen coordenadas ignorables, pero discutimos en general el Teorema de Noether y algunas ambigüedades referentes a simetrías y cantidades conservadas.

Dos problemas fundamentales no tienen ninguna solución en la literatura. Uno, el más importante, es la relación entre la mecánica cuántica y la mecánica clásica si existen distintos lagrangianos equivalentes para un sistema dado de soluciones S. Si uno usa en forma mecánica el método canónico para construir la mecánica cuántica, dado un L, en general el resultado no describe en forma satisfactoria la realidad. Un problema es que para un L cualquiera resulta un hamiltoniano que no tiene necesariamente dimensiones de energía. Otro es que el grupo de invariancia puede no ser aquél del cual se obtienen los niveles correctos de energía. Desearíamos contar con un método para pasar a la mecánica cuántica directamente de las soluciones S, pero este método no existe.

El otro problema nuevo se describe en la sección VIII; éste es la existencia y la unicidad de un lagrangiano para un campo $\phi(x,t)$. En este caso se acostumbra a escribir L como una integral de una densidad sobre el espacio. Edelen (1969) ha considerado la posibilidad de que L sea una integral doble de una densidad de segundo orden sobre dos copias de una región. Mostramos que en general es necesario considerar integrales de cualquier orden de densidades de orden arbitrario. Sin embargo, existen problemas relacionados con la existencia y la convergencia de dichas integrales.

La última sección IX son nuestras conclusiones. En este artículo presentamos muchos ejemplos y muchos problemas por resolver. En esta sección especialmente, discutimos las áreas de investigación que están abiertas en este tema fascinante.

II. LAGRANGIANOS S-EQUIVALENTES Y SUS PROPIEDADES

En esta sección consideraremos que un sistema físico está definido por sus ecuaciones de movimiento E o, más bien, por el conjunto completo S de las soluciones de dichas ecuaciones diferenciales. Ahora bien, dado el conjunto de curvas solución de un problema, existe más de un lagrangiano que da origen a este conjunto de curvas. En efecto, si $L = L(q^i, \dot{q}^i, t)$ da origen a ecuaciones de movimiento que describen adecuadamente un sistema, entonces $\overline{L} = \rho L + \frac{d}{dt} f(q^i, t)$, $\rho = \text{cte} \neq 0$, da origen a exactamente las mismas ecuaciones que L multiplicadas por un factor ρ (Landau y Lifshitz, 1976). Diremos que L y $\overline{L}$ son trivialmente equivalentes ya que las ecuaciones de movimiento derivadas de ellos (esencialmente) coinciden, y escribimos $L \equiv \overline{L}$.

En efecto, si las ecuaciones de movimiento derivadas de dos lagrangianos L y $\overline{L}$ son idénticas (salvo por un factor ρ) entonces necesariamente se tiene $L \equiv \overline{L}$.

Existe una manera más general de definir lagrangianos que describan el mismo sistema que consideraremos ahora. Realmente, no es necesario que las ecuaciones de movimiento coincidan, para este propósito, sino solamente que sean equivalentes, es decir, que todas las soluciones de un sistema lo sean del otro y viceversa (Currie y Saletan, 1966).

Dos lagrangianos L y $\overline{L}$ que satisfagan este criterio se llaman s-equivalentes (o simplemente equivalentes), y escribimos $L \simeq L$.

Supondremos en lo que sigue que L y $\overline{L}$ son regulares, es decir, que

$$\det(W_{ij}) \neq 0 \quad \text{y} \quad \det(\overline{W}_{ij}) \neq 0 \quad , \tag{2.1}$$

donde

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \quad y \quad \overline{W}_{ij} = \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \quad . \tag{2.2}$$

Las matrices W y $\overline{W}$ son invertibles. Escribimos las ecuaciones de Euler-Lagrange usando

$$E_i L = W_{ij} \ddot{q}^j + V_{ij}\dot{q}^j + U_i \quad , \tag{2.3}$$

donde

$$V_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} \quad y \quad U_i = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \quad . \tag{2.4}$$

El operador E_i se llama el operador de Euler-Lagrange.

Es fácil ver que si L y $\overline{L}$ dan origen a ecuaciones diferenciales equivalentes entonces

$$E_i\overline{L} = \Lambda_i{}^j(q,\dot{q},t)E_j L \quad , \tag{2.5}$$

donde Λ es una matriz invertible definida por

$$\Lambda_i{}^j = \overline{W}_{is}(W^{-1})^{sj} \quad . \tag{2.6}$$

En efecto, las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$E_i L = W_{ij}\ddot{q}^j + V_{ij}\dot{q}^j + U_i = 0 \quad , \tag{2.7}$$

$$E_i\overline{L} = \overline{W}_{ij}\ddot{q}^j + \overline{V}_{ij}\dot{q}^j + \overline{U}_i = 0 \quad , \tag{2.8}$$

y si ellas son equivalentes entonces se debe tener que las aceleraciones obtenidas de las Ecs. (2.7) y (2.8) deben coincidir. Esto es, que

$$\ddot{q}^i = -(W^{-1})^{ij}(V_{jk}\dot{q}^k + U_j) = -(\overline{W}^{-1})^{ij}(\overline{V}_{jk}\dot{q}^k + \overline{U}_j) \tag{2.9}$$

debe ser una identidad (como función de q^i, $\dot{q}^i$, t). Las Ecs. (2.6) y (2.9) implican la Ec. (2.5).

Se puede ver que este resultado es una consecuencia del hecho que las ecuaciones de Euler-Lagrange son lineales en las aceleraciones. La idea de esta demostración está contenida (para el caso unidimensional) en el trabajo de Currie y Saletan (1966). En realidad, estos autores trataron en su artículo el caso unidimensional (una sola coordenada) en que la matriz Λ se reduce a una sola función y mostraron que esta función es una constante de movimiento. Además encontraron la forma de relacionar L, $\overline{L}$ y Λ, es decir, como construir $\bar{L}$ dados L y una de sus constantes de movimiento Λ .

Valdría la pena precisar que Darboux resolvió en 1891 el problema inverso del cálculo de variaciones en una dimensión. El problema inverso consiste en encontrar todos los lagrangianos que dan origen a ecuaciones diferenciales con una solución general dada y es, por lo tanto, un problema más general que el de lagrangianos equivalentes.

Aquí nos preocuparemos del caso multidimensional y en la sección IV regresaremos sobre este tema.

El caso multidimensional fue tratado por Hojman y Harleston (1981) donde se demostró el siguiente teorema: La traza de todas las matrices obtenidas como potencias enteras de Λ son constantes de movimiento, es decir,

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{tr}(\Lambda^k) = 0 \qquad . \tag{2.10}$$

Estas constantes de movimiento no son funcionalmente independientes, debido al teorema de Cayley-Hamilton (Birkhoff y MacLane, 1977).

La idea es encontrar la ecuación de movimiento para Λ , es decir,

$$\frac{d}{dt}\Lambda_i{}^j = \ddot{q}^s \frac{\partial}{\partial \dot{q}^s}\Lambda_i{}^j + \dot{q}^s \frac{\partial}{\partial q^s}\Lambda_i{}^j + \frac{\partial}{\partial t}\Lambda_i{}^j = A_i{}^j \tag{2.11}$$

utilizando la definición de Λ, **W**, y $\bar{\mathbf{W}}$.

No es difícil obtener que

$$\frac{d}{dt}\Lambda_{ij} = \Lambda_i{}^s(V_{st}-V_{ts})\,(W^{-1})^{tj} - (\bar{V}_{is}-\bar{V}_{si})(W^{-1})^{sj} \qquad . \tag{2.12}$$

La derivada de la traza de Λ^k es

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{tr}(\Lambda^k) = k(\Lambda^{k-1})_j{}^i \frac{d}{dt}\Lambda_i{}^j \tag{2.13}$$

y es fácil mostrar que esta derivada es nula.

Este teorema, sin embargo, no nos dice cómo construir el lagrangiano $\bar{L}$ dados L y Λ. En efecto, de la identidad (2.5) (o las Ecs. (2.6) y (2.9) se tiene que

$$\bar{W}_{ij} = \Lambda_i{}^k W_{kj} \qquad , \tag{2.14}$$

$$\bar{V}_{ij}\dot{q}^j + \bar{U}_i = \Lambda_i{}^k(V_{kj}\dot{q}^j + U_k) \qquad , \tag{2.15}$$

pero, dado una Λ que satisfaga el teorema, no está garantizado que exista un $\overline{L}$ que satisfaga (2.14) y(2.15). Para el caso bidimensional, Douglas (1941) demostró que hay lagrangianos L que son esencialmente únicos, es decir que $\overline{L} \simeq L$ implica $\overline{L} \equiv L$. Para este tipo de lagrangianos se puede definir muchas matrices Λ que satisfagan (2.10) pero no existe ningún $\overline{L}$ no trivial que satisfaga (2.14) y (2.15). Lo ideal sería resolver el sistema (2.14) y (2.15) para $\overline{L}$ y Λ dado L. Este es un problema todavía abierto.

A continuación mostraremos unos ejemplos donde el sistema (2.14) y (2.15) se puede resolver para $\overline{L}$ con L dado "adivinando" Λ.

i) Caso unidimensional

Consideremos la partícula libre (con m=1) en una dimensión descrita por el lagrangiano L,

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 \quad , \tag{2.16}$$

y la ecuación de movimiento

$$E_1 L \equiv \ddot{q}_1 = 0 \quad . \tag{2.17}$$

Las constantes de movimiento C_1 y C_2 asociadas a (2.17) son

$$C_1 = \dot{q}_1 \quad , \tag{2.18}$$

$$C_2 = q_1 - \dot{q}_1 t \quad . \tag{2.19}$$

En este caso la matriz Λ tiene sólo un elemento Λ_{11}. Elijamos

$$\Lambda_{11} = C_2 = q_1 - \dot{q}_1 t \quad . \tag{2.20}$$

No es difícil mostrar que

$$\overline{L} = \frac{1}{2} q_1\dot{q}_1^2 - \frac{1}{6}\dot{q}_1^3 t \tag{2.21}$$

es tal que

$$E_1\overline{L} \equiv (q_1 - \dot{q}_1 t)\ddot{q}_1 = \Lambda_{11}E_1 L \tag{2.22}$$

y, consecuentemente, la ecuación de movimiento

$$E_1\overline{L} = 0 \tag{2.23}$$

es equivalente a (2.17).

Es interesante notar que

$$\Lambda_{11} = q_1 - \dot{q}_1 t = 0 \tag{2.24}$$

constituye una solución particular de (2.17). Esto implica que la s-equivalencia se preserva a pesar de que $\Lambda_{11} = 0$.

Para tener $\Lambda_{11} \neq 0$ estrictamente, se puede elegir

$$\Lambda_{11} = C_2^2 + \rho \quad , \qquad \rho > 0 \qquad \rho = \text{constante}, \tag{2.25}$$

por ejemplo, en cuyo caso se tienen estrictamente las condiciones del teorema.

ii) Caso bidimensional

Consideremos el oscilador armónico isotrópico bidimensional ($m=1$, $\omega=1$) descrito por el lagrangiano L,

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) \quad , \tag{2.26}$$

cuyas ecuaciones de movimiento son

$$E_i L \equiv \ddot{q}_i + q_i = 0 \quad , \qquad i = 1,2. \tag{2.27}$$

La elección

$$\Lambda_{11} = E = \Lambda_{22}, \qquad \Lambda_{12} = C = \Lambda_{21} \tag{2.28}$$

con

$$E = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) \quad , \tag{2.29}$$

$$C = \dot{q}_1\dot{q}_2 + q_1 q_2 \tag{2.30}$$

da origen al lagrangiano

$$\begin{aligned} \overline{L} = {} & \frac{1}{24}(\dot{q}_1^4 + \dot{q}_2^4) + \frac{1}{4}\dot{q}_1^2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{4}(q_1^2+q_2^2)(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2) + \\ & + q_1 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - \frac{3}{4} q_1^2 q_2^2 - \frac{1}{8}(q_1^4 + q_2^4) \end{aligned} \tag{2.31}$$

que es s-equivalente a L.

En efecto, las ecuaciones

$$E_1\overline{L} \equiv E(\ddot{q}_1 + q_1) + C(\ddot{q}_2 + q_2) = 0 \quad , \tag{2.32}$$

$$E_2\overline{L} \equiv C(\ddot{q}_1 + q_1) + E(\ddot{q}_2 + q_2) = 0 \tag{2.33}$$

son equivalentes a (2.27) incluso cuando el rango de Λ es menor que 2.

Para tener det $\Lambda \neq 0$ se puede elegir otro lagrangiano $\bar{\bar{L}}$,

$$\bar{\bar{L}} = \rho L + \bar{L} \qquad (\rho > 0) \tag{2.34}$$

y en este caso

$$\det \Lambda > 0 \qquad , \tag{2.35}$$

y se cumplen exactamente las condiciones del teorema. Para los detalles de estos cálculos y otros ejemplos se sugiere consultar Hojman y Harleston (1981).

III. PROBLEMA INVERSO

El problema inverso del cálculo de variaciones (Santilli, 1978) consiste en determinar cuando un sistema S de las trayectorias de un grupo de partículas puede ser descrito como trayectorias extremas de una integral de acción:

$$I = \int L(q,\dot{q},\ldots,q^{(r)},t)dt \quad . \tag{3.1}$$

Aquí el lagrangiano depende de las primeras **r** derivadas con respecto al tiempo **t** de las coordenadas q^i. La dimensión N del sistema de partículas es el número de coordenadas q^i $(i = 1,\ldots,N)$. Las ecuaciones de Euler-Lagrange de esta integral deben tener los elementos de S como soluciones.

Una forma restringida de este problema es aquella que se refiere a un grupo específico de ecuaciones de orden 2r:

$$F\,(q,\dot{q},\ldots,q^{(2r)},t) = 0 \quad . \tag{3.2}$$

Aquí, en el problema inverso restringido, son las ecuaciones, y no sus soluciones, las que tienen importancia.

La segunda ley de Newton establece que las aceleraciones tienen interés físico. Por consiguiente, el caso de ecuaciones de segundo orden ha gozado de especial atención. Llamamos problema inverso restringido de la mecánica de Newton a la búsqueda de un lagrangiano para un grupo de ecuaciones de segundo orden. En este problema buscamos un lagrangiano que solamente dependa de $q^i,\dot{q}^i,t$, y que tenga, al menos términos cuadráticos en las velocidades.

El problema inverso no restringido para la mecánica de Newton empieza con un sistema E de ecuaciones de segundo orden y su conjunto S de soluciones. En este caso el problema consiste en buscar un lagrangiano L cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange $E_i L = 0$ sean equivalentes a E, es decir, cuyas ecuaciones tengan como soluciones a los elementos de S. Este es el problema principal y será éste del cual nos preocuparemos.

Un sistema de ecuaciones puede ser de primer orden. El problema inverso en este caso es buscar un lagrangiano lineal en las velocidades $\dot{q}^i$ que describa estas ecuaciones. Este problema se trata en la sección siguiente. Un problema que se relaciona con éste es determinar un hamiltoniano para un sistema S de trayectorias en el espacio de las q^i (no en el espacio de fase). No tratamos específicamente este problema (ver Currie y Saletan, 1966).

En esta sección describimos los problemas inversos con atención particular en la pregunta ¿Existe un lagrangiano? El problema del método para encontrar un lagrangiano lo describimos brevemente sólo por medio de ejemplos. El problema de los métodos para encontrar todos los lagrangianos equivalentes a uno conocido es el tema del resto de este artículo.

