

# RESONANCIAS EN MECANICA CUANTICA

Arturo Cisneros S.

Escuela Superior de Física y Matemáticas  
Instituto Politécnico Nacional  
México, D.F.

Harold V. McIntosh

Instituto de Ciencias. Universidad Autónoma de Puebla  
Puebla, Pue.

## RESUMEN

Se presenta una discusión de la naturaleza de las resonancias en mecánica cuántica desde el punto de vista de la teoría espectral de operadores. Para el caso de las resonancias de Bohr-Feshbach, se ilustra la teoría en gráficas que muestran el decaimiento de un estado metaestable doblemente excitado y la excitación de la resonancia por una partícula incidente con la energía adecuada. Se da una caracterización de las resonancias y un procedimiento para el cálculo de anchos mediante la función de densidad espectral. Se establece una condición suficiente para que una resonancia de Bohr-Feshbach tenga la forma Breit-Wigner.

## ABSTRACT

A discussion of the nature of quantum mechanical resonances is presented from the point of view of the spectral theory of operators. In the case of Bohr-Feshbach resonances, graphs are presented to illustrate the theory showing the decay of a doubly excited metastable state and the excitation of the resonance by an incident particle with proper energy. A characterization of resonances is given as well as a procedure to determine widths using the spectral density function. A sufficient condition is given for the validity of the Breit-Wigner formula for Bohr-Feshbach resonances.

En sistemas cuánticos se conocen dos tipos de resonancias o estados metaestables; estas son las resonancias de forma y las resonancias de Bohr-Feshbach. Las resonancias de forma, como su nombre lo indica se presentan por la forma del potencial el cual puede tener bordes que mantienen a una partícula temporalmente dentro de una región limitada del espacio. Las resonancias de Bohr-Feshbach se presentan en problemas de muchos cuerpos y se deben a la interacción entre las partículas. Un estado excitado colectivo que sería ligado en ausencia de la interacción resulta no ser estacionario en presencia de la interacción si hay suficiente energía para expulsar a una o más de las partículas cayendo las otras a un nivel más bajo.

Un potencial que muestra resonancias de forma es el considerado por Gamow<sup>(1)</sup> y por Gurney y Condon<sup>(2)</sup> para explicar algunos aspectos de la emisión de partículas alfa por núcleos. Estos trabajos son de importancia histórica ya que constituyeron la primera aplicación exitosa de la mecánica cuántica al núcleo, al explicar la regla experimental de Geiger-Nuttal. El potencial se muestra en la Fig. 1. En el interior del núcleo se supone a la partícula en un potencial constante, y fuera de él la partícula se encuentra afectada por el potencial de Coulomb. La inversa del tiempo de confinamiento de la partícula dentro del núcleo se calcula, para una energía  $E$ , multiplicando el coeficiente de transmisión por el número de veces por unidad de tiempo que la partícula choca contra la barrera. De esta manera se establece la ley de Geiger-Nuttal. Sin embargo, no se explica por qué los estados metaestables aparecen solamente a ciertas energías. La teoría de los estados virtuales explica esto. Una discusión de la teoría de los

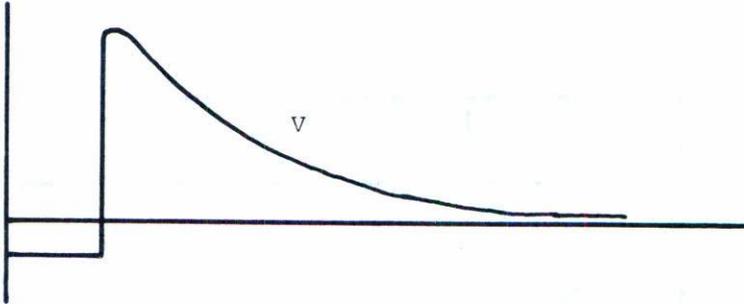


Fig. 1 Potencial considerado para el problema de emisión de partículas alfa por núcleos.

estados virtuales se puede encontrar en las notas de un curso de Física Nuclear dado por Fermi<sup>(3)</sup>. Fermi trató primero el caso de una partícula en una dimensión afectada por un potencial tipo barrera cuadrado  $V(x)$  (Fig. 2a.). Se supone que los parámetros son tales que existe cuando menos un estado ligado de energía  $E_0$  para el potencial escalón  $V'(x)$  (Fig. 2a.) con la condición de frontera  $\psi(0) = 0$ . La función de onda de este estado ligado se ilustra en la Fig. 2b. Regresando al potencial  $V(x)$ , el espectro de energías es continuo desde cero, sin embargo, se encuentra lo siguiente para el caso en que el coeficiente de transmisión de la barrera para la energía  $E_0$  es pequeña. La función de onda para  $E$  cerca de  $E_0$  muestra un mínimo en la razón de la amplitud externa a la interna (Fig. 2c). Si  $E$  es ligeramente mayor a  $E_0$  se encuentra la función de la Fig. 2d y si  $E$  es ligeramente menor a  $E_0$  se encuentra la función de la Fig. 2e. La normalización de estas funciones es tal que la amplitud interna es constante. Se encuentra que cerca de  $E_0$  la razón de la amplitud interna a la externa tiene forma lorentziana, o sea  $( (E-E_0)^2 + \Gamma^2/4 )^{-1}$ . Si al tiempo  $t = 0$  el sistema se prepara en el estado descrito por la función  $u(x)$  de la Fig. 2b,  $\psi(x, t = 0) = u(x)$ , se puede determinar su desarrollo en el tiempo  $\psi(x, t)$  haciendo una expansión en términos de los estados estacionarios. Las funciones que más contribuyen a esta expansión son aquellas que tienen una re

