

# ATRACTORES EXTRAÑOS

Rafael Pérez

Instituto de Física, UNAM.

Apartado Postal 20-364. 01000 - México, D.F.

## RESUMEN

En los últimos años se ha encontrado que los sistemas dinámicos pueden tener soluciones asintóticas o atractores sumamente complejos e irregulares llamados atractores extraños.

En este artículo se presenta una revisión de estos trabajos recientes y de su importancia en el contexto de la física teórica, de las matemáticas y de la interacción entre estas dos ciencias.

## ABSTRACT

Recent results have shown that dynamical systems can have very complex and irregular asymptotic solutions or attractors that are called strange attractors.

In this paper a review of this recent work and its relevance to theoretical physics, mathematics and their interactions is presented.

## I. INTRODUCCION

La aparición de regímenes irregulares en el comportamiento de sistemas físicos ha sido un tema difícil de atacar por los procedimientos matemáticos clásicos; esto es debido, tanto a la dificultad intrínseca de la descripción y la experimentación detallada de dichos fenómenos, como a la regularidad que presentan la mayoría de las soluciones asintóticas de las ecuaciones diferenciales que se manejan usualmente.

Sin embargo, recientemente se han encontrado ecuaciones diferenciales, y en general sistemas dinámicos, cuyas soluciones asintóticas presentan un comportamiento sumamente irregular y complejo, que no se distingue del comportamiento al que generalmente le asignaríamos el calificativo de caótico, aunque no lo es en realidad, puesto que caótico significa sin ley e indeterminado y en este caso nos encontramos ante soluciones a ecuaciones diferenciales que son sistemas totalmente determinados.

Este hecho ha abierto un nuevo e intenso terreno de investigación, tanto en el problema matemático mismo, como en áreas de la física, la biología y otras ciencias; en especial en la hidrodinámica, magnetohidrodinámica, en las alteraciones de los ritmos biológicos normales, en la cinética química compleja y en general en aquellos campos en que aparecen fenómenos complejos y no lineales.

En este artículo se hace una revisión de estos fenómenos matemáticos recientemente descubiertos que llamamos atractores extraños y que está permitiendo una nueva concepción sobre los fenómenos físicos irregulares, "caóticos" o turbulentos. El orden que usaremos en esta presentación es el siguiente: en la sección II se da un resumen de los conceptos y teoremas básicos de la teoría de sistemas dinámicos, en la sección III presentamos el fenómeno de los atractores extraños para el caso de las ecuaciones diferenciales, en la sección IV presentaremos el caso de la iteración de mapeos de espacios o regiones de espacios en sí mismos y finalmente en la sección V presentamos las conclusiones.

## II. SISTEMAS DINAMICOS

En esta sección daremos en forma resumida las definiciones y

teoremas indispensables para la comprensión de los siguientes. A aquellos lectores que se interesen en profundizar les recomendamos los textos dados en las Refs. 1, 2, 3 y 4.

El concepto de sistema dinámico es una generalización del movimiento mecánico descrito en el espacio fase. En el caso del movimiento mecánico tenemos un parámetro, el tiempo, que es un número real, y un espacio euclidiano, el espacio fase, que representa los estados del sistema mecánico; además tenemos una regla que nos permite, dado un valor del parámetro  $t$ , construir un mapeo del espacio fase en sí mismo que asigna a cada punto de dicho espacio, o estado del sistema, o condición inicial, el punto o estado al que irá a parar después de transcurrido el tiempo  $t$ . Esta colección de mapeos uno para cada  $t$ , y que denotaremos por  $\psi_t : E \rightarrow E$ , donde  $E$  es el espacio fase, hereda de la estructura de grupo de los reales varias propiedades:

- a) Al elemento idéntico de los reales  $t=0$  le corresponde el mapeo identidad, esto es  $\psi_0 = I$ , o sea, después de un tiempo cero un sistema mecánico permanecerá en su estado inicial cualquiera que éste sea.
- b) La composición del mapeo  $\psi_t$  para los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  es el mapeo para el tiempo  $t_1 + t_2$ . Esto es, la posición de un punto del espacio fase después del tiempo  $t_2$ , es la misma que la que tendría después de un tiempo  $t_1 + t_2$  a partir de la posición inicial.

Este mapeo  $\psi_t : E \rightarrow E$ , que podemos ver como el conjunto de todas las soluciones de las ecuaciones de Hamilton del sistema mecánico y que nos describe el flujo de estados con el pasar del tiempo, inspira la siguiente definición de sistema dinámico:

Un sistema dinámico es un mapeo de clase  $C^1$ ,  $\psi : \mathbb{R} \times S \rightarrow S$ , donde  $S$  es una variedad diferencial, tal que, con la notación  $\psi(t, x) = \psi_t(x)$ , el mapeo  $\psi_t : S \rightarrow S$  cumple

- a)  $\psi_0 : S \rightarrow S$  es la identidad.
- b) La composición  $\psi_{t_1} \circ \psi_{t_2} = \psi_{t_1 + t_2}$ , para toda  $t_1$  y  $t_2 \in \mathbb{R}$ .

De la misma forma en que al sistema mecánico le correspondía una ecuación diferencial ordinaria, i.e., las ecuaciones de Hamilton, a todo sistema dinámico le corresponde una ecuación diferencial ordinaria sobre

la variedad  $S$ . Esto se puede ver así: dado  $\psi_t(x)$  y contemplando a  $S$  como un abierto de un espacio vectorial  $E$  podemos definir

$$f(x) = \left. \frac{d}{dt} \psi_t(x) \right|_{t=0},$$

donde  $f(x)$  será un campo vectorial sobre  $S$ , y la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (x \in S)$$

se puede ver como un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden, donde  $n$  es la dimensión de  $S$ . Es fácil ver que el conjunto de soluciones de esta ecuación diferencial para toda condición inicial es equivalente al flujo sobre  $S$  o sistema dinámico.

El inverso es también cierto, pues se puede hacer ver que a todo sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

donde  $f(x) : S \rightarrow S$  es de clase  $C^1$ , le corresponde un sistema dinámico definido sobre  $S$ . Esto último no es más que el teorema de existencia y unicidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas, pues debemos recordar que toda ecuación diferencial ordinaria de orden  $n$  se puede expresar como un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden.

Ahora bien, la definición de sistema dinámico puede generalizarse si permitimos que el parámetro  $t$ , que en la definición anterior era un número real, pueda ser un elemento de un grupo topológico  $G$  cualquiera, o incluso del grupo aditivo de los enteros, y no solamente del grupo de los reales. Esta generalización incluye sistemas dinámicos equivalentes no sólo a las ecuaciones diferenciales ordinarias, sino también a las ecuaciones en diferencias finitas y muchos casos más sin traducción en objetos matemáticos comunes; sin embargo debemos reconocer que para el caso general, o para casos en que el grupo no es el de los reales o los enteros, la teoría de sistemas dinámicos está todavía muy poco desarrollada y es sumamente compleja. Por esta razón, limitaremos este trabajo a los

dos casos mencionados.