Un sistema S que consiste de trayectorias que se portan bastante bien siempre tienen un lagrangiano (Havas, 1973). En este caso S son las soluciones de un sistema de ecuaciones E y hay por lo menos otro sistema equivalente $\bar{E}$ de ecuaciones de primer orden, para el que existe un lagrangiano. Es claro que normalmente es necesario aumentar el número de coordenadas. Describimos el método de encontrar todos estos lagrangianos lineales en la sección que sigue.

El problema general de buscar todos los lagrangianos de cualquier orden para un sistema S dado de trayectorias no está resuelto. Sin embargo, Helmholtz (1887) se preocupó de atacar el problema restringido para un grupo de ecuaciones E (ver Havas, 1957 y Santilli, 1978). De interés particular son las condiciones sobre las funciones F_i para que exista un lagrangiano en el caso de segundo orden (r = 1, el problema inverso restringido de la mecánica de Newton). Estas condiciones (Havas, 1957) son

$$\frac{\partial F_i}{\partial \ddot{q}^j} = \frac{\partial F_j}{\partial \ddot{q}^i}\ , \qquad (3.2)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}^j} + \frac{\partial F_j}{\partial \dot{q}^i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_i}{\partial \ddot{q}^j} + \frac{\partial F_j}{\partial \ddot{q}^i} \right) , \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial q^j} - \frac{\partial F_j}{\partial q^i} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial F_j}{\partial \dot{q}^i} \right) . \tag{3.4}$$

Una consecuencia de estas ecuaciones es que los F_i deben ser lineales en las aceleraciones $\ddot{q}^i$.

Si existe un lagrangiano L para el problema inverso de la mecánica de Newton, éste en general no es único, rigurosamente hablando. Podemos añadir una derivada total de una función f de q y t con respecto al tiempo: Sea $\overline{L}' = L + \frac{df}{dt}$, entonces $E_i\overline{L} = E_iL$. A la inversa, si $\overline{L}$ es una función de $q^i, \dot{q}^i$ y t que satisface $E_i\overline{L} = E_i\overline{L}$ entonces $\overline{L} = L + \frac{df}{dt}$ para alguna f.

Además, si $\overline{L} = \rho L + \frac{df}{dt}$, donde ρ = constante $\neq 0$, se tiene que $E_i\overline{L} = \rho E_iL$. Por lo tanto $\overline{L}$ y L son equivalentes. Si L existe para el problema inverso no restringido y si los únicos $\overline{L}$ que son equivalentes a L son de la forma $\overline{L} = \rho L + \frac{df}{dt}$, decimos que L es esencialmente único.

El problema inverso no restringido para la mecánica de Newton fue resuelto por Darboux (1891) en el caso unidimensional, cuando se trata de sólo una coordenada q, (ver también Havas, 1957, y Currie y Saletan, 1966). En este caso el sistema *S* está constituido por las soluciones de una ecuación de segundo orden, que podemos resolver para la aceleración:

$$\ddot{q} + G(q,\dot{q},t) = 0 \quad . \tag{3.5}$$

Las condiciones de Helmholtz son satisfechas excepto (3.3), que toma la forma

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{q}} = 0 \quad , \tag{3.6}$$

por lo tanto, no existe un lagrangiano para la ecuación (3.5) si la función G depende de $\dot{q}$. Sin embargo, si G depende de $\dot{q}$, podemos buscar una función λ y un lagrangiano L que satisfagan

$$E_1L \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \lambda(\ddot{q} + G) . \tag{3.7}$$

En este caso las condiciones (3.3) de Helmoltz implican

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}}(\lambda G) = \frac{\partial \lambda}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \lambda}{\partial t} \quad . \tag{3.8}$$

En general, existe una λ que satisface esta condición y por lo tanto existe un lagrangiano.

Podemos ver este mismo resultado escribiendo la ecuación (3.7) para L en dos partes:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} = \lambda \quad , \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}\partial q}\dot{q} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}\partial t} - \frac{\partial L}{\partial q} = \lambda G \quad . \tag{3.10}$$

La derivada de (3.10) con respecto a $\dot{q}$ da directamente la ecuación (3.8). Dado cualquier λ que satisfaga (3.8), podemos escribir la solución de (3.9) como

$$L = \ell + X(q,t)\dot{q} + Y(q,t) \quad , \tag{3.11}$$

donde

$$\ell = \int\int d\dot{q}'d\dot{q}''\lambda(q,\dot{q}'',t) \; . \tag{3.12}$$

Esta forma para L se sustituye en la ecuación (3.10), que implica

$$\frac{\partial X}{\partial t} - \frac{\partial Y}{\partial q} = -\frac{\partial^2 \ell}{\partial \dot{q}\partial q}\dot{q} - \frac{\partial^2 \ell}{\partial q\partial t} + \frac{\partial \ell}{\partial q} + \frac{\partial^2 \ell}{\partial \dot{q}^2} G \; . \tag{3.13}$$

El miembro derecho de (3.13) tiene derivada nula con respecto a $\dot{q}$ debido a (3.8). Entonces podemos resolver (3.13) para las funciones incógnitas X,Y (de infinitas maneras diferentes).

Un caso importante se presenta cuando G no depende de q:

$$G = G(q,t) \; . \tag{3.14}$$

La condición (3.6) es entonces satisfecha, y un L posible está dado por

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \int f(q',t)dq' . \tag{3.15}$$

Si un lagrangiano L es conocido para el caso unidimensional, el problema siguiente es buscar todos los otros que sean equivalentes a ése.

La ecuación de Euler-Lagrange para L es

$$E_i L = W\ddot{q} + V \; , \tag{3.16}$$

donde

$$W = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \quad , \quad V = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}\partial q}\,\dot{q} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}\partial t} - \frac{\partial L}{\partial q} \quad . \tag{3.17}$$

Si $\bar{L}$ es equivalente a L, entonces es necesario que exista Λ, distinto de cero, que satisfaga

$$\bar{W} = \Lambda W \quad , \tag{3.18}$$

$$\bar{V} = \Lambda V \quad ; \tag{3.19}$$

como mostramos en la sección anterior, Λ es una constante de movimiento:

$$\frac{d\Lambda}{dt} = 0 \tag{3.20}$$

En este caso, es suficiente tener Λ, una constante de movimiento arbitraria, para obtener $\bar{L}$. El método consiste en resolver primero (3.13):

$$L' = \ell + X(q,t)\dot{q} + Y(q,t) \quad , \tag{3.21}$$

donde

$$\ell = \int\!\!\int d\dot{q}'\, d\dot{q}''\Lambda\,(q,\dot{q}'',t)\; W(q,\dot{q}'',t)\,. \tag{3.22}$$

La ecuación para X, Y es la ecuación básica (3.19):

$$\frac{\partial X}{\partial t} - \frac{\partial Y}{\partial q} = -\frac{\partial^2 \ell}{\partial \dot{q}\partial q}\,\dot{q} - \frac{\partial^2 \ell}{\partial \dot{q}\partial t} + \frac{\partial \ell}{\partial q} + \Lambda V. \tag{3.23}$$

La derivada con respecto a $\dot{q}$ de esta ecuación es igual a cero cuando $\frac{d\Lambda}{dt} = 0$, y por lo tanto podemos encontrar X y Y. Daremos ejemplos más adelante.

En el caso bidimensional, el problema inverso para la mecánica de Newton fue resuelto por Douglas (1941). En este caso las ecuaciones de movimiento son

$$\ddot{q}^1 + G^1(q^1,\dot{q}^2,\dot{q}^1,\dot{q}^2,t) = 0 \quad , \tag{3.24}$$

$$\ddot{q}^2 + G^2(q^1,q^2,\dot{q}^1,\dot{q}^2,t) = 0 \quad .$$

Douglas definió una matriz

$$\Delta = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix} \quad , \tag{3.25}$$

donde

$$A = -\frac{d}{dt}\frac{\partial G^1}{\partial \dot{q}^2} + 2\frac{\partial G^1}{\partial q^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial G^1}{\partial \dot{q}^2}\left(\frac{\partial G^1}{\partial \dot{q}^1} + \frac{\partial G^2}{\partial \dot{q}^2}\right) ,$$

$$B = \frac{d}{dt}\frac{\partial G^1}{\partial \dot{q}^1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial G^2}{\partial \dot{q}^2} - 2\left(\frac{\partial G^1}{\partial q^1} - \frac{\partial G^2}{\partial q^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial G^1}{\partial \dot{q}^1} - \frac{\partial G^2}{\partial \dot{q}^2}\right)$$
$$\left(\frac{\partial G^1}{\partial \dot{q}^1} + \frac{\partial G^2}{\partial \dot{q}^2}\right) ,$$

$$C = \frac{d}{dt}\frac{\partial G^2}{\partial \dot{q}^1} - 2\frac{\partial G^2}{\partial q^1} + \frac{1}{2}\frac{\partial G^2}{\partial \dot{q}^1}\left(\frac{\partial G^1}{\partial \dot{q}^1} + \frac{\partial G^2}{\partial \dot{q}^2}\right) . \tag{3.26}$$

En estas fórmulas la derivada $\frac{d}{dt}$ está dada por

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^1\frac{\partial}{\partial q^1} + \dot{q}^2\frac{\partial}{\partial q^2} - G^1\frac{\partial}{\partial \dot{q}^1} - G^2\frac{\partial}{\partial \dot{q}^2} , \tag{3.27}$$

y las funciones A_1, B_1, C_1 son

$$A_1 = \frac{dA}{dt} + \frac{\partial G^1}{\partial \dot{q}^1}A - \frac{1}{2}\frac{\partial G^1}{\partial \dot{q}^2}B ,$$

$$B_1 = \frac{dB}{dt} + \frac{\partial G^2}{\partial \dot{q}^1}A + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial G^1}{\partial \dot{q}^1} + \frac{\partial G^2}{\partial \dot{q}^2}\right)B + \frac{\partial G^1}{\partial \dot{q}^2}C ,$$

$$C_1 = \frac{dC}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial G^2}{\partial \dot{q}^1}B + \frac{\partial G^2}{\partial \dot{q}^2}C , \tag{3.28}$$

y A_2, B_2, C_2 se obtienen de A_1, B_1, C_1, por las mismas fórmulas (recursivamente).

Douglas clasificó las ecuaciones (3.24) por el rango de la matriz Δ: Caso I es cuando Δ tiene rango cero; en el Caso II tiene rango 1; en el Caso III tiene rango 2; en el Caso IV tiene rango 3 (es decir, det $|\Delta| \neq 0$).

En todos los casos Douglas consideró no solamente las ecuaciones (3.24), sino también todas las ecuaciones equivalentes a (3.24). Es decir, estudió el problema inverso no restringido.

Hay tres clases de sistemas S de trayectorias en el caso bidimensional. Uno consiste de los S para los cuales no existe un lagrangiano L, por ejemplo aquellos para los que sus ecuaciones son del Caso IV. Hay otros para los que existe L y éste es esencialmente único. Para la tercera clase de S existen muchos lagrangianos equivalentes. La clasificación es muy compleja; daremos algunos ejemplos más adelante.

En el caso general del problema inverso de la mecánica de Newton escribimos las ecuaciones de movimiento como

$$\ddot{q}_i + G^i(q,\dot{q},t) = 0 \ . \tag{3.29}$$

El problema se presenta porque puede existir L cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange satisfagan

$$E_i L = \lambda_{ij}(\ddot{q}^j + G^j) \ , \tag{3.30}$$

de donde

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} = \lambda_{ij} \ , \tag{3.31}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \lambda_{ij} G^j \ . \tag{3.32}$$

La derivada de (3.32) con respecto a $\dot{q}^h$ es

$$\dot{q}^j \frac{\partial}{\partial q^j}\lambda_{ih} + \frac{\partial}{\partial t}\lambda_{ih} = G^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^h}\lambda_{ij} + \lambda_{ij}\frac{\partial G^i}{\partial \dot{q}^h} \ . \tag{3.33}$$

Por lo tanto hay muchos obstáculos para decidir si existe un L. Primero debe establecerse si existe λ_{ij} que resuelva (3.33). A continuación se investiga si (3.31) admite una solución. Esta debe ser una solución general con funciones desconocidas, y para encontrar éstas, hay que resolver (3.32), el último obstáculo.

El problema de la unicidad de L es el problema que discutimos en el resto de este artículo, es decir cómo podemos encontrar todos los $\bar{L}$ que son equivalentes a uno dado.

Ahora presentamos algunos ejemplos. No consideramos el caso general de soluciones S de ecuaciones de orden arbitrario. Solamente describimos ejemplos del problema inverso de la mecánica de Newton. El caso más simple es aquél en que las fuerzas son conservativas, es decir, provienen del gradiente de una función $\phi(q,t)$:

$$\ddot{q}^i + \frac{\partial \phi}{\partial q^i} = 0 \ . \tag{3.34}$$

Es claro que la condición (3.33) es satisfecha para λ_{ij} = constante. La solución de (3.31) es posible solamente cuando $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$; en este caso podemos escribir

$$L = \frac{1}{2}\lambda_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j + X_i(q,t)\dot{q}^i + Y(q,t) \quad . \tag{3.35}$$

La ecuación (3.32) se escribe entonces como

$$\left(\frac{\partial X_i}{\partial q^j} - \frac{\partial X_j}{\partial q^i}\right)\dot{q}^j + \frac{\partial X_i}{\partial t} - \frac{\partial Y}{\partial q^i} = \lambda_{ij}\frac{\partial \phi}{\partial q^j} \quad . \tag{3.36}$$

Debido a que el coeficiente de $\dot{q}^j$ se iguala a cero, existe una función $\psi(q,t)$ tal que X_i es su gradiente:

$$X_i = \frac{\partial \psi}{\partial q^i} \quad . \tag{3.37}$$

En consecuencia, la ecuación (3.36) se convierte en

$$\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - Y\right) = \lambda_{ij}\frac{\partial \phi}{\partial q^i} \quad . \tag{3.38}$$

Esta última ecuación tiene una solución si sus condiciones de integración son satisfechas:

$$\lambda_{ij}\frac{\partial^2 \phi}{\partial q^h \partial q^j} = \lambda_{hj}\frac{\partial^2 \phi}{\partial q^i \partial q^j} \tag{3.39}$$

Definimos la matriz

$$\phi_{ij} \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial q^i \partial q^j} \quad . \tag{3.40}$$

Es claro que ϕ_{ij} varía de un lugar a otro en general. Si los valores propios de ϕ_{ij} son generales en sentido algebraico, es necesario que λ_{ij} sea proporcional a la identidad (por el Lema de Schur, ver Hamermesh, 1964):

$$\lambda_{ij} = \lambda\delta_{ij} \; , \; \lambda = \text{constante} \quad . \tag{3.41}$$

Tenemos $\lambda = 1$, y L es entonces

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^i\dot{q}^i - V \quad . \tag{3.42}$$

Al contrario, si G^i no depende de $\dot{q}^i$ en (3.33) y si deseáramos un λ_{ij} que no dependiera de $\dot{q}^i$, vemos que es necesario que λ_{ij} = constante. Entonces es necesaria la forma (3.35) para L (con $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$), y por consiguiente se tiene (3.36) con el miembro derecho igual a $\lambda_{ij}G^j$. La función ψ existe y la condición (3.39) implica

$$\lambda_{is}\frac{\partial G^s}{\partial q^j} - \lambda_{js}\frac{\partial G^s}{\partial q^i} = 0 \ . \tag{3.43}$$

Por lo tanto, debe existir una función ξ tal que G^i se escribe como

$$G^i = \lambda^{is}\frac{\partial \xi}{\partial q^s} \ , \tag{3.44}$$

donde λ^{is} es el inverso de λ_{sj}:

$$\lambda^{is}\lambda_{sj} = \delta^i_j \ . \tag{3.45}$$

En el caso de $\frac{\partial G^i}{\partial q^h}$ algebraicamente general, volvemos a la conclusión que $\lambda_{ij} = \delta_{ij}$ esencialmente y G^i es un gradiente directamente. Esta es una foma muy restringida del problema inverso: dice que es necesario que una fuerza G^i sea conservativa para que exista un lagrangiano L tal que ninguno de sus términos tenga más de tres factores de $\dot{q}^i$.