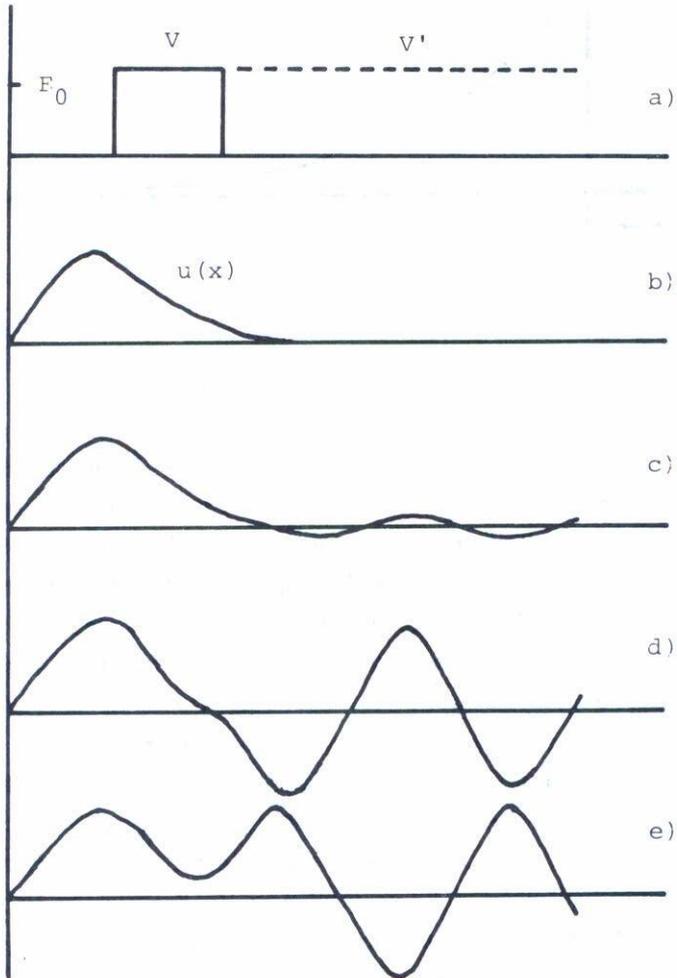


Fig. 2. a) Potencial barrera  $V$  que tiene estados metaestables cerca de la energía  $E_0$  donde el potencial escalón  $V'$  tiene un estado ligado. b) Eigenfunción  $u(x)$  para el estado ligado de energía  $E_0$  del potencial  $V'$ . c), d), e) Eigenfunciones para el potencial  $V$  cerca de la energía  $E_0$ .

lación de amplitud interna a externa grande, esto corresponde a un ancho de energía  $\Gamma$  alrededor de  $E_0$ . Si se hace la pregunta: ¿Si al tiempo  $t = 0$  se prepara al sistema en la función  $u(x)$ , cuál es la probabilidad de que después de transcurrido el tiempo  $t$  la configuración del sistema sea la descrita por la misma función  $u(x)$ ? La respuesta es

$$|\langle u(x) | \psi(x,t) \rangle|^2 = e^{-\Gamma t}. \quad (1)$$

Se debe hacer la aclaración de que el resultado depende de las aproximaciones mencionadas y de suponer que la integral que se hace sobre la función lorentziana se puede extender hasta  $\pm \infty$ . En rigor, para tiempos pequeños el decaimiento no tiene forma exponencial. El resultado es, sin embargo, bastante bueno en muchas aplicaciones.

Después de la anterior introducción presentaremos una descripción de las resonancias de forma en términos de la teoría espectral de operadores. Esta teoría da origen a una descripción de las resonancias independiente de cualquier aproximación. La presentación no será rigurosa; los detalles matemáticos se pueden encontrar en las Refs. 4 y 5.

Consideremos el potencial mostrado en la Fig. 3a. con las condiciones de frontera  $u(0) = u(L) = 0$ . El hamiltoniano

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad (2)$$

tiene un conjunto infinito de eigenfunciones  $u_j(x)$  correspondiente al conjunto discreto de eigenvalores  $\omega_j$ . Sea  $u_j$  normalizada y sea  $\bar{u}_j$  una función proporcional a  $u_j$  que tiene amplitud unitaria en la región  $x < x_0$ . Diremos que  $\bar{u}_j$  satisface condiciones de frontera unitarias. Entonces

$$u_j = h_j \bar{u}_j, \quad (3)$$

donde  $h_j$  no depende de  $x$ . En la Fig. 3b se ilustran dos de estas funciones  $\bar{u}_j$ . Se define la función espectral  $\rho(\omega)$  como aquella función que es constante para  $\omega \neq \omega_j$  y tiene saltos de magnitud  $|h_j|^2$  en  $\omega_j$  (Fig. 4). La función  $\rho(\omega)$  tendrá saltos grandes  $|h_j|^2$  para valores de  $\omega_j$  tales que la función  $u_j$  tiene una razón grande de la amplitud interna a la amplitud externa. La región de una resonancia corresponderá a la región de energía donde  $\rho(\omega)$  está creciendo rápidamente. Tomemos ahora el límite  $L \rightarrow \infty$ . Es fácil demostrar que se satisfacen las relaciones de escalamiento

$$h_j \sim 1/\sqrt{L} \quad , \quad (4)$$

$$\omega_{j+1} - \omega_j \sim 1/L. \quad (5)$$

En este límite la función  $\rho(\omega)$  convergerá a una función derivable, que se

llamaremos llamando  $\rho(\omega)$  ilustrada por la función derivable de la Fig. 4.

La derivada de la función espectral está dada por

$$\frac{d\rho}{d\omega} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{|h_j|^2}{\Delta\omega} \quad (6)$$

y se llama función de densidad espectral.