Dado un punto  $x \in S$  y un sistema dinámico  $\psi : G \times S \rightarrow S$ , se define la órbita que pasa por  $x$ , como la imagen del mapeo  $P_x : G \rightarrow S$ , donde  $P_x(g) = \psi_g(x)$ . En el caso en que  $G$  es el grupo de los reales, la órbita por el punto  $x$ , es la curva en el espacio  $S$  formada por todos los puntos que se generan a partir de  $x$ , a medida que pasa el tiempo y se puede ver como la solución particular de la ecuación diferencial correspondiente para los valores iniciales dados por  $x$ . En el caso de los enteros, la órbita será el conjunto de puntos de  $S$  que se generan a partir de  $x$ , a medida que vamos iterando. En el caso en que el grupo sea un conjunto bien ordenado, como sucede para los reales y los enteros, se puede definir una dirección en la que se recorre la órbita.

En un sistema hamiltoniano conservativo el teorema de Liouville nos asegura que a medida que pasa el tiempo o que cada punto recorre su órbita, un volumen en el espacio fase se conservará constante. Ahora, en un sistema no conservativo esto no sucede y hay sistemas de esta clase. Por ejemplo, un oscilador armónico amortiguado, que iniciándose con un volumen finito en el espacio fase a medida que pasa el tiempo este volumen disminuye o se contrae, de tal forma que al tender  $t$  a infinito el volumen se ha reducido a cero; en el caso del oscilador armónico amortiguado todos los puntos del volumen inicial habrán tendido al origen, que es el punto de equilibrio.

Estas ideas, naturalmente, pueden generalizarse a algunos sistemas dinámicos ordenados. Aquellos sistemas en que podemos definir una dirección en la que se recorren las órbitas, el objeto de volumen cero al que se contraen los volúmenes del espacio  $S$ , a medida que se recorren las órbitas que se inician en dicho volumen, forma la base del concepto de atractor. En términos más formales:

Tomemos un sistema dinámico  $\psi : G \times S \rightarrow S$  en el que los elementos del grupo  $G$  puedan ser bien ordenados. Un conjunto compacto  $X \subset S$  se llama un atractor si

- 1)  $\psi_t(X) \subset X$  para toda  $t > 0$ , esto es, las órbitas que pasan por puntos de  $X$  permanecen en  $X$  ó  $X$  es invariante ante  $\psi_t$ .
- 2) Existe una vecindad de  $X$ ,  $V \subset S$ , tal que  $\psi_t(V) \subset V$  ( $t > 0$ ) y  $X = \bigcap_{t > 0} \psi_t(V)$ , esto es, existe un volumen que se contrae a  $X$ .

- 3) Si  $U$  es un conjunto abierto tal que  $U \subset V$  y  $U \cap X \neq \emptyset$ , entonces existen elementos  $t$  de  $G$ , tan grandes como se quiera, tales que  $\psi_t(U) \cap X \neq \emptyset$ .

Esta última condición asegura que  $X$  es sólo el atractor y no un objeto mayor que contenga al atractor. Al conjunto abierto más grande de  $S$  que se contrae a un atractor se le llama la cuenca de dicho atractor; desde luego toda órbita que se inicie en un punto de la cuenca terminará en el atractor.

Este concepto de atractor no sólo adquiere una gran importancia en la teoría de sistemas dinámicos, sino también en su correspondencia física, pues podemos ver que corresponde a los conceptos de régimen estacionario y transitorio, esto es, en un sistema físico estudiado como sistema dinámico, los regímenes estacionarios serían los atractores y los conjuntos de condiciones iniciales que "después de un transitorio terminan" en el régimen estacionario serían las cuencas.

Dentro de la teoría de sistemas dinámicos el problema de la clasificación de los atractores adquiere una gran importancia, puesto que si logramos encontrar todas las formas topológicas que pueden tener dichos atractores y clasificarlas, habremos dado un gran paso en el estudio global de las órbitas de los sistemas dinámicos, además habremos encontrado y clasificado las propiedades cualitativas fundamentales de todos los regímenes estacionarios de sistemas físicos susceptibles de ser estudiados por medio de sistemas dinámicos. Desde luego hay que señalar que un mismo sistema dinámico puede tener más de un atractor, lo que abre el problema de encontrar cuáles tipos de atractores pueden existir en el mismo sistema y cuáles pueden ser las posibles fronteras entre sus cuencas.

H. Poincaré inició a principios de siglo estos estudios encontrando que para el caso  $G = \mathbb{R}$  y  $S = \mathbb{R}^2$  (equivalente a las ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas en dos dimensiones o de segundo orden), sólo pueden existir dos clases de atractores: un punto o una curva cerrada que no se intersecta a ella misma; en términos de ecuaciones diferenciales o regímenes estacionarios son, respectivamente, un punto crítico o equilibrio estable y un ciclo límite u oscilación periódica autosostenida. Posteriormente se vio que este mismo resultado es válido para el caso en que  $S$  es una variedad diferencial de dos dimensiones cualesquiera.

El mismo Poincaré inició el estudio para un mayor número de dimensiones y encontró que ya para el caso  $S = \mathbb{R}^3$  el problema de la clasificación de los atractores es sumamente complejo, e incluso en la actualidad es un problema abierto.

Otro problema relacionado con éste y de gran importancia surge al considerar no un sistema dinámico único sino una colección de éstos que depende de uno o varios parámetros, como puede ser una ecuación diferencial en la que se varían algunos de sus parámetros. Para algún valor de los parámetros el sistema dinámico correspondiente puede tener un cierto atractor. Al ir variando los parámetros este atractor conservará al principio su estructura o tipo topológico, pero llegando a ciertos valores de los parámetros puede ocurrir que este tipo topológico cambie; a este cambio se le llama bifurcación. En un fenómeno físico contemplaríamos esto como la transición de un régimen estacionario a otro, al pasar por valores críticos ciertos parámetros del sistema. Ahora bien, un tipo de atractor dado no puede bifurcarse a cualquier otro tipo, sino sólo a algunos de ellos. Al estudio de las posibles bifurcaciones le llamamos teoría de bifurcaciones.

Con respecto a la teoría de bifurcaciones ocurre algo similar; la teoría se encuentra bien desarrollada para el caso de las ecuaciones diferenciales en el plano<sup>(6)</sup> pero para otros casos la teoría es incipiente.

A pesar de que no se cuenta con una clasificación completa de los atractores siempre se había encontrado que éstos eran objetos matemáticos relativamente simples o comunes o "bien comportados": puntos, conjuntos finitos de puntos, curvos o variedades diferenciales. Por ejemplo, hay casos en que el atractor es la superficie de un toro, esto es, hay ecuaciones diferenciales en tres dimensiones en las que, independientemente de las condiciones iniciales, las soluciones tienden, después de un transitorio, a estar sobre la superficie de un toro en el espacio fase.

El que los atractores sean objetos "bien comportados" parece una situación natural y nadie esperaría encontrar atractores que no lo fueran; por ejemplo, parecería extraño encontrar al conjunto de Cantor\*

---

\* Los subconjuntos propios cerrados de un intervalo de los reales más ge-

como atractor de un sistema dinámico, siendo que éstos basan sus propiedades en las de continuidad y diferenciabilidad de los mapeos y espacios que intervienen en su definición.