En el caso bidimensional, consideramos fuerzas conservativas $G^i = \frac{\partial \phi}{\partial q^i}$, pero también consideramos la posibilidad que λ_{ij} depende de $\dot{q}^i$. La matriz Δ de (3.25) es tal que

$$\begin{aligned} A &= 2\phi_{12} = -C \ , \\ B &= 2(\phi_{22} - \phi_{11}) \ . \end{aligned} \tag{3.46}$$

Por consiguiente, Δ es en general de rango dos, es el Caso III de Douglas. Douglas mostró que el lagrangiano L, si existe, es esencialmente único en este caso. Por lo tanto L es de la forma (3.42).

Hay casos especiales, también cuando Δ es de rango uno. En este caso, Douglas mostró que el L de (3.42) no es único. Por ejemplo, si $\phi_{12}=0$, L puede expresarse como dos lagrangianos unidimensionales separados:

$$L = L^{(1)}\ (q^1,\dot{q}^1,t) + L^{(2)}\ (q^2,\dot{q}^2,t) \ . \tag{3.47}$$

Tanto $L^{(1)}$ como $L^{(2)}$ no son únicos.

Un caso especial de fuerza conservativa se tiene para $\phi=\phi(r)$, donde $r^2 = (q^1)^2 + (q^2)^2$. Es fácil ver que solamente para las funciones $\phi=Cr^2+d^2$ (donde C, d son constantes) resulta en que el lagrangiano no es único. En particular el problema de Coulomb bidimensional (para el que $\phi=\frac{C}{r}$) tiene un lagrangiano esencialmente único.

Douglas (1941) presentó algunos ejemplos de ecuaciones cuyas soluciones *S* que no tienen lagrangianos. Un ejemplo es con

$$G^1 = -(q^1)^2 - (q^2)^2 \ , \quad G^2 = -\, q^1 \ . \tag{3.48}$$

La matriz Δ tiene rango tres, es decir del Caso IV, y no existe L ni para las ecuaciones (3.24) ni para ecuaciones equivalentes a ellas. Claro que Douglas mostró que no existe L si consideramos L tales que sus ecuaciones sean de segundo orden. Hay ecuaciones de primer orden equivalentes a (3.34), con variables adicionales, para las que existe un lagrangiano (ver más adelante).

Otro ejemplo es la ecuación de un oscilador armónico con fricción

$$\ddot{q} + a\dot{q} + bq = 0 \qquad (a,b = \text{constantes}) . \tag{3.49}$$

En este caso, no se satisface la condición (3.6). Por lo tanto, no existe un lagrangiano cuya ecuación de Euler-Lagrange sea exactamente (3.49). Sin embargo, podemos buscar una función λ que satisfaga (3.8), que implica ahora

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{q}} (a\dot{q} + bq) + \lambda a = \frac{\partial\lambda}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial\lambda}{\partial t} . \tag{3.50}$$

Si λ no depende de $\dot{q}$, es necesario debido a (3.50) que tampoco dependa de q. Entonces λ es

$$\lambda = \lambda_0 e^{at} \qquad (\lambda_0 = \text{constante}) . \tag{3.51}$$

El lagrangiano (si $\lambda_0 = 1$) es

$$L = \frac{1}{2} e^{at}(\dot{q}^2 + bq^2) . \tag{3.52}$$

Si λ no depende de t, es necesario que dependa de q y $\dot{q}$. Una solución para λ es (Havas, 1957)

$$\lambda = (\dot{q}^2 + aq\dot{q} + bq^2)^{-1}. \tag{3.53}$$

El lagrangiano entonces es

$$L = \frac{2\dot{q} + aq}{cq} \tan^{-1} \left(\frac{2\dot{q} + aq}{cq}\right) - \frac{1}{2}\ln(\dot{q}^2 + aq\dot{q}^1 + bq^2) , \tag{3.54}$$

donde

$$c = (4b - a^2)^{1/2} . \tag{3.55}$$

Aquí tenemos dos lagrangianos (3.52) y (3.54) para las soluciones de (3.49), pero no hay ninguno para la ecuación (3.49) misma.

Finalmente, nuestro último ejemplo es la ecuación lineal

$$\ddot{q}^i + L_{ij}\dot{q}^j + K_{ij}q^j = 0 , \tag{3.56}$$

donde L_{ij} y K_i son constantes. Las condiciones de Helmholtz (3.2, 3.3, 3.4) dicen que

$$L_{ij} = -L_{ji} \quad , \quad K_{ij} = K_{ji} \quad . \tag{3.57}$$

Entonces vemos que es posible encontrar un lagrangiano para una fuerza que depende de la velocidad si $\dot{q}^i$ está multiplicada por una matriz antisimétrica. Este es el caso de la fuerza magnética, que no existe en un sistema unidimensional (ver 3.6).

IV. LAGRANGIANOS DE PRIMER ORDEN

Como vimos en la sección III, existen sistemas bidimensionales para los cuales no existe un lagrangiano, otros para los cuales existe sólo uno y otros para los cuales existen infinitos lagrangianos. Aunque no existen estudios completos de este tipo para dimensiones mayores, es natural suponer que la situación será similar.

Consideraremos ahora un problema diferente relacionado con la existencia de lagrangianos para sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Se sabe que cualquier sistema de ecuaciones diferenciales se puede escribir de modo que las derivadas más altas sean de primer orden, esto es, si se tiene un sistema de n ecuaciones diferenciales de segundo orden, digamos

$$\ddot{q}^i = F^i(q^j,\dot{q}^j,t) \qquad i, j = 1,\dots,n \quad , \tag{4.1}$$

entonces, siempre existe la posibilidad de definir n nuevas variables

$$u^i = \dot{q}^i \qquad i = 1,\dots,n \quad , \tag{4.2}$$

de modo que el sistema (4.3)

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= u^i \\ \dot{u}^i &= F^i(q^j,u^j,t) \end{aligned} \tag{4.3}$$

sea equivalente a (4.1).

Una posibilidad es elegir las velocidades como las nuevas variables. Si existe un lagrangiano L de segundo orden para el sistema (4.1) otra posibilidad es definir los ímpetus $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ como las nuevas variables.

El sistema (4.3) se puede escribir en la forma

$$\dot{x}^a = f^a(x^b,t) \qquad a,b, = 1,\ldots 2n \tag{4.4}$$

con $x^i = q^i$, $x^{i+n} = u^i$, $f^i = u^i$, $f^{i+n} = F^i$, $i = 1,\ldots n$.

Consideremos ahora el problema inverso del cálculo de variaciones para el sistema (4.4). Sea $L = L(x^a,\dot{x}^a,t)$ un lagrangiano que da origen a ecuaciones equivalentes al sistema (4.4). Las ecuaciones de movimiento debidas a L ,

$$E_a L \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^a \partial \dot{x}^b}\ddot{x}^b + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^a \partial x^b}\dot{x}^b + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^a \partial t} - \frac{\partial L}{\partial x^a} = 0 \quad , \tag{4.5}$$

son en general de segundo orden. Para que sean equivalentes a (4.4) es necesario que

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^a \partial \dot{x}^b} \equiv 0 \qquad \text{para todo } a,b,x^c,\dot{x}^c,t, \tag{4.6}$$

o sea,

$$L = \ell_a(x^b,t)\dot{x}^a + \ell_o(x^b,t) \qquad . \tag{4.7}$$

L debe ser, a lo más, lineal en las velocidades. Las ecuaciones de movimiento son entonces

$$\left(\frac{\partial \ell_a}{\partial x^b} - \frac{\partial \ell_b}{\partial x^a}\right)\dot{x}^b + \frac{\partial \ell_a}{\partial t} - \frac{\partial \ell_o}{\partial x^a} = 0 \tag{4.8}$$

y para que sean equivalentes a (4.4) debe tenerse que

$$\det\left(\frac{\partial \ell_a}{\partial x^b} - \frac{\partial \ell_b}{\partial x^a}\right) \neq 0 \tag{4.9}$$

y

$$\frac{\partial \ell_a}{\partial t} - \frac{\partial \ell_o}{\partial x^a} = -\left(\frac{\partial \ell_a}{\partial x^b} - \frac{\partial \ell_b}{\partial x^a}\right) f^b \qquad . \tag{4.10}$$

Havas (1973) mostró que el sistema (4.10) tiene siempre soluciones de un gran grado de arbitrariedad y por lo tanto existen varios lagrangianos que dan origen a las mismas ecuaciones de movimiento. En lo que sigue mostraremos explícitamente cómo se pueden construir, en principio, infinitos lagrangianos para un sistema (4.4) dado (Hojman y Urrutia, 1981).

En primer lugar, es conveniente reescribir el lagrangiano (4.7) introduciendo el tiempo t como una nueva coordenada con la notación

$$x^\mu = (t, x^a) \qquad \mu = 0,1,\ldots 2n \tag{4.11}$$

y considerar el parámetro arbitrario τ de modo que

$$x^\mu = x^\mu\ (\tau) \tag{4.12}$$

y la acción para el sistema (4.4) se escribe

$$S = \int L dt = \int \ell_\mu(x^\nu) \frac{dx^\mu}{d\tau}\, d\tau \quad , \tag{4.13}$$

de modo que S es invariante ante el cambio

$$\tau \to \tau' = \tau'(\tau) \quad . \tag{4.14}$$

Las ecuaciones de movimiento derivadas de S son

$$E_\mu L = \left(\frac{\partial \ell_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \ell_\nu}{\partial x^\mu}\right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \equiv M_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \ . \tag{4.15}$$

Estas 2n+1 ecuaciones deberían, en principio, ser equivalentes a las 2n ecuaciones (4.8) y, en efecto, lo son. La razón es que existe una identidad entre ellas, lo que implica que sólo 2n de ellas son independientes. Esto es una consecuencia de la invariancia de la acción ante cambios arbitrarios de parametrización (4.14). La identidad se obtiene al multiplicar $E_\mu L$ por $\frac{dx^\mu}{d\tau}$ y sumar sobre μ, cuyo resultado es <u>idénticamente</u> cero (sin necesidad de que $E_\mu L = 0$ sean satisfechas)

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} E_\mu L \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} \left(\frac{\partial \ell_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \ell_\nu}{\partial x^\mu}\right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \equiv 0 \ . \tag{4.16}$$

Otra manera de ver lo mismo es comprobar que la ecuación para $\mu = 0$ es una consecuencia de las ecuaciones para $\mu = a$. Así, se tiene

$$0 = \left(\frac{\partial \ell_a}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \ell_\nu}{\partial x^a}\right) \frac{dx^\nu}{d\tau} = \left(\frac{\partial \ell_a}{\partial x^o} - \frac{\partial \ell_o}{\partial x^a}\right) \frac{dx^o}{d\tau} +$$

$$+ \left(\frac{\partial \ell_a}{\partial x^b} - \frac{\partial \ell_b}{\partial x^a}\right) \frac{dx^b}{d\tau} \quad , \tag{4.17}$$

y multiplicando por $\frac{dx^a}{d\tau}$ y sumando sobre a se tiene

$$\frac{dx^a}{d\tau}\left(\frac{\partial \ell_a}{\partial x^\nu}-\frac{\partial \ell_\nu}{\partial x^a}\right)\frac{dx^\nu}{d\tau}=\frac{dx^a}{d\tau}\left(\frac{\partial \ell_a}{\partial x^o}-\frac{\partial \ell_o}{\partial x^a}\right)\frac{dx^o}{d\tau}=0 \quad . \tag{4.18}$$

Para tener una parametrización adecuada, debe cumplirse que

$$\frac{dx^o}{d\tau} \neq 0 \tag{4.19}$$

y consecuentemente las ecuaciones (4.18) implican

$$\left(\frac{\partial \ell_a}{\partial x^o}-\frac{\partial \ell_o}{\partial x^a}\right)\frac{dx^a}{d\tau}=0 \quad , \tag{4.20}$$

que es la ecuación para $\mu = 0$

Ahora bien, es directo mostrar, utilizando la condición (4.9), que las ecuaciones (4.15) son equivalentes a las ecuaciones (4.4) y que la descripción del sistema (4.4) utilizando la acción (4.13) es adecuada.

Como vimos, el sistema (4.15) tiene sólo 2n ecuaciones independientes que permitan determinar $\frac{dx^\mu}{d\tau}$ sólo parcialmente. Es obvio que $\frac{dx^\mu}{d\tau}$ <u>no</u> se puede determinar completamente porque τ es arbitrario. En realidad, lo que se puede determinar completamente es la dirección de $\frac{dx^\mu}{d\tau}$, es decir, las 2n razones

$$\frac{dx^i}{d\tau}\Big/\frac{dx^o}{d\tau}=\frac{dx^i}{dx^o} \tag{4.21}$$

que constituyen la velocidad física (independiente de τ). Otra manera de decir lo mismo es hacer notar que

$$\det M_{\mu\nu} = 0 \tag{4.22}$$

porque $M_{\mu\nu}$ es antisimétrica ,

$$M_{\mu\nu} = -M_{\mu\nu} \quad , \tag{4.23}$$

y su dimensión es impar.

Sin embargo, hemos supuesto que

$$\det M_{ab} \neq 0 \tag{4.24}$$

y por lo tanto el rango de $M_{\mu\nu}$ es 2n. Esto significa que $M_{\mu\nu}$ tiene sólo un vector propio con valor propio cero y éste (que está determinado sólo en dirección) es paralelo a $\frac{dx^\mu}{d\tau}$. En el espacio de coordenadas x^μ que estamos considerando, todo esto tiene una interpretación muy clara. Dado un punto x^μ del espacio, es decir, todas las posiciones y las velocidades a un tiempo t del sistema, existe una dirección $\frac{dx^\mu}{d\tau}$ que es tangente a la única curva solución que pasa por ese punto. En cada punto existe una única dirección $\frac{dx^\mu}{d\tau}$, definida por el único vector propio de $M_{\mu\nu}$ con valor propio cero, que es tangente a la curva solución. Entonces, si queremos construir los lagrangianos que representen el sistema, los definiremos como aquellos vectores ℓ_μ tal que el $M_{\mu\nu}$ construido de ellos tenga rango 2n ($\det M_{ab} \neq 0$) y que el vector propio con valor propio cero sea paralelo a $\frac{dx^\mu}{d\tau}$ ó f^μ donde f^o está definido por

$$f^\mu = (1, f^a) \,, \tag{4.25}$$

con f^a dado en la ecuación (4.4).

Para construir estos lagrangianos vale la pena hacer un breve paréntesis. Un sistema como el dado por (4.4) posee 2n constantes de movimiento $C^{(a)}$,

$$C^{(a)} = C^{(a)}(x^\nu) \,, \tag{4.26}$$

que son funcionalmente independientes, es decir tales que

$$\det C^{(a)}{}_{,b} \neq 0 \tag{4.27}$$

(ver por ejemplo Pontryagin (1962)). Dicho de otra manera, los 2n vectores $C^{(a)}{}_{,\mu}$, son linealmente independientes. Debido a que $C^{(a)}$ son constantes de movimiento, se tiene

$$\frac{dC^{(a)}}{d\tau} = C^{(a)}{}_{,\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad , \tag{4.28}$$

o sea,

$$C^{(a)}{}_{,\nu} f^\nu \equiv 0 \,. \tag{4.29}$$

Los 2n vectores linealmente independientes $C^{(a)}{}_{,\mu}$ son ortogonales a f^μ, lo que significa que la dirección de f^μ está únicamente definida en el espacio de 2n + 1 dimensiones.