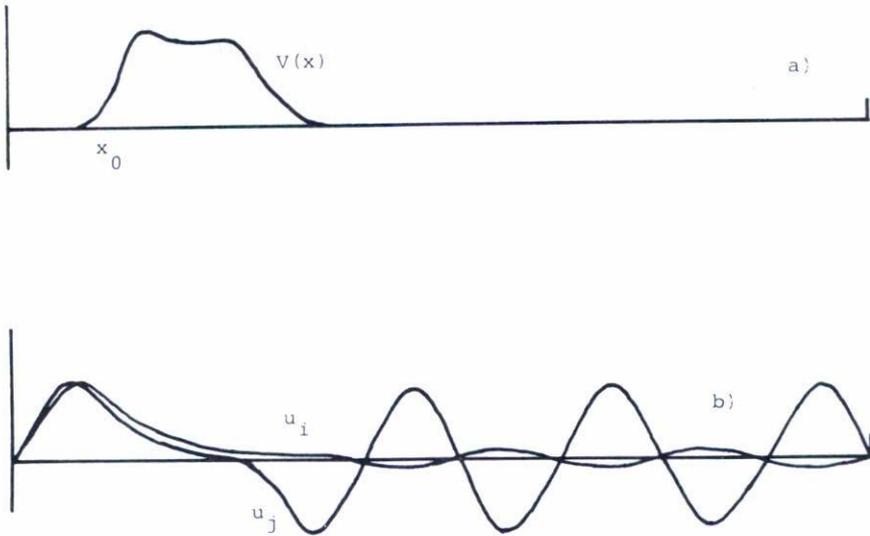


Fig. 3. a) Potencial  $V(x)$  arbitrario tipo barrera que muestra resonancias de forma.

b) Eigenfunciones para el potencial  $V(x)$ .

Se podrá decir que el potencial  $V(x)$  tiene resonancias cuando la función de densidad espectral tiene uno o más máximos relativamente angostos. Una resonancia será un estado no estacionario dado como una superposición de estados estacionarios con un conjunto de coeficientes proporcio

nal a la función de densidad espectral. Si al tiempo  $t = 0$  se prepara al sistema en uno de estos estados, la probabilidad  $f(t)$  de encontrarlo en la misma configuración después de transcurrido el tiempo  $t$  está dada por el cuadrado de la transformada de Fourier-Stieltjes de la función de densidad espectral:

$$f(t) = \left| \int e^{-i\omega t} d\rho(\omega) \right|^2 \quad (7)$$

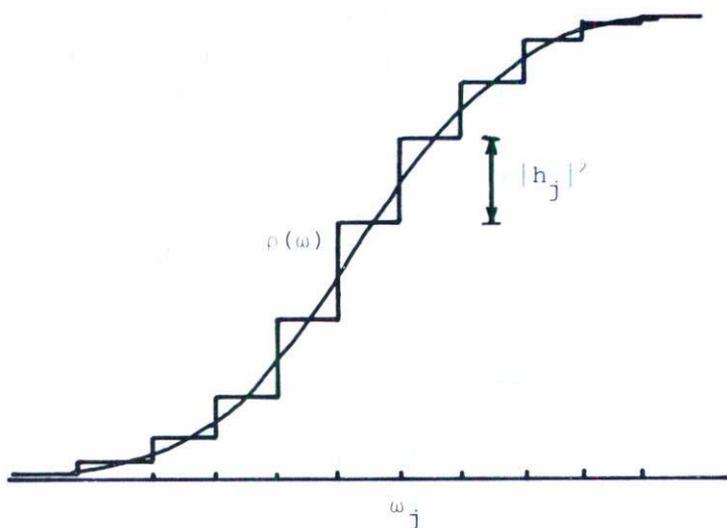


Fig. 4 Función espectral mostrando la forma característica en la región de una resonancia.

En muchos casos se encuentra que en la región del máximo la función de densidad espectral  $d\rho/d\omega$  se aproxima muy bien a una función lorentziana. En esos casos el decaimiento será aproximadamente exponencial. Sin embargo el procedimiento nos permite caracterizar resonancias de cualquier forma se aproximen o no a la forma lorentziana.

Este método se aplicó con éxito por primera vez por Hehenberger, McIntosh y Brandas<sup>(5)</sup> al cálculo de los anchos de estados metaestables en el efecto Stark del átomo de hidrógeno para campos grandes a escala atómica.

Pasamos ahora al análisis de las resonancias de Bohr-Feshbach. Para ilustrar la teoría se analizará un ejemplo de los más simples que muestra claramente el efecto conservando todas las características esenciales. Consideremos el problema de una partícula en un pozo de potencial cuadrado, el hamiltoniano es

$$H_0(x) = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad , \quad (8)$$

donde usamos unidades tales que  $\hbar = 1$ ,  $m = 1/2$ . El potencial particular que usamos es de profundidad  $V_0 = -12$  y ancho 2 (Fig. 5). Imponemos las condiciones de frontera  $\psi(\pm R) = 0$  para  $R$  grande en comparación al ancho del pozo. El espectro es discreto, pero el espaciamiento de niveles es muy fino para energías positivas y lo llamaremos el "continuo" (lo es para  $R \rightarrow \infty$ ). Hay tres estados ligados de energía  $E_0 = -10.53$ ,  $E_1 = -6.33$  y  $E_2 = -0.63$  (Fig. 5) correspondientes a las eigenfunciones normalizadas  $\psi_0$ ,  $\psi_1$  y  $\psi_2$ . Las eigenfunciones del continuo serán designadas  $\psi_n$ .

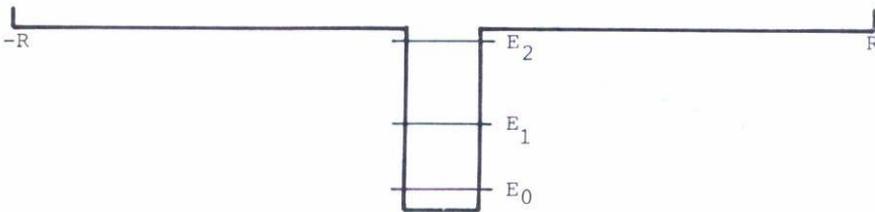


Fig. 5 Potencial pozo cuadrado con tres niveles ligados.