Por otra parte, existen fenómenos naturales que, como la turbulencia en los fluidos o las arritmias en sistemas biológicos, a pesar de corresponder, según las teorías más aceptadas, a sistemas dinámicos tienen regímenes estacionarios sumamente complejos e irregulares que difícilmente podrían ser interpretados como correspondientes a un atractor bien comportado. Incluso muchos de estos casos son resultado de transiciones a partir de regímenes regulares (flujo laminar, soluciones periódicas, etc.) que corresponden a atractores normales. Hay que señalar que este tipo de fenómenos se cuenta entre los que han presentado mayores dificultades para ser entendidos, por lo que en muchos casos se ha tenido que recurrir, para explicar esos fenómenos, a la introducción de factores azarosos o estocásticos adicionales y ajenos al sistema dinámico que en princi-

---

nerales se obtienen al extraer de ese intervalo una clase ajena y contable de subintervalos abiertos. Un ejemplo de este proceso es el conjunto de Cantor que se construye de la siguiente manera<sup>(7)</sup>:

Tomamos el intervalo cerrado  $[0, 1]$  y lo denotamos por  $F_1$ . De  $F_1$  quitamos el intervalo abierto  $(1/3, 2/3)$ , es decir, quitamos el tercio central, al conjunto que se obtiene lo llamamos  $F_2$  y consiste de dos pedazos cerrados  $F_2 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ . Ahora formamos  $F_3$  quitándole a cada pedazo de  $F_2$  su tercio central, esto es, eliminamos de  $F_2$  los intervalos abiertos  $(1/9, 2/9)$  y  $(7/9, 8/9)$ . Este proceso puede ser continuado eliminando cada vez los tercios centrales de los pedazos que habían resultado en el paso anterior. Denotando por  $F_n$  el conjunto que se forma en el  $n$ -ésimo paso, se define el conjunto de Cantor como

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \quad .$$

Este conjunto tiene varias propiedades muy interesantes de las cuales señalamos que:

- i) La longitud total de los subintervalos que hemos extraído es uno, esto es, la misma longitud que tenía el intervalo inicial.
- ii) La cardinalidad del conjunto es la del continuo. Hay invariancia de la estructura con respecto a la escala, esto es, si observásemos el conjunto con una cierta resolución y aumentáramos, por cualquier factor, esta resolución, la estructura de puntos que veríamos sería indistinguible de la anterior y en apariencia sería irregular.



pio corresponde al sistema físico.

En los últimos años se han encontrado sistemas dinámicos que poseen atractores que no son "bien comportados", atractores que no son regulares, que tienen propiedades semejantes a los conjuntos de Cantor, en fin atractores que son objetos matemáticos complejos y que tienen muchas de las propiedades que le atribuimos a los fenómenos caóticos, irregulares y turbulentos, siendo a la vez producto de sistemas dinámicos deterministas. En muchos ejemplos, incluso, se ha visto como estos atractores se bifurcaron a partir de atractores normales. A estos atractores se les ha dado el nombre de atractores extraños.

Desde luego estos descubrimientos han abierto una nueva perspectiva en la teoría de los sistemas dinámicos y en el estudio de los fenómenos naturales complejos e irregulares.

En las siguientes secciones presentamos en forma resumida cuáles han sido estos descubrimientos y los resultados importantes obtenidos hasta la fecha en este nuevo tema de los atractores extraños.

### III. EL CASO $G = R$ , $S = R^n$

Este es el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias y desde luego ha jugado un papel central en el desarrollo de la teoría de sistemas dinámicos. Hace muchas décadas se sospechó la existencia de fenómenos complejos, pero fue en 1963 cuando se produjo el primer ejemplo claro de una ecuación diferencial con un atractor extraño.

Lorenz<sup>(8)</sup>, en 1963, interesado en el estudio de los flujos que se producen en un fluido calentado uniformemente por debajo y sujeto a la gravedad (problema clásico estudiado por Rayleigh y Bernard) produjo, después de una serie de aproximaciones, un modelo del sistema consistente en tres ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas o sea una ecuación diferencial en tres dimensiones:

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y \quad ,$$

$$\frac{dy}{dt} = -xz + rx - y \quad ,$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

Al linearizar estas ecuaciones se encuentra que, para valores de  $r < 1$ , el origen  $x = y = z = 0$ , que representa el régimen en que no hay convección, es un atractor; para valores mayores de  $r$  el origen se hace inestable, pero aparecen otros dos puntos críticos:  $x = y = \pm \sqrt{b(r-1)}$ ,  $z = r-1$  que representan regímenes de convección estacionaria, los cuales serán atractores para cualquier valor de  $r$  si  $\sigma < b+1$ , y para  $r < \sigma(\sigma + b + 3)(\sigma - b - 1)^{-1}$  si  $\sigma > b+1$ . Por tanto para valores de los parámetros tales que  $\sigma > b+1$  y  $r > \sigma(\sigma + b + 3)(\sigma - b - 1)^{-1}$  ninguno de los puntos críticos es estable y por tanto no serán atractores. En este último caso, en vista de que el flujo es una contracción, puede existir un atractor que no sea un punto crítico.

El análisis de este último caso se hizo encontrando soluciones numéricas en la computadora. Para los valores  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$  y  $r = 28$ , en la Fig. 1a se grafica la coordenada  $y$  como función del tiempo para una solución de esta ecuación de Lorenz con condiciones iniciales  $x = 0$ ,  $y = 1$ ,  $z = 0$  para las primeras 3000 iteraciones; como puede verse, después de un transitorio, que consiste en una oscilación cuya amplitud aumenta, se llega a un régimen en el cual la coordenada  $y$  cambia de signo y comienza a tener un comportamiento irregular.

En la Fig. 1b se muestra la proyección en el plano  $y - z$  de la solución a partir de la iteración 1400, como puede verse esta solución traza una espiral en torno al punto  $C'$  hasta el paso 1650 en el que cruza el plano  $x - z$ , da una vuelta en torno a  $C$  y cruza de nuevo el plano  $x - z$ , para después repetir una vez más este comportamiento. Si continuásemos la gráfica veríamos que ésta comienza a pasar de un lado a otro dando cada vez algunas vueltas en torno al punto  $C$  o  $C'$ , respectivamente; si ahora señalamos la secuencia de tiempos en que ocurren los cortes al plano  $x - z$ , veríamos que esta secuencia es irregular e incluso tendría la apariencia de una secuencia con componentes aleatorias; la secuencia formada por el número de vueltas que la solución da antes de saltar al otro lado tendría características similares.