Las 2n funciones $C^{(a)}$ junto con $C^{(0)} = t$ son funcionalmente independientes, es decir,

$$\det C^{(\alpha)}{}_{,\mu} \neq 0 \,, \tag{4.30}$$

por lo tanto las funciones $C^{(\alpha)}$ pueden considerarse como un nuevo sistema de coordenadas en nuestro espacio de dimensión 2n+1. Además, la condición (4.30) dice que los 2n+1 vectores $C^{(\alpha)}{}_{,\mu}$ son linealmente independientes. Regresando al problema de la construcción de los lagrangianos, ahora podemos escribir cualquier vector $\bar{\ell}_\mu$ como

$$\overline{\ell}_\mu(x^\nu) = \overline{\ell}_{(a)}(C^{(\beta)})C^{(a)}{}_{,\mu} + \overline{\ell}_{(0)}(C^{(\beta)})C^{(0)}{}_{,\mu} \quad , \tag{4.31a}$$

donde hemos expandido el vector $\overline{\ell}_\mu$ en la base $C^{(\alpha)}{}_{,\mu}$ con coeficientes $\ell_{(\alpha)}$ que escribimos como funciones de las nuevas coordenadas $C^{(\beta)}$. Si queremos considerar $\overline{\ell}_\mu$ para construir un lagrangiano, entonces se le puede sumar, sin perder generalidad, el gradiente de una función arbitraria $A(C^{(\beta)})$ ya que esto sólo agrega una derivada total al lagrangiano. Siempre se puede elegir A de modo que

$$\frac{\partial A}{\partial C^{(0)}} = - \overline{\ell}_{(0)}(C^{(\beta)}) \tag{4.31b}$$

y entonces

$$\ell_\mu = \overline{\ell}_\mu + \frac{\partial A}{\partial x^\mu}$$

$$\ell_\mu = \overline{\ell}_{(a)}C^{(a)}{}_{,\mu} + \overline{\ell}_{(0)}C^{(0)}{}_{,\mu} + \frac{\partial A}{\partial C^{(a)}}C^{(a)}{}_{,\mu} + \frac{\partial A}{\partial C^{(0)}}C^{(0)}{}_{,\mu}$$

$$\ell_\mu = (\overline{\ell}_{(a)} + \frac{\partial A}{\partial C^{(a)}})\, C^{(\alpha)}{}_{,\mu} \equiv \ell_{(a)}(C^{(\alpha)})\, C^{(a)}{}_{,\mu} \quad . \tag{4.32}$$

Podemos imponer a continuación que las ecuaciones de movimiento para $L = \ell_\mu \dfrac{dx^\mu}{d\tau}$ sean satisfechas en virtud de (4.4)

$$\begin{aligned} E_\mu L &\equiv \left(\frac{\partial \ell_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \ell_\nu}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \\ &\equiv \left(\ell_{(a),\nu}\, C^{(a)}{}_{,\mu} - \ell_{(a),\mu} C^{(a)}{}_{,\nu} \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \\ &\equiv \left(\frac{\partial \ell_{(a)}}{\partial C^{(b)}} - \frac{\partial \ell_{(b)}}{\partial C^{(a)}} \right) C^{(a)}{}_{,\mu}\, C^{(b)}{}_{,\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \\ &+ \frac{\partial \ell_{(a)}}{\partial C^{(0)}} C^{(0)}{}_{,\nu}\, C^{(a)}{}_{,\mu} \frac{dx^\nu}{d\tau} - \frac{\partial \ell_{(a)}}{\partial C^{(0)}} C^{(0)}{}_{,\mu}\, C^{(a)}{}_{,\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \ . \end{aligned} \tag{4.33}$$

Ahora, si las ecuaciones (4.28) se toman en cuenta, se tiene que todos los términos, excepto el penúltimo, se anulan. En consecuencia, debemos imponer

$$\frac{\partial \ell_{(a)}}{\partial C^{(0)}} = 0 \qquad (\text{para todo a}) \ , \tag{4.34}$$

ya que los vectores $C^{(a)}{}_{,\mu}$ son linealmente independientes y $C^{(0)}{}_{,\nu} \neq 0$. Llegamos entonces a la conclusión que ℓ_μ debe tener la forma

$$\ell_\mu = \ell_{(a)}(C^{(b)})C^{(a)}{}_{,\mu} \tag{4.35}$$

para que las ecuaciones de Euler Lagrange sean una consecuencia de las ecuaciones (4.4). A la inversa, para mostrar la equivalencia, impondremos que las ecuaciones de movimiento sean una consecuencia de las ecuaciones obtenidas del lagrangiano dado por (4.35).

Las ecuaciones de movimiento del lagrangiano (4.35) son

$$E_\mu L = \left(\frac{\partial \ell_{(a)}}{\partial C^{(b)}} - \frac{\partial \ell_{(b)}}{\partial C^{(a)}} \right) C^{(a)}{}_{,\mu}\, C^{(b)}{}_{,\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \tag{4.36}$$

y de ellas queremos deducir que $\frac{dx^\mu}{d\tau}$ es paralelo f^μ, o , en otras palabras, que todas las funciones $C^{(a)}$ son constantes de movimiento. Como los vectotores $C^{(a)}{}_{,\mu}$ son linealmente independientes, (o el rango de la matriz $C^{(a)}{}_{,\mu}$ es 2n), se tiene que $E_\mu L = 0$ implica

$$\left(\frac{\partial \ell_{(a)}}{\partial C^{(b)}} - \frac{\partial \ell_{(b)}}{\partial C^{(a)}} \right) C^{(b)}{}_{,\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \tag{4.37}$$

y para obtener

$$\frac{dC^{(b)}}{d\tau} = 0 \tag{4.38}$$

es necesario y suficiente requerir que

$$\det \left(\frac{\partial \ell_{(a)}}{\partial C^{(b)}} - \frac{\partial \ell_{(b)}}{\partial C^{(a)}} \right) \neq 0 \quad . \tag{4.39}$$

Existen infinitas maneras de garantizar la condición (4.39).

El determinante de una matriz η antisimétrica de dimensión par es proporcional al cuadrado de su pfaffiano, donde

$$\mathrm{pf}\ \eta \equiv \varepsilon^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{2n-1}\mu_{2n}}\eta_{\mu_1\mu_2}\ldots\eta_{\mu_{2n-1}\mu_{2n}} \quad . \tag{4.40}$$

Ahora definamos

$$\ell_{(a)} = \frac{1}{2p_a+1}(C^{(a+1)})^{2p_a+1} + \rho_a(r_o)\, C^{(a+1)} \quad (a = 1,3,5\ldots)$$

p_a entero positivo, $\rho_a(r_o)$

$$\ell_{(b)} = 0 \qquad (b = 2,4,6\ldots) \tag{4.41}$$

Entonces,

$$\eta_{(a),(a+1)} = \frac{\partial \ell_{(a)}}{\partial C^{(a+1)}} - \frac{\partial \ell_{(a+1)}}{\partial C^{(a)}} = (C^{(a+1)})^{2p_a} + \rho_a(r_o) \quad ,$$

$$\eta_{(a+1),(a)} = -\,\eta_{(a),(a+1)} \quad , \qquad (\text{ para } a = 1,3,5\ldots)$$

$$\eta_{(a)(b)} = 0 \qquad \text{en otro caso} \quad , \tag{4.42}$$

y esto asegura que pf η es estrictamente positivo.

La definición (4.41) asegura entonces, que existe, al menos, un número infinito denumerable de lagrangianos de primer orden que da origen al sistema (4.4). Vale la pena destacar que debido a la construcción bosquejada, la expresión (4.35) abarca todos los lagrangianos posibles, ya que si se considera otro conjunto diferente $D^{(a)}$ de constantes de movimiento funcionalmente independiente, entonces

$$\ell_\mu = \ell'_{(a)}(D^{(b)})\, D^{(a)}{}_{,\mu} = \ell'_{(a)} \frac{\partial D^{(a)}}{\partial C^{(b)}}\, C^{(b)}{}_{,\mu} \tag{4.43}$$

y redefinimos

$$\ell_{(b)}(C^{(c)}) \equiv \ell'_{(a)}(C^{(c)})\, \frac{\partial D^{(a)}}{\partial C^{(b)}} \quad , \tag{4.44}$$

con lo que volvemos a tener

$$\ell_\mu = \ell_{(b)}(C^{(c)})\, C^{(c)}{}_{,\mu} \tag{4.45}$$

como antes.

Este método que constituye un teorema explícito de existencia, puede también ser usado para construir explícitamente lagrangianos de primer orden para sistemas que no tienen lagrangianos usuales de segundo orden. En efecto, el sistema

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \dot{y} &= 0 \\ \ddot{y} + y &= 0 \end{aligned} \tag{4.46}$$

<u>no tiene</u> lagrangiano de <u>segundo orden</u>; sin embargo, si se considera el sistema equivalente de primer orden

$$\begin{aligned} &(x_1 = x \ , \ x_2 = y) \\ &\dot{x}_1 = x_3, \ \dot{x}_2 = x_4, \\ &\dot{x}_3 = x_4, \ \dot{x}_4 = x_2, \end{aligned} \tag{4.47}$$

es fácil ver que el método descrito anteriormente nos permite construir el lagrangiano

$$L = (x_2 + x_3)\,\dot{x}_1 + x_4\,\dot{x}_3 + \frac{1}{2}\,(x_4^2 - 2x_2x_3 - x_3^2) \qquad (4.48)$$

que da origen a un sistema de ecuaciones diferenciales equivalentes a (4.51). En forma análoga se puede construir un lagrangiano de primer orden para el sistema

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\gamma_1\,\dot{x} + \omega_1^2\,x - \xi y &= 0 \\ \ddot{y} + 2\gamma_2\,\dot{y} + \omega_2^2\,y - \eta x &= 0 \quad , \end{aligned} \qquad (4.49)$$

con

$$\xi\eta\,(\gamma_1 - \gamma_2)\,(\omega_1^2 - \gamma_1^2 + \omega_2^2 - \gamma_2^2) \neq 0 \quad , \qquad (4.50)$$

que no tiene lagrangiano de segundo orden. Estos ejemplos prueban que el estudio del problema inverso basado en sistemas de primer orden puede tener características muy distintas del problema usual de segundo orden. A pesar de que los lagrangianos de primer orden son degenerados, la teoría canónica puede ser construida en una forma consistente. Por otro lado, el uso de lagrangianos de primer orden está muy generalizado en la Física (sistemas fermiónicos, ecuaciones de Hamilton, principio de Palatini, principio variacional de Schwinger, método ADM en relatividad general, formulación de supergravedad, etc.).

Finalmente, vale la pena señalar que para implementar consistentemente el principio variacional de primer orden es preferible utilizar el principio variacional de Weiss que dice que la variación de la acción es una función que depende sólo de los puntos extremos entre los cuales la acción es evaluada, en lugar de usar el principio de Hamilton que dice que manteniendo fijos los valores de las coordenadas en los extremos, la variación de la acción debe anularse.

Es preciso destacar que el principio de Weiss es el adecuado para poder construir transformaciones canónicas en la teoría hamiltoniana. Para mayores detalles es aconsejable consultar las referencias.

V. LAGRANGIANOS PARA SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES SINGULARES.

Hasta ahora hemos considerado sistemas de ecuaciones diferenciales regulares, es decir, sistemas tales que las más altas derivadas de las variables pueden ser despejadas algebraicamente. Explícitamente, si estudiamos un sistema de ecuaciones diferenciales (de segundo orden)

$$M_{ij}(q^k, \mathring{q}^k, t)\, \ddot{q}^j + N_i(q^k, \mathring{q}^k, t) = 0 \,(i,j,k=1,\ldots n)\,, \tag{5.1}$$

decimos que el sistema (5.1) es regular si y sólo si

$$\det M_{ij} \neq 0 \tag{5.2}$$

y, por el contrario, es singular si y sólo si

$$\det M_{ij} = 0\,. \tag{5.3}$$

En general, en mecánica clásica, sólo se estudian sistemas regulares, pero recientemente el interés en sistemas singulares ha crecido en forma considerable debido a que gran parte de las teorías exitosas de interacciones fundamentales están descritas por sistemas singulares.

En efecto, la teoría electromagnética de Maxwell, la teoría gravitacional de Einstein y la teoría electrodébil de Salam y Weinberg, son teorías (invariantes) de norma (calibre o medida). Esto significa, utilizando notación de mecánica clásica, que las soluciones descritas por $q^i(t)$ y $q'^i(t) = q^i(t) + \delta q^i(t)$ representan el mismo estado físico del sistema, con $\delta q^i(t)$ dado por

$$\delta q^i(t) = \phi_a{}^i(q,t) f^a(t) + \psi_a{}^i(q,t)\, \dot{f}^a(t) \quad (\, a=1,\ldots,G\,), \tag{5.4}$$

donde $f^a(t)$ son G funciones arbitrarias del tiempo, $\phi_a{}^i(q,t)$ y $\psi_a{}^i(q,t)$ son funciones con una dependencia en q^i y t bien determinada. La transformación

$$q^i \to q'^i = q^i + \delta q^i \tag{5.5}$$

se denomina transformación de norma.

La propiedad recién descrita tiene su expresión más simple en la teoría electromagnética de Maxwell donde es bien sabido que los potenciales $A_\mu(x)$ y $A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{\partial\Lambda(x)}{\partial x^\mu}$ (donde $\Lambda(x)$ es una función arbitraria de x^ν) representan el mismo campo electromagnético.

Esta situación sólo es posible si las ecuaciones (5.1) no son todas independientes, ya que, en caso contrario las q^i estarían completamente determinadas por el sistema (5.1) y no cabría la posibilidad de obtener soluciones que contuvieran funciones arbitrarias del tiempo.

Como veremos, esta situación sólo puede presentarse cuando la ecuación (5.3) se cumple, es decir, para sistemas singulares. En otras palabras, cualquier sistema físico que presente algún tipo de invariancia de norma está descrito por un sistema de ecuaciones singular.

Consideremos entonces, el caso en que el sistema (5.1) es singular. En estas condiciones existen tres posibilidades que analizaremos en lo que sigue:

i) Existen identidades entre las ecuaciones (5.1), es decir, éstas no son completamente independientes.

ii) Existen ecuaciones que no contienen las aceleraciones (contienen las velocidades como derivadas más altas). Estas ecuaciones se llaman constricciones, porque implican que los valores iniciales de las velocidades y posiciones no se pueden especificar arbitrariamente, sino que están constreñidos por dichas ecuaciones.

iii) Existen identidades y constricciones. Este es el caso de las teorías mencionadas al comienzo.

Para precisar estas ideas, describiremos las situaciones mencionadas matemáticamente. Debido al hecho de que la matriz M_{ij} es singular, su rango R es menor que n. Existen entonces n-R vectores linealmente independientes $V_\alpha{}^i(q,\dot{q},t)$ propios de M_{ij} (por la izquierda) con valor propio cero, esto es,

$$V_\alpha{}^i M_{ij} = 0 \quad (\alpha = 1,\ldots n\text{-}R). \tag{5.6}$$

Considerando la ecuación (5.1) debe tenerse que

$$B_\alpha(q,\dot{q},t) \equiv V_\alpha{}^i(q,\dot{q},t)\, N_i(q,\dot{q},t) = 0 \;. \tag{5.7}$$

Ahora bien, si $B_\alpha(q,\dot{q},t) \equiv 0$ para todo α , entonces existen n-R identidades y se trata del caso i) descrito con anterioridad. Si ninguno de los $B_\alpha(q,\dot{q},t)$ es idénticamente cero, entonces existen n-R constricciones, ecuaciones que ligan las posiciones y velocidades iniciales, es decir, que no contienen las aceleraciones y esta situación corresponde al caso ii). Por último, si algunos, pero no todos, los B_α son idénticamente cero se tiene el caso iii) donde existen identidades y constricciones.