Consideremos ahora el problema de dos partículas idénticas que satisfacen estadística de Bose dentro del mismo pozo y que interactúan mediante el potencial de contacto  $g \delta(x-y)$ ;  $g$  es la fuerza de la interacción, y en el argumento de la función delta aparece la distancia entre las partículas. El hamiltoniano del problema es

$$H(x,y) = H_0(x) + H_0(y) + g\delta(x-y). \quad (9)$$

Cuando  $g = 0$  el problema es separable y podemos determinar las

eigenfunciones, éstas son productos directos simetrizados de las eigenfunciones de una partícula y las energías son las sumas correspondientes.

En principio el problema con interacción ( $g \neq 0$ ) se podría resolver de la siguiente manera: Las eigenfunciones del problema separable forman un conjunto completo. Se pueden determinar todos los elementos de matriz del hamiltoniano  $H$  en esta base. La diagonalización de la matriz infinita que resulta proporciona la solución del problema. No sorprenderá a nadie que esto no se ha podido hacer. Afortunadamente, para entender la naturaleza de las resonancias de Bohr-Feshbach basta con considerar una submatriz.

En la Fig. 6a se muestra el espectro de energía de una partícula y en la Fig. 6b el espectro de dos partículas ( $g = 0$ ). Observemos en particular el nivel  $2E_2$  correspondiente a la eigenfunción  $\psi_2(x)\psi_2(y)$ . Este estado está casi degenerado con estados del tipo  $[\psi_0(x)\psi_n(y) + \psi_0(y)\psi_n(x)]/\sqrt{2}$ , que corresponden a una partícula en el estado base y otra libre.

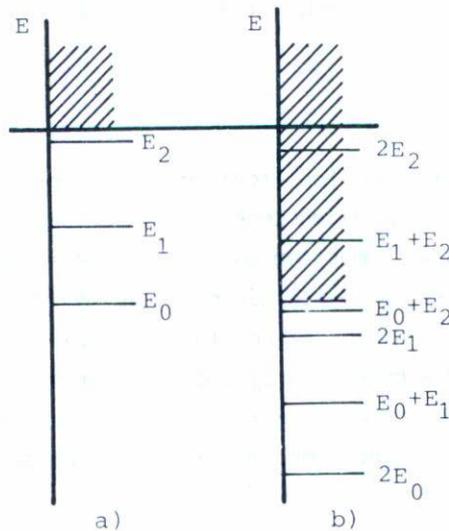


Fig. 6 a) Espectro de energías para estados de una partícula en un pozo.  
 b) Espectro de energías para estados de dos partículas sin interacción mutua en un pozo.

El estado  $\psi_2(x)\psi_2(y)$  es estacionario en ausencia de interacción. No es estacionario cuando  $g \neq 0$  ya que la interacción puede hacer que una de las partículas caiga al estado base expulsando a la otra. Dicho de otra manera, la interacción mezcla a los estados

$$\phi_0 = \psi_2(x)\psi_2(y), \quad (10a)$$

$$\phi_n = \left[ \psi_0(x)\psi_n(y) + \psi_0(y)\psi_n(x) \right] / \sqrt{2} \quad (10b)$$

para un cierto rango de valores de  $n$ . Precisamente este conjunto limitado de elementos de la base se tomará para representar al hamiltoniano  $H(x,y)$  en la región de interés. Comentamos que la perturbación mezcla a  $\phi_0$  que es par en  $x$  y en  $y$ , solamente con estados  $\phi_n$  tales que  $\psi_n$  es par ya que  $\psi_0$  es par.

La función de onda de los estados ligados está limitada a la región del pozo, mientras que los de energía positiva tienen una función de onda esparcida en el rango de  $-R$  a  $+R$ . Por esto,  $\psi_0$  y  $\psi_2$  tienen un factor de normalización de orden uno mientras que  $\psi_n$  tiene un factor de normalización proporcional a  $1/\sqrt{R}$ . Los elementos de matriz del hamiltoniano de perturbación  $H' = g\delta(x-y)$  dependen de  $R$  de la manera siguiente:

$$\langle \phi_0 | H' | \phi_n \rangle \sim 1/\sqrt{R} \quad , \quad (11a)$$

$$\langle \phi_n | H' | \phi_m \rangle \sim 1/R \quad . \quad (11b)$$

La submatriz del hamiltoniano total (Ec. (9) ) en la base  $(\phi_0, \phi_n)$ , tomando las nueve funciones  $\phi_n$  más cercanas en energía a  $\phi_0$ , se muestra en la Tabla I (hemos tomado  $g = -4.5$  y  $R = 1100$  para el ejemplo). El cero de energía se ha desplazado para que  $\langle \phi_0 | H | \phi_0 \rangle = 0$ . Esta matriz se puede diagonalizar dando los eigenvalores (Tabla II) y los eigenvectores (Tabla III). Los eigenvectores aparecen como renglones de la Tabla III, donde se ha tomado el primer coeficiente como uno. Sea  $C_{ji}$  ( $i = 0, 1, \dots, 9$ ) el  $j$ -ésimo eigenvector, entonces la  $j$ -ésima función de onda normalizada es

$$u_j = \frac{1}{N_j} \sum_i C_{ji} \phi_i \quad , \quad (12)$$

donde

$$N_j = \left( \sum_i C_{ji}^2 \right)^{1/2} \quad . \quad (13)$$

TABLA I

|         |          |          |          |          |         |         |         |         |         |
|---------|----------|----------|----------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| .000000 | .011009  | .011033  | .011058  | .011083  | .011107 | .011133 | .011157 | .011183 | .011207 |
| .011009 | -.068185 |          |          |          |         |         |         |         |         |
| .011033 |          | -.049717 |          |          |         |         |         |         |         |
| .011058 |          |          | -.031233 |          |         |         |         |         |         |
| .011083 |          |          |          | -.012733 |         |         |         |         |         |
| .011107 |          |          |          |          | .005784 |         |         |         |         |
| .011133 |          |          |          |          |         | .024317 |         |         |         |
| .011157 |          |          |          |          |         |         | .042867 |         |         |
| .011183 |          |          |          |          |         |         |         | .061433 |         |
| .011207 |          |          |          |          |         |         |         |         | .080015 |

TABLA I. Submatriz del hamiltoniano con interacción para el problema de dos partículas en un pozo.