Si comenzamos en otro punto inicial veríamos que pronto caeríamos en la misma situación y como necesariamente existe un atractor en la

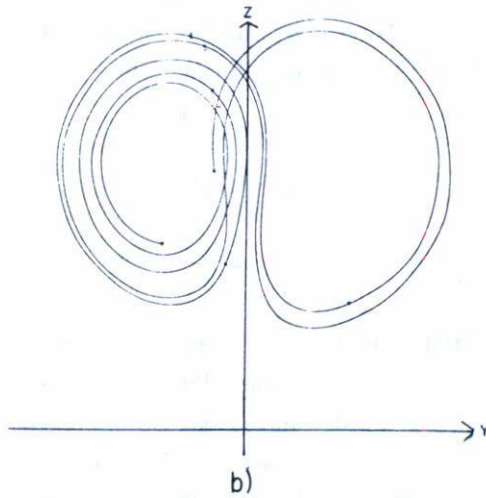
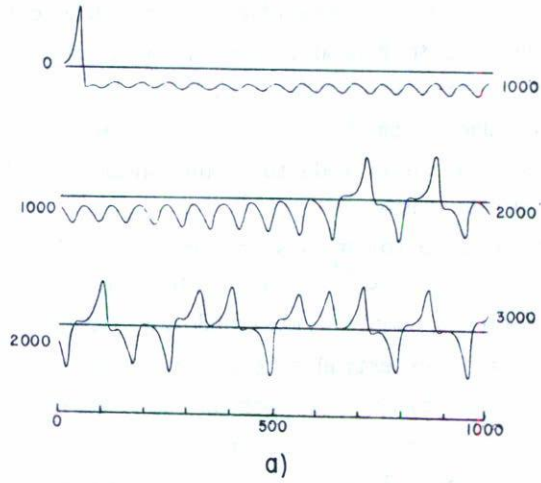


Fig. 1 Soluciones numéricas de la ecuación de Lorenz. Tomada de la Ref. 8.

región y los puntos de equilibrio no lo son, esta curva compleja es parte del atractor. En un principio se pensó que este atractor era una superficie, sin embargo no lo es. En realidad la curva debe estar contenida en un objeto que tenga cierto espesor, pues si nos fijásemos con detalle en los puntos en que el atractor cruza al plano  $x-z$ , veríamos que forman un conjunto con propiedades similares a las del conjunto de Cantor, lo que hace pensar que se trata del producto de una superficie de dos dimensiones por un conjunto de Cantor.

Este trabajo de Lorenz pasó desapercibido durante casi una década, hasta que Ruelle y Takens<sup>(9)</sup> en 1971 revivieron el problema de los atractores con comportamiento complejo, mostrando que siempre existen ecuaciones diferenciales con atractores extraños cercanas a aquellas que se definen en el toro de cuatro o más dimensiones por un campo vectorial constante.

A partir de entonces se han presentado una gran variedad de ejemplos de ecuaciones diferenciales con atractores que no son variedades diferenciales o puntos<sup>(10)</sup>.

#### IV. CASO $G = Z$ y $S = R^n$

Los sistemas dinámicos definidos sobre el grupo de los enteros son equivalentes a la iteración de un mapeo de  $S$  en sí mismo, ya que debido a la propiedad b) de la definición tenemos

$$\begin{aligned}\psi_2 &= \psi_{1+1} = \psi \circ \psi = \psi^{(2)} & , \\ \psi_3 &= \psi_{2+1} = \psi_2 \circ \psi = \psi^{(3)} & , \\ \psi_n &= \psi_{n-1+1} = \psi_{n-1} \circ \psi = \psi^{(n)} & .\end{aligned}$$

Por lo tanto el estudio de estos sistemas dinámicos se reduce al estudio de las iteraciones de un mapeo generador. La órbita que pasa por el punto  $x \in S$  será la colección de puntos que se obtienen al aplicar iterativamente el mapeo generador a este punto. Una órbita consistente de un número finito de puntos será periódica, pues una vez recorridos todos la siguiente iteración retornará la órbita al punto inicial; el periodo será el número de puntos de que consta la órbita en cuestión.

El estudio de esta clase de sistemas dinámicos no sólo tiene un interés matemático. Hay muchos fenómenos naturales que se prestan a ser modelados por estos sistemas, por ejemplo la población de una planta anual que depende solamente de la población de la generación anterior. Por otra parte, muchas de las propiedades de las ecuaciones diferenciales pueden ser estudiadas por medio de una técnica debida a Poincaré<sup>(5)</sup> consistente en cortar transversalmente el flujo de la ecuación diferencial con un plano de una dimensión menor que la dimensión del espacio fase. Ahora, si tomamos puntos de esta transversal al flujo, las órbitas que pasan por ellos, después de cierto tiempo, darán la vuelta por el espacio fase y cortarán de nuevo a la transversal, de tal forma que podemos definir un mapeo de la transversal en sí misma. Las propiedades de las iteraciones de este mapeo estarán íntimamente relacionadas con las propiedades de las órbitas de la ecuación diferencial; por ejemplo, si el mapeo al iterarse tiene un atractor, la ecuación diferencial tendrá también uno, y sus propiedades serán similares. Vemos pues que el estudio de los atractores de estos sistemas dinámicos es importante por sí y porque está íntimamente relacionado con la teoría de atractores en las ecuaciones diferenciales.

El primer ejemplo que presentamos es debido a Henon<sup>(11)</sup>: un mapeo de  $R^2$  en  $R^2$  que al iterarlo produce un atractor. El mapeo está definido por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\psi} \begin{pmatrix} y + 1 - ax^2 \\ bx \end{pmatrix} ,$$

el mapeo inverso es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\psi^{-1}} \begin{pmatrix} b^{-1}y \\ x - 1 + ab^{-2}y^2 \end{pmatrix} .$$

Presentaremos los resultados de los estudios numéricos hechos sobre las iteraciones de este mapeo.

Los valores de los parámetros  $a$  y  $b$  que se escogen son  $b = 0.3$  y  $a$  será variable.

Para  $a$  menor que 0.1225 o mayor que 1.55 después de un cierto número de iteraciones la órbita parece irse al infinito independientemente del punto inicial, mostrándose así la ausencia de atractores.

Para  $a$  mayor que 0.1225 y menor que 0.3675 hay un atractor consistente en una órbita de periodo uno o punto fijo.

A medida que el valor de  $a$  aumenta a partir de 0.3675 hay atractores que consisten en órbitas periódicas, pero el periodo aumenta por la existencia de una cascada de bifurcaciones en la que en cada paso se duplica el periodo del atractor; periodo que por este proceso tiende a infinito para un valor de  $a$  cercano a 1.06.

Para valores de  $a$  mayores que 1.06 y menores que 1.55 hay un atractor que posee propiedades extrañas. A continuación se describen los resultados de iterar el mapeo para el valor  $a = 1.44$ .

Los resultados presentados en la Fig. 2 se obtienen por el siguiente procedimiento: Tomamos un punto inicial cualquiera en el plano  $x-y$ , lo marcamos en el papel y le aplicamos el mapeo, el punto resultante lo marcamos en el papel y le aplicamos el mapeo y así sucesivamente; después de un gran número de iteraciones los puntos que hemos marcado generan las figuras mostradas.

La Fig. 2a se obtiene al considerar el origen como punto inicial y después de haber iterado diez mil veces. La Fig. 2b se obtiene al iniciar en el punto (0.63135448, 0.18940634) e iterar otras diez mil veces. Podemos observar que, con excepción de las primeras seis o siete iteraciones, la "curva" que se genera es prácticamente la misma; como ésta ocurre para otros puntos iniciales, podemos decir que esta "curva" es un atractor. Hay que señalar que la "curva" no se recorre ordenadamente, en cada iteración se salta de un sitio a otro y los huecos que se observan se irán eliminando a medida que se tomen más iteraciones.