Los lagrangianos L que dan origen a sistemas singulares son degenerados en el sentido que

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} = 0 \quad . \tag{5.8}$$

A pesar de que existen excelentes estudios para la construcción de la teoría canónica de dichos lagrangianos, no existe todavía un estudio completo del problema inverso para sistemas singulares. Un enfoque posible, en el que se han hecho algunos avances, utiliza el formalismo de primer orden para los sistemas singulares.

Para finalizar, analicemos en algún detalle sistemas físicos simples que corresponden a los casos i), ii) y iii).

Caso i). La partícula libre relativista.

El lagrangiano de la partícula libre relativista es

$$L = m(g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)^{1/2} \quad , \tag{5,9}$$

con $g_{\mu\nu}$ = diag $(1,-1,-1,-1)$,

$$\dot{x}^\mu = \frac{dx}{d\tau} \qquad (\tau \text{ parámetro arbitrario}). \tag{5.10}$$

La acción $S = \int L d\tau$ es invariante ante la reparametrización

$$\tau \rightarrow \tau' = \tau'(\tau) \; . \tag{5.11}$$

Las ecuaciones de movimiento son

$$m \left(\frac{g_{\mu\nu}}{(\dot{x}^\alpha \dot{x}_\alpha)^{1/2}} - \frac{\dot{x}_\mu \dot{x}_\nu}{(\dot{x}^\alpha \dot{x}_\alpha)^{3/2}} \right) \ddot{x}^\nu = 0 \; . \tag{5.12}$$

La matriz

$$M_{\mu\nu} = m \left(\frac{g_{\mu\nu}}{(\dot{x}^\alpha \dot{x}_\alpha)^{1/2}} - \frac{\dot{x}_\mu \dot{x}_\nu}{(\dot{x}^\alpha \dot{x}_\alpha)^{3/2}} \right) \tag{5.13}$$

es singular y el único vector (5.13) propio con valor propio cero es $v^\mu = \dot{x}^\mu$. En efecto,

$$\dot{x}^\mu M_{\mu\nu} = m \left(\frac{\dot{x}_\nu}{(\dot{x}^\alpha \dot{x}_\alpha)^{1/2}} - \frac{(\dot{x}^\mu \dot{x}_\nu)\dot{x}_\nu}{(\dot{x}^\alpha \dot{x}_\alpha)^{3/2}} \right) \equiv 0 \tag{5.14}$$

Una combinación lineal de las ecuaciones

$$\dot{x}^\mu M_{\mu\nu} \ddot{x}^\nu \equiv 0 \quad , \tag{5.15}$$

es idénticamente cero. Esta identidad corresponde a la invariancia de norma (externa) (5.11).

Se llama norma externa a aquella en que la variable independien te (τ) es transformada y norma interna a aquella que deja invariable a la variable independiente

Caso ii). El campo de Proca

El lagrangiano del campo de Proca es

$$L = \frac{1}{4}(A^{\mu,\nu} - A^{\nu,\mu})(A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}) - \frac{1}{2} m^2 A^{\mu} A_{\mu}. \qquad (5.16)$$

Las ecuaciones de movimiento son

$$A^{\mu,\nu}{}_{,\nu} - A^{\nu}{}_{,\nu}{}^{,\mu} - m^2 A^{\mu} = 0 . \qquad (5.17)$$

Es fácil probar que

$$m^2 \partial_{\mu} A^{\mu} = 0 \qquad (5.18)$$

y, por lo tanto,

$$\partial_{\mu} A^{\mu} = 0 \qquad (5.19)$$

si $m^2 \neq 0$

La ecuación (5.19) que no contiene aceleraciones constituye una constricción que liga los valores iniciales de A^{μ} y sus primeras derivadas temporales.

Caso iii). El campo de Maxwell, los campos de Yang Mills, Relatividad General.

Estudiaremos en algún detalle el campo de Maxwell que constituye el ejemplo más simple de los mencionados.

El lagrangiano es

$$L = -\frac{1}{4} (A^{\mu,\nu} - A^{\mu,\nu}) (A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}) \qquad (5.20$$

y las ecuaciones de movimiento son

$$\partial^{\mu}\partial_{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} (\partial_{\mu} A^{\mu}) = 0 . \qquad (5.21)$$

Es fácil verificar que tanto (5.20) como (5.21) son invariantes ante la transformación de norma interna

$$A'_{\mu} = A_{\mu} + \frac{\partial \Lambda(x)}{\partial x^{\mu}} \quad (\Lambda\text{: función arbitraria}). \qquad (5.22)$$

La divergencia covariante ∂_{ν} de (5.21) es idénticamente cero, es decir,

$$\partial_{\nu}(\partial_{\mu}\partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu}(\partial_{\mu} A^{\mu})) \equiv 0 , \qquad (5.23)$$

independientemente de que (5.21) se cumpla o no y, por lo tanto, sólo tres de las cuatro ecuaciones (5.21) son independientes. Este hecho está en concordancia con la indeterminación expresada por (5.22).

Analicemos la ecuación para $\mu = 0$,

$$\partial_\mu \partial^\mu (A^0) - \partial^0 (\partial_\mu A^\mu) = 0 \; . \tag{5.24}$$

Se tiene entonces,

$$(\partial_0 \partial^0 + \partial_i \partial^i) A^0 - \partial^0 (\partial_0 A^0 + \partial_i A^i) = 0 \; , \tag{5.25}$$

o sea,

$$\partial_i \partial^i A^i - \partial^0 \partial_i A^i = 0 \; .$$

La ecuación $\mu = 0$ no contiene segundas derivadas con respecto al tiempo y constituye, entonces, una constricción. El campo de Maxwell es un ejemplo de un sistema singular con identidades (invariancia de norma) y constricciones.

El problema inverso del cálculo de variaciones para sistemas singulares no está resuelto, pero probablemente el mejor modo de considerarlo es utilizando sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden, con los que es más fácil aislar las variables físicas (independientes de norma) de las que no lo son.

VI. CONSTANTES DE MOVIMIENTO Y SIMETRIAS.

Una constante de movimiento es una función f que depende de $q^i, \dot{q}^i, t$ y que es constante cuando $q^i(t)$ es un miembro de la clase de soluciones S. La denotamos por $f = f(q^i, \dot{q}^i, t)$ y satisface

$$\frac{d}{dt} f = \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^i} \ddot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{6.1}$$

cuando q^i es una solución de las ecuaciones de movimiento. Si L es un lagrangiano (suponemos que L tiene la forma usual y no degenerada), las ecuaciones de movimiento resultan ser

$$\ddot{q}^i = - W^{-1}_{ij} V^j \quad , \tag{6.2}$$

donde W^{-1}_{ij} es el inverso de la matriz W_{ij}:

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \quad \text{y} \quad V^j = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^j} \; . \tag{6.3}$$

También decimos que una constante de movimiento f es una cantidad conservada. Es claro que el problema de establecer si una función dada es conservada depende de S y no de una selección particular de algún lagrangiano. Además, si las ecuaciones de movimiento se escriben

$$\ddot{q}^i = \phi^i(q,\dot{q},t) \ , \tag{6.4}$$

vemos que la clase S depende de las fuerzas específicas ϕ^i y no de la expresión de esas fuerzas por medio de un lagrangiano como en (6.2) y (6.3).

Para ilustrar el punto con un ejemplo especialmente sencillo, podemos mostrar que las conservaciones del momento lineal y del momento angular son consecuencias de la Tercera Ley de Newton y no de la existencia directa de un lagrangiano: primero, supongamos que tenemos n partículas sin constricciones, con masas $M_\alpha(\alpha=1,\ldots n)$ y posiciones tridimensionales x^i_α , $(i=1,2,3)$. La ecuación (6.3) se puede escribir

$$M_\alpha \ddot{x}^i{}_\alpha = F^i_\alpha \qquad (NS_\alpha) \ , \tag{6.5}$$

donde (NS_α) indica que no hay suma en el índice α . (Las cantidades $\phi^i_\alpha = (M_\alpha)^{-1}F^i_\alpha$ son las fuerzas específicas de (6.4)).

Entonces sea F^i_α la suma de las fuerzas debida a las otras partículas donde $F^i_{\alpha\beta}$ es la fuerza sobre α debido a β (notar que no se permite $\alpha=\beta$) más fuerzas externas $F^i_{\alpha E}$:

$$F^i_\alpha = \sum_\beta F^i_{\alpha\beta} + F^i_{\alpha E} \ . \tag{6.6}$$

La Tercera Ley de Newton (forma débil) dice

$$F^i_{\alpha\beta} = - F^i_{\beta\alpha} \ . \tag{6.7}$$

De (6.7) podemos ver inmediatamente que

$$\sum_\alpha M_\alpha \ddot{x}^i_\alpha = \sum_\alpha F^i_{\alpha E} \ . \tag{6.8}$$

El miembro izquierdo es la derivada con respecto a tiempo del momento total

$$P^i = \sum_\alpha M_\alpha \dot{x}^i_\alpha \ . \tag{6.9}$$

La ecuación (6.8) dice entonces que P^i es conservado si se cumple la Tercera Ley en forma débil y si la fuerza externa total es nula.

Similarmente definimos el momento angular total L_i como

$$L_i = \sum_\alpha \varepsilon_{ijk}\, x^j_\alpha p^k_\alpha \qquad (6.10)$$

(usando el origen $x^i = 0$ como referencia), donde la convención de suma se utiliza para j, k como de costumbre, y donde ε_{ijk} es el símbolo completamente antisimétrico de Levi-Civita. La derivada con respecto al tiempo de L es

$$\frac{d}{dt} L = \sum_{\alpha,\beta} \varepsilon_{ijk}\, x^j_\alpha\, F^k{}_{\alpha\beta} + \sum_\alpha \varepsilon_{ijk}\, x^j_\alpha\, F^k{}_{\alpha E} \quad . \qquad (6.11)$$

La Tercera Ley en forma fuerte dice que $F^i{}_{\alpha\beta}$ es paralela a la recta que une a las partículas α y β:

$$F^i{}_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta}(x^i_\alpha - x^i_\beta) \qquad (\mathrm{NS}\ \alpha\beta) \ , \qquad (6.12)$$

donde $K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha}$. Con esta forma fuerte vemos que $\frac{d}{dt} L_i$ en (6.11) depende solamente del último término, el torque externo total. Si este torque se anula también, L_i es conservado.

En los dos casos de arriba, la conservación del momento P^i y del momento angular L_i es una consecuencia de la forma de las fuerzas, no de la selección de lagrangiano. Otra manera para probar la conservación de momento usa el Teorema de Noether. Este teorema proporciona una relación entre simetrías del lagrangiano y leyes de conservación. Las limitaciones del teorema, especialmente si deseamos que las cantidades conservadas se identifiquen con el momento físico o la energía, fueron discutidas por Havas (1973). Aquí mostramos que las simetrías de un lagrangiano (al menos las más obvias) pueden cambiarse al usar un lagrangiano equivalente. Se puede usar una forma muy sofisticada del Teorema de Noether, pero su interpretación física no es directa.

La forma más sencilla del Teorema de Noether se tiene cuando un lagrangiano no depende de una coordenada particular. Una forma un poco menos trivial usa el operador diferencial $k^i \frac{\partial}{\partial q^i}$ donde k^i = constantes. Supongamos que L sea constante con respecto a este operador:

$$k^i \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \ . \qquad (6.13)$$

Se puede deducir que $k^i p_i$ (donde $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ son los momentos canónicos conjugados) es una constante de movimiento:

$$\frac{d}{dt}(k^i p_i) = k^i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = k^i \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad . \qquad (6.14)$$

Por ejemplo, si ocurre que el lagrangiano para un grupo de partículas es invariante cuando las partículas se trasladan todas simultáneamente en el espacio, entonces el momento lineal total de las partículas es conservado.

El operador de la ecuación (6.13) es un operador de traslación. También en ciertas circunstancias, es posible usar operadores de traslación que dependan de la posición y este proceso define una operación de derivación de Lie. Si L está compuesto de tensores invariantes con respecto a esta operación, es posible encontrar directamente un "momento" conservado. Esta es una manera para encontrar la conservación del momento angular.

Otra cantidad importante es la energía. Otra forma sencilla del Teorema de Noether parece relacionar la conservación de energía con invariancia en el tiempo. Supongamos que L no depende del tiempo,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \ , \tag{6.15}$$

por lo tanto el hamiltoniano es una constante de movimiento:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(p_i \dot{q}^i - L\right) \\ &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) \dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \ddot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \ddot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= - \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \ . \end{aligned} \tag{6.16}$$

Si L tiene la forma usual conservativa $L = T - V$, donde T es la energía cinética y V es la energía potencial, H se identifica con la energía total. Pero, puede ocurrir, con el uso de un lagrangiano general, que no exista una relación directa entre H y la energía, aun cuando H sea conservado.

La dificultad con las formas sencillas del Teorema de Noether, como describimos arriba, radica en que es posible que un lagrangiano no tenga una simetría correspondiente a una cantidad conservada particular. Por ejemplo, un lagrangiano para la partícula libre en una dimensión q es

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^2 \ . \tag{6.17}$$

Este L no depende ni de q ni de t y tanto $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ como $H = \frac{1}{2} \dot{q}^2$ son conservados. Un lagrangiano equivalente L' es

$$L' = \frac{1}{2} q\dot{q}^2 - \frac{1}{2} \dot{q}^3 t. \tag{6.18}$$

Este L' depende de q y de t. Por consiguiente

$$p' = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} = q\dot{q} - \frac{1}{2}\dot{q}^2 t$$

$$H' = \frac{1}{2} q\dot{q}^2 - \frac{1}{3}\dot{q}^3 t \qquad (6.19)$$

no son conservados. Naturalmente la conservación de $p = \dot{q}$ y $H = \frac{1}{2}\dot{q}^2$ depende de S solamente, y S es el mismo para L y L'.

Se necesita una forma del Teorema de Noether que sea válida para todas las circunstancias. Supongamos que k^i, k^0 y F sean funciones de q^i, $\dot{q}^i$, t tales que

$$k^i \frac{\partial L}{\partial q^i} + \dot{k}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + k^0 \frac{\partial L}{\partial t} + \dot{k}^0 (L - \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}) = -\dot{F} \ . \qquad (6.20)$$

Entonces, la función f dada por

$$f = k^i p_i - k^0 H + F \qquad (6.21)$$

es una constante de movimiento. La demostración es sencilla: se calcula $\dot{f}$ y se obtiene

$$\dot{f} = \dot{k}^i p_i + k^i \dot{p}_i - \dot{k}^0 H - k^0 \dot{H} + \dot{F} \quad , \qquad (6.22)$$

y usando (6.16) se puede mostrar que $\dot{f} = 0$.

Por ejemplo, usando (6.19) podemos escribir

$$\frac{1}{2}\dot{q}^2 = \text{const} = \frac{2\dot{q}}{q} p' - \frac{3}{q} H' \ . \qquad (6.23)$$

Entonces verificamos que $k^1 = \frac{2\dot{q}}{q}$, $k^0 = \frac{3}{q}$, F = 0 satisfacen la ecuación (6.20) si L' es el de la ecuación (6.18).

La forma de arriba del Teorema de Noether tiene un inverso, en el cual una constante de movimiento f está ligada a k^i, k^0 y F. En este sentido, ésta representa un método para tratar cualquier lagrangiano de un sistema S.