TABLA II

|          |
|----------|
| -.070490 |
| -.052494 |
| -.035021 |
| -.018423 |
| -.003017 |
| .012166  |
| .028457  |
| .045780  |
| .063672  |
| .081918  |

TABLA II. Eigenvalores de la submatriz del hamiltoniano con interacción para el problema de dos partículas.

TABLA III

|         |          |          |          |          |          |         |         |         |         |
|---------|----------|----------|----------|----------|----------|---------|---------|---------|---------|
| 1.00000 | -4.81783 | -.53467  | -.28293  | -.19230  | -.14568  | -.11715 | -.09798 | -.08419 | -.07380 |
| 1.00000 | .70787   | -3.99937 | .52241   | -.27934  | -.19059  | -.14460 | -.11647 | -.09749 | -.08382 |
| 1.00000 | .33492   | .75581   | -2.95181 | -.49833  | -.27219  | -.18718 | -.14260 | -.11515 | -.09655 |
| 1.00000 | .22320   | .35492   | .86706   | -1.95202 | -.45883  | -.25987 | -.18122 | -.13909 | -.11283 |
| 1.00000 | .17044   | .23783   | .39364   | 1.14311  | -1.26208 | -.40635 | -.24207 | -.17234 | -.13377 |
| 1.00000 | .13823   | .17949   | .25593   | .44609   | 1.74051  | -.91404 | -.36177 | -.22544 | -.16370 |
| 1.00000 | .11493   | .14208   | .18608   | .26965   | .48987   | 2.68257 | -.77081 | -.33683 | -.21543 |
| 1.00000 | .09746   | .11631   | .14422   | .18982   | .27770   | .51749  | 3.81275 | -.70958 | -.32444 |
| 1.00000 | .08423   | .09795   | .11703   | .14537   | .19187   | .28222  | - 53385 | 4.95974 | -.67964 |
| 1.00000 | .07400   | .08438   | .09816   | .11735   | .14587   | - 19283 | - 28442 | - 54220 | 5.83615 |

TABLA III. Eigenvectores de la submatriz del hamiltoniano con interacción para el problema de dos partículas en un pozo.

Definimos la función espectral de la misma manera como se hizo para el caso de las resonancias de forma (ver discusión a continuación de la Ec. (3)). La única diferencia es que en este caso "condición de frontera unitaria" significa amplitud unitaria dentro del pozo. Calculando los escalones  $|h_j|^2$  resulta la función espectral de la Fig. 7. De este punto en adelante la definición de la función de densidad espectral (tomando el límite  $R \rightarrow \infty$ ) y la caracterización de la resonancia es análoga al caso de la resonancia de forma. Esto lo haremos más adelante generalizando el análisis. Para el caso particular de este pozo cuadrado y para mostrar que se tienen los efectos que se asocian físicamente con una resonancia, usamos el conjunto de funciones  $u_j$  (incrementado con otras nueve funciones impares) para calcular los resultados que se muestran en las Figs. 8 y 9. Se presentan pares de figuras, cada par muestra en la gráfica superior la densidad de probabilidad para la región del pozo ( $-3.3 \leq x \leq 3.3$ ), la inferior muestra la función de onda externa ( $-750 \leq x \leq 750$ ), a esta escala la función de onda interna aparece muy reducida en amplitud porque sería imposible mostrar su amplitud real en relación a la amplitud externa en el papel. En la Fig. 8 se muestra el desarrollo temporal de la densidad de probabilidad cuando al tiempo  $t = 0$  se prepara al sistema en el estado  $\phi_0$ . Esto muestra el decaimiento del estado metaestable "doblemente excitado". Una de las partículas cae al estado base y la otra es expulsada con igual probabilidad de viajar a la derecha o a la izquierda. La densidad de probabilidad muestra una oscilación a pequeña escala lo que hace que el trazo de la pluma de la graficadora llene ciertas áreas de las figuras. En las porciones cercanas a la izquierda y derecha de cada figura el intervalo de integración es más ancho; esto hace que la oscilación muestre una longitud de onda ficticia mayor, sin embargo la envolvente es fácilmente apreciable. En la Fig. 9 se muestra la excitación de la resonancia. Una partícula se encuentra en el pozo en el estado base, la otra en un paquete de ondas gaussiano con energía central igual a la necesaria para excitar la resonancia y ancho similar al ancho de la resonancia. Se observa la excitación del nivel superior  $\phi_0$  y la separación de la onda transmitida de la onda retardada la cual se debe al decaimiento de la resonancia.

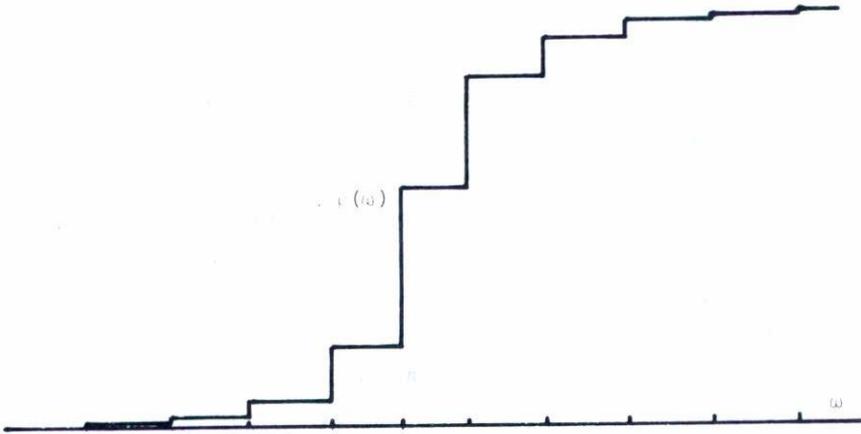


Fig. 7 Función espectral para la resonancia de Bohr-Feshbach correspondiente al nivel doblemente excitado de dos partículas en un pozo.