La estructura transversal a la "curva" parece simple en esta figura, esto es, la "curva" parece tener unos cuantos dobleces. Sin embargo esto no es así, en la Fig. 2c se presenta la región marcada con un cuadrado en la Fig. 2b ampliada y, después de cien mil iteraciones, podemos ver que el número de componentes de la "curva" es en realidad mayor de lo que veíamos en la Fig. 2b; en la Fig. 2d se ve la región marcada en la Fig. 2c nuevamente ampliada y, para un millón de iteraciones, vemos que

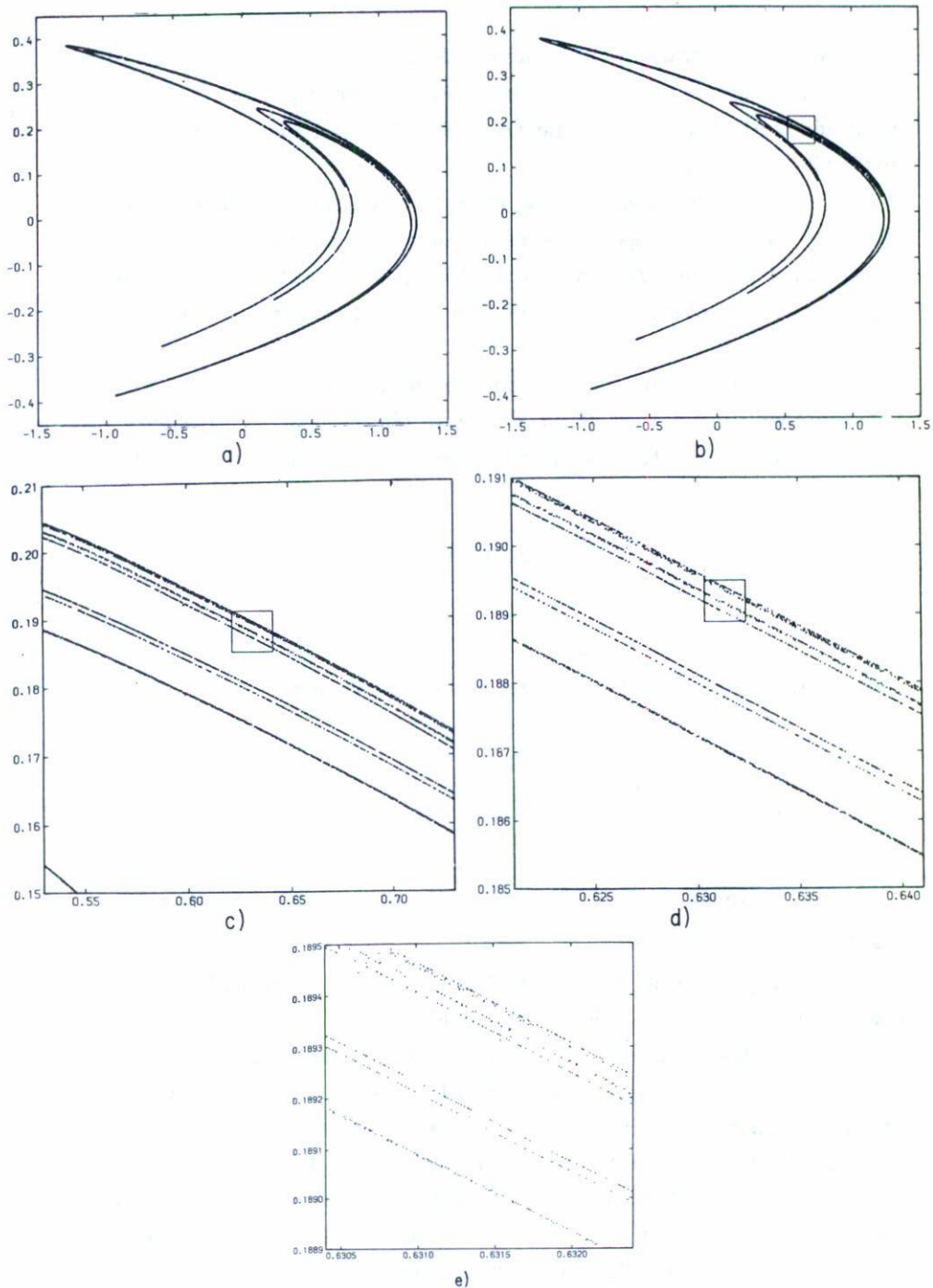


Fig. 2 Iteraciones del mapeo de Henon. Tomada de la Ref. 11.

las componentes eran en realidad más de las que podíamos ver en el nivel de amplificación anterior; en la Fig. 2e se repite el proceso de amplificación y el resultado se muestra para cinco millones de iteraciones repitiéndose el fenómeno.

Este procedimiento, de poderse continuar, mostraría que en realidad el número de componentes es infinito. Además el hecho de que las Figs. 2c, d y e muestren un aspecto totalmente similar en cada nivel de amplificación continuaría repitiéndose tal y como ocurre con un conjunto de Cantor.

Otro ejemplo interesante fue encontrado por Curry y Yorke<sup>(12)</sup>. Consideremos el mapeo de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  que se obtiene por el siguiente proceso:

En primer término usamos coordenadas polares  $(\rho, \theta)$  y definimos el mapeo

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix} \xrightarrow{\psi_1} \begin{pmatrix} \varepsilon \ln(1 + \rho) \\ \theta + 2 \end{pmatrix},$$

posteriormente en coordenadas cartesianas definimos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\psi_2} \begin{pmatrix} x \\ y + x^2 \end{pmatrix}.$$

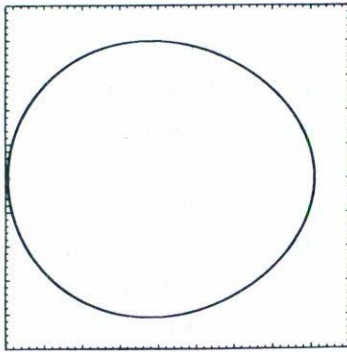
El mapeo de Curry y Yorke es la composición de estos dos,

$$\psi = \psi_2 \circ \psi_1.$$

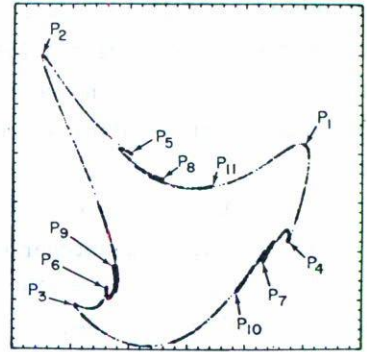
Siguiendo un método totalmente análogo al seguido en el caso anterior se obtienen las imágenes de la Fig. 3.