Sin embargo, dos aspectos físicos de la forma sencilla del Teorema de Noether se han perdido. Primero, la ecuación (6.20) muchas veces se escribe con la notación

$$k^i = \delta q^i \quad , \quad k^0 = \delta t \ . \qquad (6.24)$$

Si k^i y k^0 son constantes y F = 0, la ecuación (6.20) dice que L es invariante con respecto a un movimiento infinitesimal como en (6.13). Pero cuando k^i y k^0 no sean constantes la interpretación física de (6.20) no es clara. Segundo, cuando k^i y k^0 son constantes y $F = 0$, la constante de (6.21) es la suma de un momento más una energía. En general, la interpretación física de esa constante tampoco es clara.

Si una colección S de curvas satisfacen una colección de n ecuaciones de segundo orden, hay 2n constantes de movimiento independientes. Es posible interpretar estas constantes directamente como las posiciones y velocidades iniciales que determinan los miembros de S. Sin embargo, S se define típicamente solamente como soluciones de un lagrangiano L dado o de ecuaciones dadas. Si L tiene simetrías sencillas, la forma simple del Teorema de Noether es útil para encontrar constantes de movimiento. Es posible que la forma general del Teorema más la existencia de lagrangianos equivalentes, puedan ser útiles para encontrar más constantes, pero el proceso típico es usualmente el inverso. Es decir, como está indicado en las secciones anteriores, el proceso es usar constantes de movimiento para ir de un lagrangiano L a otro $\bar{L}$ equivalente a L. El método consiste en formar de algunas constantes la matriz Λ y de Λ generar $\bar{L}$ asociado a L. Desgraciadamente, no todas las constantes son útiles para engendrar lagrangianos equivalentes. Por ejemplo, hay lagrangianos que son esencialmente únicos, y el único Λ que es posible es una constante numérica multiplicando la matriz unidad.

Existen, entonces, dos problemas importantes: el primero, es determinar cuáles constantes de movimiento pueden ser útiles. El segundo, es encontrar como construir matrices Λ de esas constantes (y después cómo generar nuevos lagrangianos). La forma general del Teorema podría desempeñar un papel importante, pero cuál sería exactamente el papel, es un tema de investigación futura.

VII. ALGUNOS COMENTARIOS ACERCA DE LA TEORIA CUANTICA.

En este artículo hemos considerado la mecánica clásica. Por supuesto, la mecánica cuántica proporciona una mejor descripción de la naturaleza, y algunos sistemas con espín no tienen un límite clásico bien definido. Sin embargo, en muchos casos la descripción clásica está tan bien entendida o es tan importante, que es necesario adoptar un procedimiento para pasar de una descripción clásica a la cuántica correspondiente.

Un procedimiento frecuentemente empleado consiste en escribir la ecuación de Schrödinger reemplazando las coordenadas q^i y sus momentos conjugados p_i por operadores apropiados en el lugar donde aparecen en el hamiltoniano H, el cual se relaciona con la diferenciación con respecto a tiempo. Hemos visto, sin embargo, que el conocimiento de un sistema clásico, es decir el conocimiento del sistema S de movimientos permitidos por las fuerzas, quizás no determina únicamente un lagrangiano L y luego quizás tampoco determinen un hamiltoniano único. (Aquí suponemos que L y H se determinan únicamente por medio de una transformación de Legendre). Las teorías cuánticas que resultan de dos diferentes lagrangianos, como veremos, pueden ser enormemente diferentes. En esta sección, mostraremos algunos ejemplos de las dificultades que pueden aparecer. A continuación discutiremos brevemente algunos métodos posibles para resolver o evitar estas dificultades.

Consideramos primero la partícula libre en una dimensión, con coordenada q. Una clase de lagrangianos para este sistema se parametriza por la constante n:

$$L^{(n)} = \dot{q}^n , \tag{7.1}$$

donde $n \neq 0$ ó 1. Estos lagrangianos (uno para cada n) son equivalentes. Los momentos conjugados correspondientes $p^{(n)}$ se dan por

$$p^{(n)} = \frac{\partial L^{(n)}}{\partial \dot{q}} = n\dot{q}^{n-1} \quad . \tag{7.2}$$

Los hamiltonianos $H^{(n)}$ son

$$H^{(n)} = p^{(n)}\dot{q} - L^{(n)} = \frac{n-1}{n^\alpha}\, {p^{(n)}}^\alpha, \text{ donde } \alpha = \frac{n}{n-1} \quad . \tag{7.3}$$

Un método de cuantización ingenua es hacer la substitución canónica (empleando dimensiones tales que $\hbar = 1$):

$$p^{(n)} \rightarrow \frac{1}{i} \; \frac{\partial}{\partial q} \quad . \tag{7.4}$$

Debido a que $H^{(n)}$ es independiente del tiempo, podemos usar la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para la función de onda $\psi(q,t)$

$$H^{(n)} \, \psi = E \, \psi = \frac{n-1}{n^\alpha i^\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial q}\right)^\alpha \psi \text{ , con } E = \text{const.} \tag{7.5}$$

Esta ecuación se resuelve primero expresando ψ como una integral de Fourier:

$$\psi(q,t) = e^{iEt}\int \phi(\omega) e^{i\omega q} d\omega \; . \tag{7.6}$$

La ecuación (7.5) se convierte en una ecuación para ω :

$$E = \frac{n-1}{n^\alpha}\,\omega^\alpha \,. \tag{7.7}$$

Esta ecuación (7.7) siempre tiene al menos una solución para ω, si $n \neq 0,1$. Sin embargo, es necesario que ω sea real porque para cada parte imaginaria resulta que el modo correspondiente tiende a infinito en $x = +\infty$ ó en $x = -\infty$. La ecuación (7.7) para ω tiene en general solamente una solución real. El único valor entero de n que permite ω y $-\omega$ como solución para una E dada es $n = 2$, el valor acostumbrado. Por lo tanto la teoría cuántica para $n \neq 2$ es diferente de la de una partícula libre a pesar de que $L^{(n)}$ es equivalente clásicamente al lagrangiano $L^{(2)}$ de la partícula libre.

Nuestro segundo ejemplo es el oscilador armónico isotrópico en dos dimensiones. Si escogemos la constante de restitución y la masa ambos iguales a 1, el lagrangiano usual es

$$L = L_{(1)} + L_{(2)} \,, \tag{7.8}$$

donde q_1, q_2 son las coordenadas y

$$L_{(1)} = \frac{1}{2}\,(\dot{q}_1^2, - q_1^2) \,, \qquad L_{(2)} = \frac{1}{2}\,(\dot{q}_2^2 - q_2^2) \,. \tag{7.9}$$

Un lagrangiano equivalente $\bar{L}$ es

$$L_1 = L_{(1)} - L_{(2)} \quad . \tag{7.10}$$

Sin embargo, las teorías cuánticas de estos lagrangianos son completamente diferentes.

El método para cuantizar los hamiltonianos H y H' que corresponden a L y L' es reemplazar las coordenadas q_i y sus momentos p_i, por operadores $\hat{q}_i$, $\hat{p}_i$. Estos operadores satisfacen las relaciones de conmutación (tenemos $\hbar = 1$):

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij} \quad . \tag{7.11}$$

Con las relaciones de (7.11), el grupo dinámico de L es SU(2), un grupo compacto, y el de $\bar{L}$ es SU (1,1) que no es compacto. Por consiguiente todos los observables asociados con $\bar{L}$ no pueden tener espectros discretos.

Es posible tener la teoría cuántica usual con el lagrangiano $\bar{L}$ si no aceptamos (7.11). Por ejemplo, las relaciones

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 = [\hat{q}_1, \hat{p}_2] = [\hat{q}_2, \hat{p}_1] ,$$

$$[\hat{q}_1, \hat{p}_1] = i = -[\hat{q}_2, \hat{p}_2] \tag{7.12}$$

conducen a la teoría cuántica usual, si tenemos $\bar{L}$ de la ecuación (7.10). Las relaciones de (7.12) representan un método de cuantización rara, y ellas serían posible solamente si sabemos el resultado correcto antes de cuantizar el sistema.

El último ejemplo que presentamos es el oscilador armónico amortiguado (con fricción) en una dimensión, con coordenada q. Este oscilador obedece la ecuación

$$\ddot{q} + \lambda\dot{q} + k^2 q = 0 , \quad \text{con } \lambda = \text{const.}, \; k^2 = \text{const.} \tag{7.13}$$

Dos lagrangianos equivalentes para este sistema son

$$L = \frac{1}{2} e^{\lambda t} (\dot{q}^2 - k^2 q^2) , \tag{7.14}$$

$$\bar{L} = \left(\frac{2\dot{q}}{q} + \lambda\right)(4k^2 - \lambda^2)^{-1/2}\tan^{-1}\left\{\left(\frac{2\dot{q}}{q} + \lambda\right) (4k^2 - \lambda)^{-1/2}\right\}$$

$$- \frac{1}{2} \ln(\dot{q}^2 + \lambda q\dot{q} + k^2 q^2). \tag{7.15}$$

Los momentos conjugados son

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = e^{\lambda t} \; \dot{q} , \tag{7.16}$$

$$\bar{p} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{2}{q} (4k^2 - \lambda^2)^{-1/2}\tan^{-1}\left\{\left(\frac{2\dot{q}}{q} + \lambda\right)(4k^2 - \lambda^2)^{-1/2}\right\}. \tag{7.17}$$

Los hamiltonianos son

$$H = p\dot{q} - L = \frac{1}{2} e^{-\lambda t} p^2 + \frac{1}{2} k^2 e^{\lambda t} q^2 , \tag{7.18}$$

$$\bar{H} = \bar{p}\,\dot{q} - \bar{L} = -\frac{1}{2} \lambda q\bar{p} + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{q^2}{4} (4k^2 - \lambda^2)\right]$$

$$- \ln \cos \left[\frac{q\bar{p}}{2} (4k^2 - \lambda^2)^{1/2}\right] . \tag{7.19}$$

Los dos hamiltonianos (7.18) y (7.19) son enteramente diferentes. H depende del tiempo pero tiene una teoría cuántica sencilla (ver Edwards, 1979). Pero de la cuantización de H resulta de que la energía disminuye exponencialmente con el tiempo hasta anularse. El segundo hamiltoniano $\bar{H}$ no depende del tiempo y por lo tanto es una constante de movimiento que no tiene una relación obvia a la energía. En el primer caso, que la energía disminuya a cero presenta una contradicción con el hecho de que la energía de las fluctuaciones del vacío no es cero. Pero, aparte de este hecho, el primer caso tiene propiedades que parecen físicamente razonables (tal como la propiedad que $\lambda = 0$ corresponde al oscilador sin fricción).

Nuestros comentarios acerca de la mecánica cuántica están basados en los ejemplos antedichos. Primero, está el problema del espectro físico de observables. Además de la cuestión del orden de factores o de otras cuestiones que ocurren cuando el hamiltoniano es complicado, vemos que la selección de lagrangiano afecta cuáles cantidades son constantes, cuáles tienen espectros discretos, y aun el grupo dinámico del sistema cuantizado. Un observable está determinada por las configuraciones permitidas del sistema. Es claro que la función onda cuántica determina estas configuraciones, pero parece razonable que las soluciones clásicas S del sistema determinen la mayor parte de las propiedades de los observables. Segundo, vemos que H, en general, no tendría las dimensiones de energía. Un principio de adición afirma que todos los hamiltonianos tienen las mismas dimensiones. Este principio es que las propiedades de dos sistemas resultan de la suma de sus hamiltonianos más un término de interacción. Además, el principio de que H sea conjugado (en algún sentido) al tiempo, implica que estas dimensiones serían las de energía. Parece que estos principios pueden eliminar algunos hamiltonianos equivalentes, pero el uso de una constante de interacción con dimensiones puede impedir esta eliminación. Tercero, aun cuando H tenga los grupos correctos, podría ser físicamente difícil de interpretar porque fuese dependiente del tiempo o no fuera positivo. El oscilador con fricción tiene un hamiltoniano positivo y uno que no depende del tiempo, pero este ejemplo implica que un principio básico de ambas propiedades no es posible en general. Dicho de otra manera, un principio de positividad y de no dependencia del tiempo probablemente eliminaría muchos sistemas interesantes y no solamente algunos hamiltonianos. Cuarto, muchos problemas de cuantización desaparecen si aceptamos que el hamiltoniano H es una cantidad física básica. Bajo este punto de vista, H y $\overline{H}$ dados por las Ecs.(7.18) y (7.19) constituyen dos sistemas diferentes. Las dificultades de este punto de vista es que algunos sistemas verdaderamente son conocidos por su conducta clásica; el oscilador con fricción (para el que podemos usar H o $\overline{H}$ de (7.18) ó (7.19) es un buen ejemplo. Es decir, que hay ejemplos donde la conducta física es más básica que la elección de un hamiltoniano.

Respecto a este caso, notamos el tema de la cuantización geométrica. En este tema, la cuantización se describe por medio de cantidades geométricas definidas en el espacio de fase, evitando en lo posible el uso de coordenadas específicas. Un paso para comprender el proceso de cuantización sería comprender la equivalencia entre lagrangianos por la existencia de una estructura geométrica. Por ejemplo, Macartney-Filgate (1980) presenta una breve discusión de espacios que admiten geodésicas correspondientes, y sería interesante realizar estudios similares en un lenguaje apropiado para la cuantización. Quinto, es la cuestión de cuál sistema clásico debería ser cuantizado. El oscilador amortiguado es un buen ejemplo de un sistema que no es aislado, porque él pierde energía en el proceso de fricción. Como dijimos, hay dificultades en la cuantización de este sistema, pero es un sistema muy importante para entender los aparatos de detección, especialmente cuando se están detectando pocos cuantos. Y, como dijimos arriba, este es un sistema cuya conducta es tan bien conocida clásicamente y es muy deseable buscar un método para comprender la cuantización del sistema.

Hemos visto que la existencia de lagrangianos equivalentes presenta dificultades para la mecánica cuántica. La obra del futuro debería concentrarse, en nuestra opinión, en cuatro áreas: La primera es investigar criterios físicos para preferir un lagrangiano sobre otro. Como indicamos arriba, los criterios más sencillos no son posibles. La segunda es investigar si es posible especificar un sistema clásico más precisamente, por ejemplo, usando información de una aproximación cuántica. Esta especificación debería resultar en una teoría cuántica basada en las soluciones clásicas S. Es probable, que el estudio de la teoría de Hamilton-Jacobi fuera importante aquí. La tercera,como está mencionado arriba, es estudiar la teoría de lagrangianos equivalentes en el lenguaje de la cuantización geométrica. Y la cuarta, es buscar un método de cuantización basado en las soluciones S y no en una selección de lagrangianos o hamiltonianos. Esta última área de investigación es muy promisoria. Sin embargo, cualquier método debe concordar con el método canónico si el sistema es conservativo y debe ser con vincente cuando sea aplicado a sistemas no conservativos como aquellos con fricción o amortiguación.

VIII. TEORIA DE CAMPOS.

La mecánica clásica de Newton se aplica a la teoría de campos usando métodos similares a los usados para la teoría de partículas. Sin embargo, pocos autores han discutido el problema inverso a la cuestión de lagrangianos equivalentes para campos. Una excepción ha sido Edelen, quien derivó un lagrangiano para una ecuación integro-diferencial lineal. El notó que este lagrangiano es la integral de una densidad, la que a su vez es integral de una densidad de segundo orden.

Aquí presentamos una discusión breve de la teoría de un campo. Nos limitamos a un campo escalar, aunque Edelen y Santilli han descrito aspectos de la teoría de campos más generales. Nuestro trabajo (que se publicará pronto) muestra que es necesario considerar densidades de todo orden.