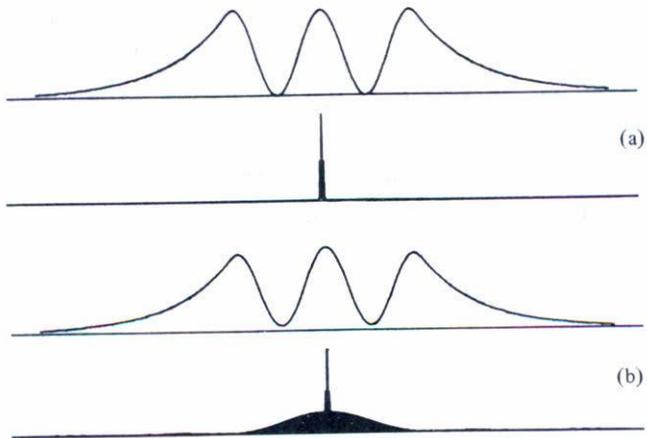


Fig. 8

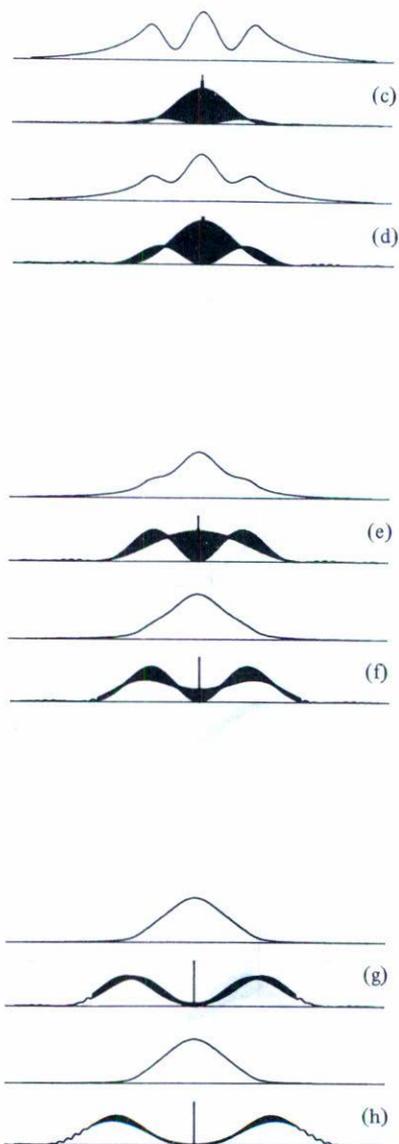


Fig. 8 Secuencia de gráficas que muestra el desarrollo temporal de la densidad de probabilidad para el decaimiento del estado metaestable doblemente excitado para dos partículas en un pozo.