Quando el parámetro  $\varepsilon$  vale uno el origen es un atractor, a medida que  $\varepsilon$  crece se bifurca, a partir del origen, un atractor consistente en una figura homeomorfa al círculo, como se ve en la Fig. 3a. Esta curva crece en diámetro hasta que se llega al valor 1.28, de ahí en adelante, hasta  $\varepsilon \approx 1.3953$ , el atractor es una órbita de periodo tres, o sea tres puntos que se recorren en sucesión a medida que se itera. Después de este valor reaparece una "curva" cerrada, pero en este caso tiene una serie de cúspides, como muestra la Fig. 3b para  $\varepsilon = 1.45$ , habiendo en realidad

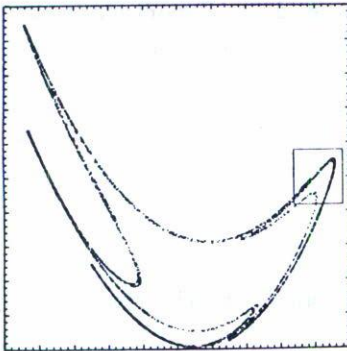




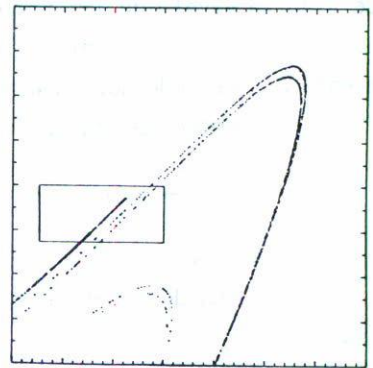
a)



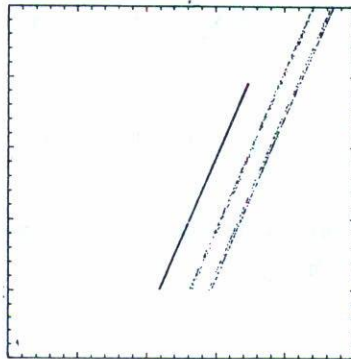
b)



c)



d)



e)

Fig. 3 Iteraciones del mapeo de Curry y Yorke. Tomada de la Ref. 12.

un número infinito de ellas a lo largo de la "curva". Estas cúspides se van haciendo cada vez más largas y pegadas a la "curva promedio", de tal forma que la "curva" no será ya homeomorfa al círculo y tendrá en realidad una longitud infinita, recordando algunas propiedades de los fractales.

Cuando  $\epsilon$  vale 1.63 la figura se rompe en componentes, pero para  $\epsilon = 1.7$  se vuelve a obtener una figura conexa, como se muestra en la Fig. 3c, la cual al ampliarla, en la misma forma que en el caso de Henon, nos da las Figs. 3d y 3e, que muestran nuevamente la estructura similar a la de un conjunto de Cantor.

Una situación más simple ocurre cuando el espacio fase se reduce a un intervalo de los reales. Este caso además de su importancia propia nos permite ilustrar el fenómeno conocido como bifurcaciones de doblamiento del periodo que ya hemos encontrado anteriormente.

Tomemos un mapeo del intervalo  $[0,1]$  en sí mismo:

$$x \xrightarrow{\psi} \psi(x) \quad , \quad x \in [0,1] \quad ,$$

y  $\psi$  tal que  $0 \leq \psi(x) \leq 1$ .

Para describir las iteraciones de este mapeo utilizaremos la notación:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= \psi(x_i) \\ x_{i+2} &= \psi(x_{i+1}) = \psi\left(\psi(x_i)\right) = \psi^{(2)}(x_i) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ x_{i+n} &= \psi(x_{i+n-1}) = \psi\left(\psi^{(n-1)}(x_i)\right) = \psi^{(n)}(x_i) \quad . \end{aligned}$$

Un punto fijo de  $\psi$ , o sea una órbita periódica de periodo uno, será un punto solución de la ecuación

$$x = \psi(x) \quad ,$$

esto es, un punto en que la gráfica de  $x_{i+1}$  contra  $x_i$  corta la recta inclinada a  $45^\circ$  (ver Fig. 4a). Estos puntos fijos se llaman estables si al iterar  $\psi$  comenzando en un punto cercano a él, la sucesión de puntos que

obtenemos converge al punto fijo, esto es, si se trata de un sistema dinámico sería un atractor. Es fácil ver que un punto fijo es estable si y sólo si el valor de la derivada de  $F$  valuada en el punto está en el intervalo  $(-1, 1)$ .

Una órbita periódica de periodo  $n$  ocurre cuando al iterar, comenzando en un cierto punto, regresamos a él después de  $n$  iteraciones. Es claro que existirá una órbita periódica cuando la ecuación

$$x = \psi^{(n)}(x)$$

tenga solución; por supuesto tendrá entonces  $n$  soluciones, comprendiendo a los  $n$  puntos que forman la órbita periódica. De la misma forma que ocurre para un punto fijo, la órbita periódica será estable o sería un atractor si y sólo si la derivada de  $\psi^{(n)}$ , valuada en los puntos de esa órbita, está en el intervalo  $(-1, 1)$ . Es fácil ver que el valor de esta derivada es el mismo en todos los puntos de la órbita periódica.

Ahora supongamos que tenemos un mapeo  $\psi_\beta$  que depende de un parámetro  $\beta$  y que tiene un punto fijo  $x_\beta$ , entonces

$$x_\beta = \psi_\beta(x_\beta) \quad ,$$

y por tanto

$$x_\beta = \psi_\beta^{(2)}(x_\beta) \quad ,$$

o sea,  $x_\beta$  es también punto fijo de la segunda iteración; en general lo será de la  $n$ ésima.

La derivada de la segunda iteración valuada en el punto fijo será

$$\left. \frac{d\psi_\beta^{(2)}}{dx} \right|_{x_\beta} = \left. \frac{d\psi_\beta}{dx} \right|_{\psi_\beta(x_\beta)} \times \left. \frac{d\psi_\beta}{dx} \right|_{x_\beta} = \left( \left. \frac{d\psi_\beta}{dx} \right|_{x_\beta} \right)^2$$

Si el punto fijo  $x_\beta$  es estable, al variar el parámetro  $\beta$  puede llegarse a un valor crítico  $\beta_c$  donde se pierde la estabilidad al hacerse la derivada del mapeo valuada en el punto fijo menor que menos uno, entonces necesariamente la derivada de la segunda iteración valuada en el pun-

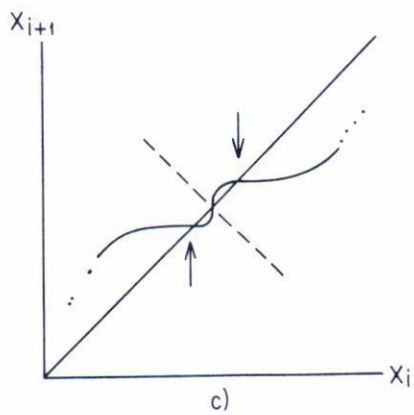
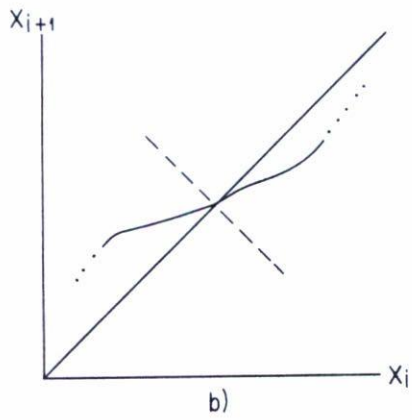
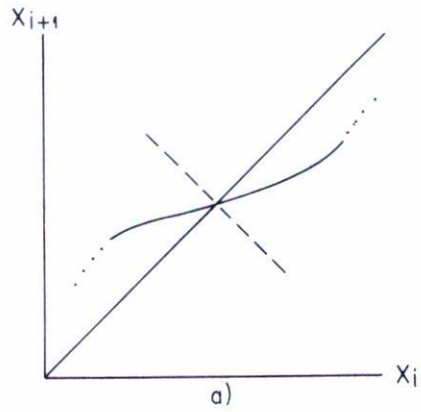