Un campo escalar $\phi(x,t)$ es una función de una coordenada espacial x y del tiempo t. Por simplicidad, en lo que sigue hemos considerado que x es periódica ($x=0$ es identificado con $x=2\pi$). La ecuación de movimiento para ϕ es su ecuación de campo, una ecuación

$$F\,(\phi;\ \phi_{,\mu};\phi_{,\mu\nu};\ldots;t) = 0 \tag{8.1}$$

en sus derivadas parciales

$$\phi_{,\mu} = \frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu}}\ ,\ \phi_{,\mu\nu} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}},\ \ldots\ x^0=t, x^1= x. \tag{8.2}$$

Típicamente esta ecuación es de segundo orden en la derivada temporal. También, si la ecuación es invariante bajo transformaciones de Lorentz, es de segundo orden en las derivadas espaciales y es local. Suponemos aquí que el campo satisface una ecuación de segundo orden en el tiempo pero con la posibilidad de ser ni local ni de un orden particular en el espacio. El grupo de soluciones de esta ecuación la llamamos S, como el conjunto de soluciones para un sistema de partículas.

Un método para tratar el campo ϕ consiste en descomponerlo en una serie de Fourier:

$$\phi(x,t) = \Sigma A_n(t)e^{inx} \quad . \tag{8.3}$$

La ecuación de campo, entonces, consiste en una infinitud de ecuaciones para las funciones $A_n(t)$:

$$F_n(A, \dot{A}, \ddot{A}, t) = 0 \quad . \tag{8.4}$$

Las funciones F_n dependen de todos los A_n en general, pero solamente de las primeras dos derivadas con respecto al tiempo $\mathring{A}_n$, $\ddot{A}_n$. Podemos tratar las Ecs (8.4) como las de un sistema de partículas, pero es más interesante discutir la teoría directamente usando el campo.

Consideremos el campo $\phi(x,t)$ como una colección de coordenadas $q^i(t)$ con la x correspondiendo al índice i. Para dar énfasis a esta correspondencia, escribimos

$$\phi_x \equiv \phi(x,t) \ , \ \mathring{\phi}_x \equiv \frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t} \ , \text{ etc.} \tag{8.5a}$$

Por ejemplo, $\mathring{\phi}_{x+t}$ es realmente

$$\dot{\phi}_{x+t} = \left.\frac{\partial\phi(y,t)}{\partial t}\right|_{y=x+t} \quad . \tag{8.5b}$$

La convención de suma aquí es una convención de integración:

$$A_x B_x \equiv \int A(x,t)\ B(x,t)dx.$$

Por lo tanto la ecuación de campo se considera como un conjunto de ecuaciones

$$F_x(\phi,\mathring{\phi},\ddot{\phi},\ t) = 0 \ . \tag{8.6}$$

Supongamos que es posible resolverla para las $\ddot{\phi}_x$:

$$\ddot{\phi}_x + G_x(\phi,\mathring{\phi},\ t) = 0. \tag{8.7}$$

Las funciones G_x dependen de ϕ_x ,$\mathring{\phi}_x$ no localmente. Los términos son multilineales; por ejemplo una que depende linealmente de $\mathring{\phi}_x$ y cuadráticamente de ϕ_x pueden ser

$$A_{xyzw}\mathring{\phi}_y\phi_z\phi_w = \iiint A(x,y,z,w,t)\mathring{\phi}(y,t)\phi(z,t)\phi(w,t)dydzdw. \tag{8.8}$$

El problema inverso restringido estudia la existencia de un lagrangiano para una ecuación particular como (8.6) u (8.7). El problema inverso no restringido consiste en buscar un lagrangiano para cualquier ecuación que tiene las mismas soluciones S que son soluciones de (8.6) u (8.7). El problema de equivalencia intenta encontrar todos los lagrangianos equivalentes a uno dado.

Un lagrangiano para un campo es similar a uno para un sistema de partículas. Este es una función (o funcional) de $\phi_x, \dot{\phi}_x$, t si deseamos reproducir una ecuación equivalente a (8.7). Lo escribimos como una serie de términos

$$L = A + B_x \phi_x + B_{xy}\phi_{xy} + \cdots$$
$$+ C_x\dot{\phi}_x + C_{xy}\dot{\phi}_x\phi_y + \cdots \qquad (8.9)$$
$$+ D_{xy}\dot{\phi}_x\dot{\phi}_y + D_{xyz}\dot{\phi}_x\dot{\phi}_y\phi_z + \cdots$$

Es la costumbre considerar L como la integral de una densidad lagrangiana L:

$$L = \int L dx \ , \qquad (8.10)$$

donde L depende de ϕ y sus derivadas $\partial\phi/\partial x$, $\partial^2\phi/\partial x^2$,etc. En (8.9) los términos son integrales de orden cero (A=A(t)), uno ($B_x\phi_x$), dos ($B_{xy}\phi_{xy}$), etc. Llamamos a las funciones en estas integrales, densidades de orden n; por ejemplo

$$D_{xyz}\dot{\phi}_x\dot{\phi}_y\phi_z = \iiint D(x,y,z,t)\dot{\phi}(x,t)\dot{\phi}(y,t)\phi(z,t)\ dxdydz \qquad (8.11)$$

depende de una densidad de orden tres.

Algunas derivadas particulares usan funciones especiales. Por ejemplo la función δ de Dirac es

$$\delta(x-y) = \delta_{x-y} . \qquad (8.12)$$

Sus derivadas son

$$\delta'_{x-y},\ \delta''_{x-y},\ \text{etc.} \qquad (8.13)$$

La función δ_{x-y} es una matriz unidad

$$\delta_{x-y}\phi_y = \phi_x \ . \qquad (8.14)$$

Un término que depende de $(\partial\phi/\partial x)^2$, por ejemplo, puede ser escrito

$$-\delta''_{x-y}\phi_x\phi_y = -\iint \delta''(x-y)\phi(x,t)\phi(y,t)dxdy$$
$$= +\iint \delta(x-y)\ \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}\ dxdy \qquad (8.15)$$
$$= +\int \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 dx \ .$$

La integral de acción es

$$I = \int Ldt \ . \qquad (8.16)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange pueden ser escritas

$$L_x \equiv \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_x} - \frac{\partial L}{\partial \phi_x} = 0 \,, \tag{8.17}$$

donde $\partial L/\partial\phi_x$ y $\partial L/\partial\dot{\phi}_x$ indican el proceso de variación.
Por ejemplo (suponiendo $D_{xy} = D_{yx}$)

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}_x}[D_{yz}\dot{\phi}_y\dot{\phi}_z] = 2\dot{D}_{xz}\dot{\phi}_z + 2D_{xz}\ddot{\phi}_z \,. \tag{8.18}$$

Por lo tanto

$$L_x = W_{xy}\ddot{\phi}_y + V_x \quad , \tag{8.19}$$

donde

$$W_{xy} = \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{\phi}_x\partial\dot{\phi}_y} \quad ,$$

$$V_x = \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{\phi}_x\partial\phi_y}\dot{\phi}_y + \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{\phi}_x\partial t} - \frac{\partial L}{\partial\phi_x} \quad . \tag{8.20}$$

Un ejemplo es una ecuación de campo lineal en ϕ_x y $\dot{\phi}_y$ (ver Edelen (1962)).

$$\ddot{\phi}_x + L_{xy}\dot{\phi}_y + K_{xy}\phi_y = 0 \,, \tag{8.21}$$

donde L_{xy} y K_{xy} son constantes en el tiempo. Podemos preguntar ¿Cuándo existe un lagrangiano para (8.21)?. Las condiciones de Helmholtz (3.2, 3.3, 3.4) son válidas para el caso de dimensión finita, pero si e-las se aplican aquí dicen (ver 3.57)

$$L_{xy} = -L_{yx} \quad , \qquad K_{xy} = K_{yx} \quad . \tag{8.22}$$

Si (8.22) es satisfecha, un lagrangiano posible es

$$L = \frac{1}{2}\delta_{x-y}\dot{\phi}_x\dot{\phi}_y + \frac{1}{2}L_{xy}\dot{\phi}_x\phi_y - \frac{1}{2}K_{xy}\phi_x\phi_y \quad . \tag{8.23}$$

El primer término es realmente la integral de una densidad:

$$\frac{1}{2}\delta_{x-y}\dot{\phi}_x\dot{\phi}_y = \frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 dx \,. \tag{8.24}$$

Las otras, en general, son integrales de densidades de segundo orden.

Un caso especial es el de la ecuación de Klein-Gordon:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + m^2\phi = 0 \,, \tag{8.25}$$

en donde vemos que

$$L_{xy} = 0, \qquad K_{xy} = -\delta''_{x-y} + m^2\delta_{x-y} \quad . \tag{8.26}$$

Entonces el lagrangiano L es

$$L = \frac{1}{2}\dot{\phi}_x\dot{\phi}_x + \frac{1}{2}\delta''_{x-y}\phi_x\phi_y - \frac{1}{2}m^2\phi_x\phi_x$$

$$= \frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 - m^2\phi^2\right]dx \quad . \tag{8.27}$$

No hay una teoría completa para la existencia de un lagrangiano para una ecuación equivalente a (8.4) si no existe siquiera la teoría para la Ec. (8.4) misma. Aun si existe un L dado no hay una teoría para cuando existen otros $\bar{L}$ equivalentes. Podemos decir, sin embargo, que las condiciones necesarias que describimos arriba son necesarias aquí.

Sea $\bar{L}$ equivalente a L. Supongamos que las matrices

$$W_{xy} = \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{\phi}_x\partial\dot{\phi}_y} \quad , \quad \bar{W}_{xy} = \frac{\partial^2\bar{L}}{\partial\dot{\phi}_x\partial\dot{\phi}_y} \tag{8.28}$$

son invertibles: es decir, que existen W^{-1}_{xy}, $\bar{W}^{-1}_{xy}$ tales que

$$W^{-1}_{xy}W_{yz} = \delta_{x-z} \quad , \quad \bar{W}^{-1}_{xy}\bar{W}_{yz} = \delta_{x-z}. \tag{8.29}$$

Definimos Λ_{xy} por

$$\Lambda_{xy} = \bar{W}_{xz}\bar{W}^{1}_{zy} \quad . \tag{8.30}$$

Entonces la condición de equivalencia entre L y $\bar{L}$ es

$$\bar{L}_x = \Lambda_{xy}L_y \quad , \tag{8.31}$$

que con (8.30) da la ecuación básica (ver 8.19):

$$\bar{V}_x = \Lambda_{xy}\bar{V}_y. \tag{8.32}$$

Entonces podemos verificar que la traza de la matriz Λ_{xy} o Λ_{yx} elevada a cualquier potencia es una constante del movimiento:

$$\frac{d}{dt}(\Lambda_{xy}) = 0 \quad , \quad \frac{d}{dt}(\Lambda_{xy}\Lambda_{yx}) = 0 \text{ , etc.} \tag{8.33}$$

Aquí, el operador $\frac{d}{dt}$ es

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{\phi}_x\frac{\partial}{\partial\phi_x} + \ddot{\phi}_x\frac{\partial}{\partial\dot{\phi}_x} \quad , \qquad 8.34)$$

donde $\ddot{\phi}_x$ está dado por la ecuación de campo. Sin embargo, hay una dificultad: es posible que Λ_{xx} o Λ_{xy}, Λ_{yx} etc., no pueda definirse. Por ejemplo, si $\Lambda_{xy} = \delta_{x-y}$, $\Lambda_{xx} = \delta_0$ es infinito (aunque constante).

Por consiguiente, hay algunos problemas con la teoría de campos que no existen en la teoría de partículas. Uno se presenta cuando las integrales de densidades de orden general y la suma (8.9) converjan. Otro es la existencia de matrices que satisfagan (8.33) aunque las trazas de sus potencias no existan. Finalmente, están los problemas de la existencia de un lagrangiano, cómo poder encontrarlo, y cuándo hay otros equivalentes.

También mencionamos que el concepto de una constante del movimiento en esta teoría tiene ideas sutiles. Mostramos estas sutilezas con el ejemplo de la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0 \; . \tag{8.35}$$

La solución general de (8.35) es

$$\phi(x,t) = \phi_+(x+t) + \phi_-(x-t) \; , \tag{8.36}$$

donde ϕ_+, ϕ_- son funciones de una variable. Los valores de ϕ_+ y ϕ_- a $t=0$ o de ϕ'_+ , ϕ'_- a $t=0$ son constantes del movimiento, funciones solamente de x.

Escribamos ahora las derivadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial t} &= \phi'_+ - \phi'_- \; , \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} &= \phi'_+ + \phi'_- \; . \end{aligned} \tag{8.37}$$

Por lo tanto podemos expresarlas como

$$\begin{aligned} \phi'_+(x+t) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_x \; , \\ \phi'_-(x-t) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_x \; . \end{aligned} \tag{8.38}$$

A continuación sumaremos las series de Taylor

$$\begin{aligned} \exp\left(-t\frac{\partial}{\partial x}\right) \phi'_+(x+t) &= \phi'_+(x) \; , \\ \exp\left(t\frac{\partial}{\partial x}\right) \phi'_-(x-t) &= \phi'_-(x). \end{aligned} \tag{8.39}$$

Por consiguiente vemos que

$$\begin{aligned} \phi'_+(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{x-t} \; , \\ \phi'_-(x) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{x+t} \; , \end{aligned} \tag{8.40}$$

son constantes del movimiento. Estas constantes son vectores: existe una constante por cada valor de x. Una constante escalar, por ejemplo, resulta cuando usamos funciones f_x, g_x de x solamente:

$$F = f_x\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{x-t} = f_x\delta_{x-t-y}(\dot{\phi}_y + \delta'_{y-z}\phi_z) ,$$

$$G = g_x\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{x+t} = g_x\delta_{x+t-y}(\dot{\phi}_y - \delta'_{y-z}\phi_z) . \tag{8.41}$$

El lagrangiano que proviene de (8.27) para la ecuación de ondas es

$$L = \frac{1}{2}\dot{\phi}_x\dot{\phi}_x + \frac{1}{2}\delta''_{x-y}\phi_x\phi_y \quad . \tag{8.42}$$

Para construir un lagrangiano $\overline{L}$ equivalente a L, es necesario al principio escoger una matriz Λ_{xy} que satisfaga (8.33). Una matriz que satisface los requerimientos con el uso de F de la Ec. (9.41) es

$$\Lambda_{xy} = \delta_{x+y+t+z}\ (\dot{\phi}_z + \delta'_{z-w}\phi_w). \tag{8.43}$$

En la teoría actual, no es posible garantizar que haya un $\overline{L}$ obtenido con el uso de Λ_{xy}, pero en este caso hay uno:

$$\overline{L} = \frac{1}{3}\ \delta_{u+v+t+z}\delta'_{z-w}\dot{\phi}_u\dot{\phi}_v\phi_w + \frac{1}{6}\ \delta_{u+v+z+t}\phi_u\phi_v\phi_z - \frac{1}{3}\delta''_{u+v+z+t}\phi_u\phi_v\phi_z \quad . \tag{8.44}$$

La ecuación de Euler-Lagrange de $\overline{L}$ es

$$\overline{L}_x = \Lambda_{xy}(\ddot{\phi}_y - \delta''_{x-z}\phi_z) = 0 \ . \tag{8.45}$$

En general Λ_{xy} tiene un inverso y $\overline{L}_x = 0$ es equivalente a $L_x=0$. Cuando $\Lambda_{xy} = 0$ tenemos que

$$\dot{\phi}_{x-t} + \delta'_{x-t-y}\ \phi_y = 0 \tag{8.46}$$

y es fácil ver que una solución de (8.46) es una solución de (8.35):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_{x-t} + \delta'_{x-t-y}\phi_y) = 0 = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_{x-t} \quad . \tag{8.47}$$

Pero el problema de la existencia de lagrangianos $\overline{L}$ más generales que (8.44) para la ecuación de ondas o para otras ecuaciones de campos es un problema abierto para el futuro.