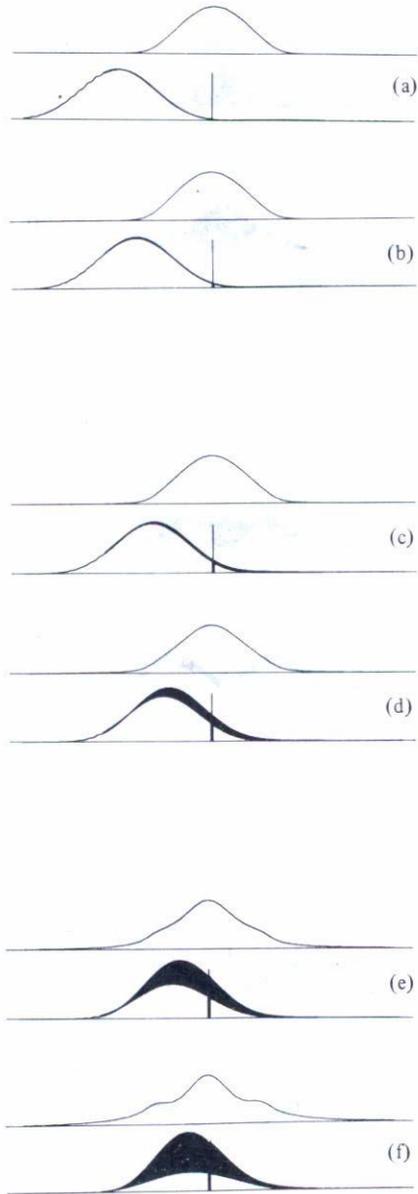


Fig. 9

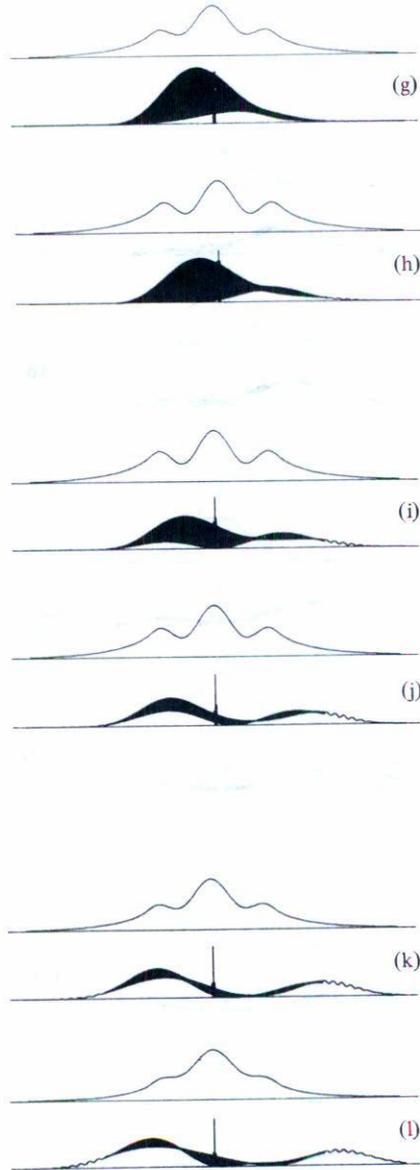


Fig. 9

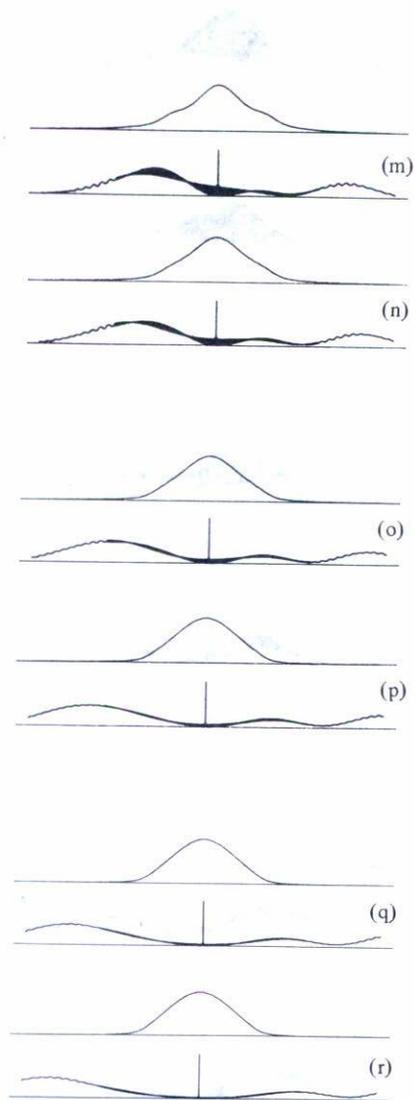


Fig. 9 Secuencia de gráficas que muestra el desarrollo temporal de la densidad de probabilidad para la excitación de la resonancia correspondiente al nivel doblemente excitado para dos partículas en un pozo.

Se puede abstraer la situación general del ejemplo estudiado. Se tiene un estado localizado degenerado o casi degenerado con un continuo de estados no localizados. Una interacción mezcla a estos estados generando una resonancia o estado metaestable. Las funciones de onda de los estados no localizados contienen un factor de normalización  $1/\sqrt{R}$  por cada partícula no localizada, donde  $R$  es el radio del universo del sistema. Este factor es importante porque determina el orden de magnitud de los elementos de matriz de la perturbación.

Tenemos una base de estados

$$(\phi_0, \phi_n) \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (14)$$

en la cual el hamiltoniano sin interacción es diagonal. El hamiltoniano total representado en esta base tiene la forma

$$\begin{array}{cccc} \omega_0 & a_1 & a_2 & a_3 \dots \\ a_1^* & \omega_1 & & \\ a_2^* & & \omega_2 & \\ a_3^* & & & \omega_3 \dots \\ \vdots & & & \ddots \end{array} \quad (15)$$

donde  $a_n = \langle \phi_0 | H | \phi_n \rangle$ ; los elementos no escritos son de orden  $1/R$  y se desprecian. La ecuación secular de la matriz (15) es

$$\omega_0 - \lambda = \sum_n \frac{a_n^2}{\omega_n - \lambda} \quad (16)$$

Si  $\lambda_j$  es el  $j$ -ésimo eigenvalor de (15), el  $j$ -ésimo eigenvector está dado por

$$1, C_{j1}, C_{j2}, C_{j3}, \dots \quad (17)$$

donde

$$C_{jn} = \frac{a_n^*}{\lambda_j - \omega_n} \quad (18)$$

Las eigenfunciones están dadas por

$$u_j = \frac{1}{N_j} \sum_n C_{jn} \phi_n \quad (19)$$

donde

$$N_j = \left( \sum_n |C_{jn}|^2 \right)^{1/2} \quad (20)$$

El problema sin interacción tiene una función espectral con escalones  $|h^0|^2$  dados por

$$\phi_0 = h^0 \bar{\phi}_0, \quad (21a)$$

$$\phi_n = h_n^0 \bar{\phi}_n, \quad (21b)$$

donde  $(\phi_0, \phi_n)$  están normalizadas y  $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_n)$  satisfacen condiciones de frontera unitarias.

El problema con interacción tiene una función espectral con escalones  $|h_j|^2$  dados por

$$u_j = h_j \bar{u}_j, \quad (22)$$

$$|h_j|^2 = \frac{1}{N_j^2} \left| h^0 + \sum_n C_{jn} h_n^0 \right|^2 \quad (23)$$

El resultado importante que obtenemos es que la nueva función espectral se determina de la vieja función espectral efectuando sobre los escalones la misma transformación unitaria que diagonaliza al hamiltoniano.

En la Fig. 10a se ilustra la solución gráfica de la ecuación secular para  $n = 9$ . La intersección de la recta  $\lambda - \omega_0$  con la curva  $\sum_n \frac{a_n}{\lambda - \omega_n}$  determina los eigenvalores  $\lambda_j$ . En la Fig. 10b se ilustra la función espectral la cual tiene escalones de tamaño  $|h_j|^2$  en las posiciones  $\lambda_j$ .

En el límite  $R \rightarrow \infty$  la función de densidad espectral,

$$\frac{d\rho}{d\omega} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{|h_j|^2}{\Delta\lambda}, \quad (24)$$

caracteriza a la resonancia.