Fig. 4 Proceso de generación de la bifurcación por doblamiento del periodo.

to fijo pasará de ser menor que uno a ser mayor que uno, esto es, la tangente a la curva que representa a la segunda iteración al ir rotando pasará por 45 grados y como se ve claramente en las Figs. 4b y c, en las que se muestra este proceso, esto genera dos puntos fijos nuevos de la segunda iteración, que no lo son de la primera; esto es una órbita de periodo dos. Además esta órbita es estable, al menos en un rango de valores de  $\beta$  a partir de  $\beta_c$ .

Desde el punto de vista de los sistemas dinámicos un punto fijo estable es un atractor y uno inestable no lo es, por tanto desde este punto de vista tendríamos, al pasar  $\beta$  por el valor  $\beta_c$ , la destrucción de un atractor de periodo uno y la simultánea creación de un atractor de periodo dos. A este fenómeno se le ha llamado bifurcación por doblamiento del periodo.

Es posible que al continuar variando el parámetro los puntos fijos estables de  $\psi^{(2)}$ , esto es el atractor de periodo dos, se desestabilice por medio del mismo mecanismo que desestabilizó al punto fijo de  $\psi$ , dando por tanto lugar a cuatro puntos fijos estables de  $\psi^{(4)}$ , o sea la desaparición del atractor de periodo dos y la creación simultánea de un nuevo atractor consistente en una órbita de periodo cuatro. Este proceso puede volver a ocurrir y de hecho lo puede hacer un número infinito de veces, dando lugar a una cascada de bifurcaciones en las que cada vez desaparece un atractor periódico y aparece simultáneamente otro con periodo doble del periodo del que desaparecería; si los valores del parámetro en los que ocurren las bifurcaciones convergen, se llegará a un límite cuando el periodo del atractor se haga infinito y por tanto a la posible aparición de un atractor extraño.

Este fenómeno lo hemos encontrado ya en el caso del mapeo de Henon y ocurre también en otros muchos y en las ecuaciones diferenciales, aunque hay que señalar que en estos casos el fenómeno es más difícil de entender que en el caso simple de una dimensión.

En una dimensión un mapeo sumamente estudiado<sup>(13)</sup> es

$$x \xrightarrow{\psi_\beta} \beta x (1 - x) \quad ,$$

el que, para  $\beta$  en el intervalo  $[0,4]$ , es un mapeo del intervalo  $[0,1]$  en

sí mismo\*.

Para  $\beta \in [0,1]$ ,  $x = 0$  es un atractor global de periodo uno. Para  $\beta \in (1,3]$ ,  $x = 1 - \beta^{-1}$  es un atractor de periodo uno cuya cuenca incluye todos los valores de  $x$  con excepción de cero y uno.

Para  $\beta \in (3, 1 + \sqrt{6})$  hay dos puntos fijos estables del mapeo  $\psi^{(2)}$  o atractor de periodo dos, cuya cuenca cubre el intervalo  $(0,1)$  con excepción de un número contable de puntos.

A partir del valor  $\beta = 1 + \sqrt{6}$  se desencadena una cascada de bifurcaciones por doblamiento del periodo que tiene como valor límite aproximadamente  $\beta = 3.57$ .

Para valores mayores de  $\beta$  se obtienen ciclos de varios periodos pares, pero estos ciclos son ruidosos, en el sentido de que son ciclos formados por pequeñas regiones y no por puntos. También hay un número incontable de punto. que tienden a atractores totalmente aperiódicos, es decir, hay atractores totalmente aperiódicos o caóticos, y simultáneamente atractores formados por ciclos ruidosos; las cuencas de estos atractores son no contables y se entremezclan en formas muy complejas.

Al continuar incrementando el valor de  $\beta$  se llega al punto en el que aparecen atractores globales de periodos impares y en  $\beta \approx 3.8284$  hay un atractor de periodo tres. Posteriormente van apareciendo atractores periódicos para cualquier periodicidad, así como atractores caóticos o totalmente aperiódicos. La dificultad de distinguir, con cálculos numéricos, entre un atractor periódico de periodo muy largo y uno aperiódico o caótico y la existencia de cuencas de atractores que, a pesar de ser conjuntos de puntos no numerables, tienen medida cero, hace necesarias las investigaciones analíticas de estos casos, las que, debido a su gran complejidad, están hasta la fecha en sus etapas iniciales. En este sentido un resultado importante fue obtenido por Li y Yorke<sup>(14)</sup> y dice:

Tomemos un mapeo continuo del intervalo  $I$  en sí mismo,

$$F : I \longrightarrow I \quad ,$$

---

\* Debido a que este mapeo no es invertible, para que sus iteraciones generen un sistema dinámico, debemos generalizar la definición que presentamos anteriormente, pues no tiene sentido sobre los enteros negativos y los enteros no negativos no forman grupo.

tal que exista un punto  $a \in I$  que, al denotar por  $b = F(a)$ ,  $c = F^{(2)}(a)$  y  $d = F^{(3)}(a)$ , se cumpla

$$d \leq a < b < c \quad \text{o} \quad d \geq a > b > c \quad .$$

Entonces

- 1) Existen órbitas periódicas de cualquier periodo entero.
- 2) Existe un conjunto no numerable  $\delta \subset I$  que no contiene ninguna órbita periódica y además para toda  $P$  y  $q \in \delta$  con  $P \neq q$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| F^{(n)}(P) - F^{(n)}(q) \right| > 0$$

$$\text{y } \liminf_{n \rightarrow \infty} \left| F^{(n)}(P) - F^{(n)}(q) \right| = 0 \quad ;$$

también para todo punto  $P \in \delta$  y punto  $\ell$  perteneciente a una órbita periódica

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| F^{(n)}(P) - F^{(n)}(\ell) \right| > 0 \quad .$$

Este resultado indica en particular la existencia de órbitas totalmente aperiódicas cuando se cumplen las condiciones del teorema.

Otro caso que ha adquirido gran importancia en el estudio de los osciladores no lineales forzados es el de los mapeos del círculo en sí mismo<sup>(15)</sup>. Estos mapeos generan los sistemas dinámicos para el caso en que  $G$  son los enteros o enteros positivos\* y  $S$  es el círculo.

Por su importancia en el estudio de las ecuaciones diferenciales sobre el toro, estos mapeos fueron estudiados hace tiempo para el caso en que son continuos y monótonos<sup>(16)</sup>. En este caso no se presenta el fenómeno de los atractores extraños, siendo éstos siempre órbitas periódicas o cuasiperiódicas.