XIX. CONCLUSIONES Y PROBLEMAS.

Como hemos visto en las secciones anteriores el problema inverso del cálculo de variaciones tiene muchas facetas y algunas de ellas no han sido exploradas totalmente, a pesar de que los primeros trabajos en el área datan de fines del siglo pasado.

Algunos de los problemas abiertos más interesantes son:

a) La extensión del problema inverso en su formulación usual (segundo orden) a dimensiones mayores que dos.

b) Otro aspecto interesante es averiguar la relación entre los infinitos lagrangianos de primer orden y la indeterminación en la elección del conjunto de constantes en un sistema físico.

c) Intentar simplificar la construcción de lagrangianos de primer orden evitando en lo posible la necesidad del conocimiento de todas las constantes de movimiento. (En el caso de conocer el hamiltoniano conservado, se puede construir el lagrangiano de primer orden

$$L = p_i \dot{q}^i - H(q^i, p_i).$$

d) Construcción de lagrangianos para sistemas singulares en general y mejor caracterización de las variables de norma e independientes de norma.

e) Intentar aclarar hasta dónde es posible establecer una relación intrínseca entre transformaciones de simetría y cantidades conservadas (en lo posible evitando el uso de lagrangianos que resulta normalmente ambiguo).

f) La construcción de una teoría cuántica, lo más general posible, que evite las ambigüedades resultantes de la existencia de lagrangianos equivalentes, es también un desafío interesante.

g) La teoría general de lagrangianos equivalentes para el caso de teoría de campos es otro problema abierto.

h) La generalización de transformaciones canónicas para incluir aquellas que consideran el paso de un lagrangiano equivalente a otro, podría ser también considerado.

i) La generalización del teorema de Noether para considerar transformaciones que cambien la acción de modo que las nuevas ecuaciones sean combinaciones lineales de las originales es otro tema abierto de investigación

j) La teoría de Hamilton-Jacobi para lagrangianos equivalentes así como para lagrangianos de primer orden ha sido poco estudiada y sería interesante explorar este campo.

A pesar de los avances logrados, como se puede apreciar, existe aún un gran número de problemas que se pueden atacar.

El estudio de lagrangianos equivalentes multidimensionales no ha alcanzado aún los niveles logrados para el caso unidimensional. Los lagrangianos de primer orden, a pesar de constituir una respuesta (poco ortodoxa) al problema inverso, no han sido aún explorados completamente y lo mismo puede decirse de los otros temas tratados en el artículo como ya se ha señalado. A pesar de que el tema puede parecer más matemático que físico, podría adquirir gran relevancia debido a que los métodos variacionales son ampliamente utilizados en física. Además, debido a la ambigüedad surgida por la existencia de lagrangianos equivalentes, estos estudios nos conducen a utilizar en nuestras consideraciones conceptos más básicos y de mayor relevancia experimental como es el conjunto completo de soluciones (órbitas) de un problema en lugar de usar lagrangianos. Debido a todo lo que hemos expresado anteriormente es muy posible que este fascinante tema sea el objeto de numerosos trabajos en el futuro próximo.

BIBLIOGRAFIA

Las obras que se listan a continuación constituyen una selección, que no pretende ser exhaustiva, de trabajos relacionados con el tema de este artículo. Algunos de estos trabajos, no aparecen citados en el texto y, han sido incluidos porque se ha juzgado que su contenido podría interesar a algunos lectores.

1. R. Abraham y J.E. Marsden (1978) Foundation of Mechanics, 2nd Ed. (Benjamin/Cummings, Reading, Massachusetts).
2. K. Akama (1979) "Quantum Mechanical Equivalence of Two Lagrangian Formalisms in'Scalar Pregeometry'". Prog. Theor. Phys. 61 687-689.
3. D. Anderson (1973) "Equivalent Lagrangians in Generalized Mechanics" J. Math. Phys. 14, 934-936.
4. V.I. Arnold (1978) Mathematical Methods of Classical Mechanics (Springer-Verlag. New York).

5. J. Bertrand y M. Irac (1979) "Non-uniqueness in Writing Schrödinger Kernel as a Functional Integral" Lett. Math. Phys. 3, 97-107.
6. G.D. Birkhoff (1927) Dynamical Systems (Am. Math. Soc., New York).
7. G. Birkhoff, S. MacLane A Survey of Modern Algebra Macmillan 4 Ed. (New York) (1977).
8. G.A. Bliss (1925) Calculus of Variations (Open Court, La Salle, Illinois).
9. O. Bolza (1961) Lectures on the Calculus of Variations (Dover, New York).
10. K.S. Cheng (1974) "Equivalent Lagrangians and Path Integration for Generalized Mechanics" J. Math. Phys. 15, 808-811.
11. Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, y M. Dillard-Bleick (1977) Analysis, Manifolds and Physics (North-Holland, Amsterdam).
12. J. Cohn (1980) "Operator Formulation of Classical Mechanics" Am. J. Phys. 7, 379-386.
13. D. Currie and E. Saletan (1966) "q-Equivalent Particle Hamiltonians. I. The Classical One-Dimensional Case" J. Math. Phys. 7, 967-974.
14. D. Currie y E. Saletan (1972) "Canonical Transformations and Quadratic Hamiltonians" Nuovo Cimento B 9B Ser. 11, 143-153.
15. G. Darboux (1891) Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces. III^{e} partie (Gautier-Villars, Paris) p. 53.
16. P.A.M. Dirac (1964) Lectures on Quantum Mechanics (Yeshiva Univ., New York).
17. V.V. Dodonov, V.I. Manko, V.D. Skarzhinsky (1981) "The Inverse Problem of the Variational Calculus and the Nonuniqueness of the Quantization of Classical Systems" Hadronic J. 4, 1734-1804.
18. J. Douglas (1941) "Solution of the Inverse Problem of the Calculus of Variations" Trans. Am. Math. Soc. 50, 71-128.
19. D.G.B. Edelen (1969) Nonlocal variations and local invariance of Fields (American Elsevier, New York).
20. I.K. Edwards (1979) "Quantization of Inequivalent Classical Hamiltonians" Am. J. Phys. 47, 153-155.
21. L. Eisenbud (1958) "On the Classical Laws of Motion" Am. J. Phys. 26, 144-159.
22. L.E. Elscolg (1962) Calculus of Variations (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts).
23. I.M. Gelfand y S.V. Fomin (1963) Calculus of Variations (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey).
24. Y. Gelman y E. J. Saletan (1973) "q-Equivalent Particle Hamiltonians II; The Two-Dimensional Classical Oscillator Nuovo Cimento B 18B, 53-71.
25. H. Goldstein (1980) Classical Mechanics, 2nd Ed. (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts).
26. G. Gruber (1972) "On Quantum Mechanical Operators in Generalized Coordinates" Am. J. Phys. 40, 1537-1538.
27. M. Hamermesh (1964) Group Theory and its Applications to Physical Problems, (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts).
28. P. Havas (1956) "Generalized Lagrange Formalism and Quantization Rules" Bull. Am. Phys. Soc. 1, 337-338.
29. P. Havas (1957) "The Range of Application of the Lagrange Formalism-I" Supp. Nuovo Cimento 5 Ser. X, 363-388.

30. P. Havas (1964) "Four Dimensional Formulations of Newtonian Mechanics and Their Relation to the Special and the General Theory of Relativity" Rev. Mod. Phys. 36, 938-965.
31. P. Havas (1973) "The Connection between Conservation Laws and Invariance Groups: Folklore, Fiction, and Fact" Acta Phys. Austriaca 38, 145-167.
32. H. Helmholtz (1887) "Ueber die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung" Journal für die reine und angewandte Mathematik. Berlin. 100, 137-186.
33. M. Henneaux (1981) "Equations of Motion, Commutation Relations and Ambiguities in the Lagrangian Formalism" preimpreso Université Libre de Bruxelles.
34. E.L. Hill (1951) "Hamilton's Principle and the Conservation Theorems of Mathematical Physics" Rev. Mod. Phys. 23, 253-260.
35. S. Hojman (1981) "Construction of Genotopic Transformations for First Order Systems of Differential Equations" Hadronic J. (por aparecer).
36. S. Hojman y H. Harleston (1981) "Equivalents Lagrangians: Multidimensional Case" J. Math. Phys. 22, 1414-1419.
37. S. Hojman y R. Montemayor (1980) "s-Equivalent Lagrangians for Free Particles and Canonical Quantization" Hadronic J. 3, 1644-1657.
38. S. Hojman, S. Ramos (1980) "Lagrangianos Equivalentes y Separabilidad" Bol. Soc. Mex. Fís. 6, 198.
39. S. Hojman y L.F. Urrutia (1981) "On the Inverse Problem of the Calculus of Variations" J. Math. Phys. 22, 1896-1903.
40. C.W. Kilmister y F.A.E. Pirani (1965) "Ignorable Coordinates and Steady Motion in Classical Mechanics" Proc. Camb. Phil. Soc.61, 211-222.
41. E.J. Konopinski (1969) Classical Descriptions of Motion (Freeman, San Francisco).
42. B.O. Koopman (1931) "Hamiltonian Systems and Transformations in Hilbert Space" Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 17, 315-318.
43. C. Lanczos (1970) The Variational Principles of Mechanics, 4th Ed. (Univ. of Toronto Press, Toronto).
44. L.D. Landau y E.M. Lifshitz (1976) Mechanics, 3rd Ed. (Pergamon Press, Oxford).
45. D. Lovelock y H. Rund (1975) Tensors, Differential Forms,and Variational Principles (Wiley-Interscience, New York).
46. N.E. Macartney-Filgate (1980) "Transformations Related to Second Order Killing Tensors in the Context of Einstein's Gravitational Theory" Tesis de Maestría, University of Texas.
47. G. Marmo y E.J. Saletan (1977) "Ambiguities in the Lagrangian and Hamiltonian Formalism: Transformation Properties" Nuovo Cimento B 40B, 67-89.
48. G. Marmo y E. Saletan (1978) "q-Equivalent Particle Hamiltonians III. The Two-Dimensional Quantum Oscillator" Hadronic J. 1, 955-965.
49. R. Marnelius (1974) "Action Principle and Nonlocal Field Theories" Phys. Rev. D8 2472-2495.
50. A. Mayer (1896) Berichte über die Verhandlungen der kgl. Sächsischen Gessellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math. Phys. Cl. 519
51. J.E. Moyal (1949) "Quantum Mechanics as a Statistical Theory" Proc. Camb. Phil. Soc. 45, 99-124.
52. F. Negro y A. Tartaglia (1980) "The Quantization of Quadratic Friction" Phys. Lett. 77A, 1-2.

53. E. Noether (1918) "Invariante Variations probleme" Nachrichten von der Koniglichen Gessellschaft der Wissenschaften zu Gottingen, Math. Phys. Klasse, 235-257.
54. L.A. Novak, M.M. Milic (1980) "On the Existence of Variational Formulation for General Time-Varying Systems" Proceedings of the 1980 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (IEEE, New York) 830-832.
55. S. Okubo (1980) "Does Equation of Motion Determine Commutation Relation?" Phys. Rev. D 22, 919-923.
56. S. Okubo (1980) "Canonical Quantization of Some Disipative Systems and Non-uniqueness of Lagrangians" Preimpreso, University of Rochester.
57. C. Palmieri y B. Vitale (1970) "On the Inversion of Noether's Theorem in the Lagrangian Formalism" Nuovo Cimento 66A, 299-309.
58. L.A. Pars (1965) A Treatise on Analytical Dynamics (Heinemann, London).
59. L.S. Pontryagin (1962) Ordinary Differential Equations (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts).
60. R. Prosser (1964) "Segal's Quantization Procedure" J. Math. Phys. 5, 701 -707
61. M. Razavy (1972) "q-Equivalent Hamiltonian Operators" Can. J. Phys. 50, 2037-2047.
62. M. Razavy (1977) "On the Quantization of Dissipative Systems" Z. Phys. B 26, 201-206.
63. G. Rosen (1969) Formulations of Classical and Quantum Dynamical Theory (Academic Press, New York).
64. H. Rund (1966) The Hamilton-Jacobi Theory in the Calculus of Variations (Van Nostrand, London).
65. E. J. Saletan y A.H. Cromer (1970) "A Variational Principle for Nonholonomic Constraints" Am J. Phys. 38, 892-897.
66. E.J. Saletan y A.H. Cromer (1971) Theoretical Mechanics (Wiley, New York).
67. R.M. Santilli (1977) "Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of a Lagrangian in Field Theory. I. Variational Approach to Self-adjointness for Tensorial Field Equations" Ann. of Phys. 103, 354-408.
68. R.M. Santilli (1977) "Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of a Lagrangian in Field Theory. II. Direct Analytic Representations of Tensorial Field Equations" Ann. of Phys. 103, 409-468.
69. M. Santilli(1977) "Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of a Lagrangian in Field Theory. III. Generalized Analytic Representations of Tensorial Field Equations" Ann. of Phys. 105, 227-258.
70. R.M. Santilli (1978) Foundations of Classical Mechanics I (Springer-Verlag, New York).
71. W. Sarlet (1979) "On the Transition between Second-order and First-order Systems within the Context of the Inverse Problem of Newtonian Mechanics" Hadronic J. 2, 407-432.
72. W. Sarlet y F. Cantrijn (1978) "On some aspects of the Inverse Problem for General First Order Systems" Hadronic J. 1, 101-133.
73. M. Schoenberg (1952) "Application of Second Quantization Methods to the Classical Statistical Mechanics" Nuovo Cimento IX, 1139-1182.
74. I.E. Segal (1960) "Quantization of Nonlinear Systems" J. Math. Phys. 1, 468-488.

75. I.E. Segal (1964) "Explicit Formal Construction of Nonlinear Quantum Fields" J. Math. Phys. 5, 269-282.
76. A. Tartaglia (1980) "General Lagrangians for the Motion of a Point Particle in a Viscous Medium and the Problem of Quantization" Nuovo Cimento B 57B, 131-145.
77. D.J. Simms y N.M.J. Woodhouse (1976) Lectures on Geometric Quantization (Springer-Verlag, New York).
78. A. Sommerfeld (1952) Mechanics (Academic Press, New York).
79. E.C.G. Sudarshan y N. Mukunda (1974) Classical Dynamics: A Modern Perspective (Wiley, New York).
80. Yu, M. Shirokov (1976) "Axiomatics of General Hamiltonian Theories Including Classical and Quantum Ones as Particular Cases" Theor. and Math. Phys. (USA) 25, 1149-1153.
81. D. Ter Haar (1964) Elements of Hamiltonian Mechanics (North-Holland, Amsterdam).
82. E.T. Whittaker (1937) A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, 4th Ed. (Cambridge Univ. Press, Cambridge).
83. E. P. Wigner (1950) "Do the Equations of Motion Determine the Quantum Mechanical Commutation Relations?" Phys. Rev. 77, 711-712.
84. N.J.M. Woodhouse (1980) Geometric Quantization (Oxford Univ. Press, New York).
85. C.N. Yang y D. Feldman (1950) "The S-Matrix in the Heisenberg Representation" Phys. Rev. 79, 972-978
86. L.M. Yang (1951) "A Note on the Quantum Rule of the Harmonic Oscillator" Phys. Rev. 84, 788-790.
87. W. Yourgrau y S. Mandelstam (1968) Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory, 3rd Ed. (Saunders, Philadelphia).