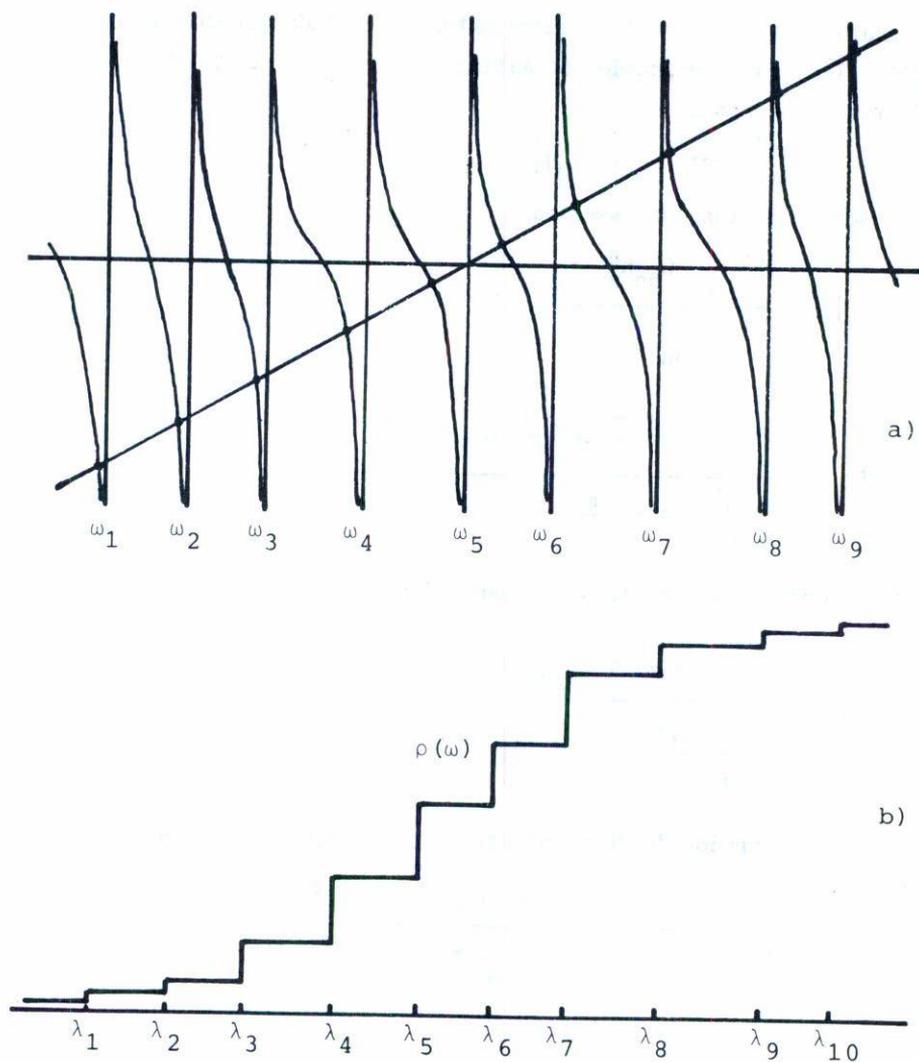


Fig. 10 a) Solución gráfica de la ecuación secular de la matriz (15)  
 b) Función espectral para la región de la resonancia de Bohr-Feshbach.

Consideramos un caso especial de amplia aplicación. La interacción mezclará estados  $\phi_0, \phi_n$  dentro de un ancho de energías de orden  $|a_n|^2/\Delta\omega$ ; si dentro de este ancho las energías  $\omega_n$  están uniformemente

espaciadas y las  $a_n$  son constantes, entonces el lado derecho de la ecuación secular (16) es la expansión de Mittag-Leffler de la cotangente, esta ecuación tomará la forma

$$\lambda - \omega_0 = \frac{\pi a^2}{\Delta\omega} \cot\left(\frac{\pi}{\Delta\omega} (\lambda - \omega_0)\right), \quad (25)$$

y el escalón de función espectral

$$|h_y|^2 = \frac{|h^0 + \sum_n C_{jn} h_n^0|^2}{1 + \sum_n |C_{jn}|^2},$$

$$|h_j|^2 = \frac{|h^0 + h'a^* \frac{\pi}{\Delta\omega} \cot\left(\frac{\pi}{\Delta\omega} (\lambda_j - \omega_0)\right)|^2}{2 + \frac{\pi a^2}{(\Delta\omega)^2} \operatorname{csc}^2 \frac{\pi}{\Delta\omega} (\lambda_j - \omega_0)},$$

substituyendo de la Ec. (25) se simplifica a

$$|h_j|^2 = \frac{|h^0 + h'a^* (\lambda_j - \omega_0)/a^2|^2}{2 + \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{\pi a^2}{(\Delta\omega)^2} (\lambda_j - \omega_0)^2 \right\}}.$$

La función de densidad espectral se puede determinar:

$$\frac{d\rho}{d\omega} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{|h_j|^2}{\Delta\omega} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{|h^0 + h' (\lambda - \omega_0)/a|^2}{\frac{\Gamma^2}{4} + (\lambda - \omega_0)^2},$$

$$\text{donde } \Gamma = 2\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{|a|^2}{\Delta\omega}.$$

El resultado que obtenemos es que la función de densidad espectral tiene la forma de Breit-Wigner y tenemos un procedimiento para calcular el ancho de la resonancia. Sin embargo, es importante hacer notar que aunque no se satisfaga el criterio enunciado para que la resonancia tenga forma lorentziana podemos caracterizar resonancias calculando la función de densidad espectral.

Como en el caso de la resonancia de forma, se puede demostrar que si el sistema se prepara a tiempo  $t = 0$  en el estado  $\phi_0$ , la probabilidad de encontrarlo en la misma configuración después de transcurrido el tiempo  $t$  está dada por el cuadrado de la transformada de Fourier-Stieltjes de la función de densidad espectral.

#### REFERENCIAS

1. G. Gamow, *Z. Physik.* 51 (1928) 204.
2. R.W. Gurney y E.U. Condon, *Phys. Rev.*, 76 (1929) 749, 769.
3. E. Fermi, *Nuclear Physics*, The University of Chicago Press. (1949).
4. H. Weyl, *Math. Ann.*, 68, (1910) 220.  
E. C. Titchmarsh, *Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential equations*, Oxford U.P., London. (1946)  
E.A. Coddington, N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations* McGraw Hill, New York, (1955).
5. M. Hehenberger, H.V. McIntosh, y E. Brandas, *Phys. Rev.* 10A (1974) 1494.