En el caso en que los mapeos no son continuos o no son monóto-

---

\* Debido a que este mapeo no es invertible, para que sus iteraciones generen un sistema dinámico, debemos generalizar la definición que presentamos anteriormente, pues no tiene sentido sobre los enteros negativos y los enteros no negativos no forman grupo.

nos, caso que ocurre en el estudio de los osciladores no lineales forzados, se presentan los fenómenos de cascada de bifurcaciones por doblamiento del periodo, atractores extraños y coexistencia de dos o más atractores de diferente periodo con cuencas entremezcladas en forma compleja, lo que nos muestra la existencia de estos fenómenos en las ecuaciones diferenciales correspondientes<sup>(17)</sup>.

## V. CONCLUSIONES

En los incisos anteriores hemos visto varios ejemplos de sistemas dinámicos con atractores extraños, así como una descripción de las formas en que éstos se bifurcan a partir de atractores comunes.

La existencia de estos atractores abre la puerta a la explicación determinista de los fenómenos irregulares sin hacer uso de factores azarosos. Entre éstos la turbulencia es quizá el ejemplo que más se ha utilizado para hacer ver la importancia de estos estudios matemáticos.

Debemos decir que estas aplicaciones están también relacionadas con una forma atípica de utilizar las matemáticas en la física, pues, en la mayoría de los casos no se parte de ecuaciones derivadas de teorías en torno al fenómeno a explicar, sino de ecuaciones que muestran la existencia de objetos matemáticos que se comportan en forma análoga al sistema físico aun cuando estas ecuaciones no tengan una conexión con la teoría del fenómeno.

Esta forma de estudio muestra la existencia de posibles explicaciones, lo que en los casos de fenómenos complejos es ya un avance, pero desde un punto de vista más estricto no habremos dado una explicación real si no ligamos de alguna forma el fenómeno con las ecuaciones de que se trate.

Con respecto a la problemática anterior se han descubierto algunas propiedades universales de las iteraciones de los mapeos del intervalo en sí mismo<sup>(18)</sup>. Estos resultados nos dicen que entre los mapeos del intervalo en sí mismo con un solo máximo, esto es, que tienen la forma mostrada en la Fig. 5; la propiedad de presentar, al variar un parámetro, una cascada de bifurcaciones con doblamiento del periodo que culmina en un atractor aperiódico es genérica. Además, si llamamos  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots$



a los valores del parámetro cuando ocurren estas bifurcaciones y  $Z$  al orden del máximo, entonces

$$|\beta_n - \beta_\infty| \propto \delta^{-n} \quad (n \gg 1),$$

donde

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_{n+1} - \beta_n}{\beta_{n+2} - \beta_{n+1}}$$

y el número  $\delta$  sólo depende de  $Z$ , esto es, será independiente de la forma global del mapeo. Para  $Z = 0$ , que es el caso genérico, ya que un extremo de orden mayor se destruye con la más pequeña perturbación,  $\delta$  vale 4.6692016...

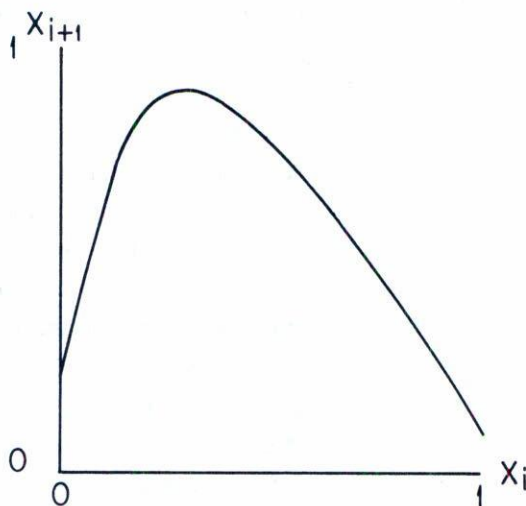


Fig. 5 Mapeo del intervalo en sí mismo con un solo máximo.

Otra propiedad de estos mapeos se obtiene al considerar el espaciado entre los dos puntos pertenecientes al ciclo en la bifurcación  $n$ -ésima más cercanos al punto en que se encuentra el máximo del mapeo, ya que si llamamos  $d_n$  a este espaciado, el número  $\alpha$  definido por

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{n+1}}{d_n}$$

depende sólo de  $Z$ ; y para  $Z = 2$ ,  $\alpha = 2.50229078\dots$

Este tipo de resultados se han extendido al caso de iteración de mapeos en más de una dimensión y como éstos pueden representar mapeos de Poincaré de flujos correspondientes a ecuaciones diferenciales, estas últimas tendrían las mismas propiedades.

Como decíamos, el hecho de haberse encontrado propiedades y números universales, esto es, que son válidos para una gran variedad de sistemas dinámicos independientemente de sus detalles, asociados con la presencia de atractores extraños, da nuevas pautas en el estudio de fenómenos complejos, puesto que si en el estudio experimental de algún fenómeno de esta naturaleza encontramos la presencia de alguna de estas propiedades o números universales, tendremos razones muy fuertes para pensar que el fenómeno se debe a la presencia de un atractor extraño, aun cuando no se tenga un desarrollo matemático detallado de una teoría física que así lo indique.

En esta dirección recientemente se han realizado experimentos<sup>(19)</sup> en el establecimiento de flujos turbulentos que muestran, en forma aún preliminar, la presencia de estas propiedades universales, lo que hace sospechar, cada vez con mayor razón, que asociado a la turbulencia se encuentran los fenómenos que hemos llamado atractores extraños.

La existencia de estos atractores extraños ha abierto un gran número de preguntas entre las que destacamos las consistentes en la búsqueda de métodos para distinguir entre un fenómeno realmente azaroso y uno en el que se presenta uno de estos atractores<sup>(20)</sup>. Por otra parte, la importancia de estos descubrimientos permite decir que éste será un campo de intensa investigación tanto teórica como experimental en el que, además de su importancia propia, se permite recuperar la estrecha vinculación entre el desarrollo de la frontera de la física teórica y las matemáticas.

#### REFERENCIAS

1. Lefschetz, S., Differential Equations: Geometric Theory, Interscience, N.Y. (1963).
2. Hirsch, M. y Smale, S., Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra, Academic Press, N.Y. (1970).

3. Markley, N.G. et al. editores, "The Structure of Attractors in Dynamical Systems", Lecture Notes in Mathematics Vol. 668, Springer Berlin (1978).
4. Small, S., Bull. Am. Math. Soc. 73 (1967) 747-817.
5. Poincaré, H., J. de Math., 7 (1881) 375-442.
6. Andronov, A.A. et al., "Theory of Bifurcations of Dynamical Systems On A Plane", Traducciones de la N.A.S.A. TT F-556, Nat. Tech. Infor. Serv., Springfield.
7. Simmons, G., Introduction to Topology and Modern Analysis, McGraw-Hill, N.Y. (1963).
8. Lorenz, E.N., J. Atmos. Sci. 20 (1963) 130-141.
9. Ruelle D. y Takens F., Commun. Math. Phys. 20 (1976) 167-192.
10. Rossler, O.E., Phys. Lett. 57A (1976) 397-398; Vyshkind, S.Y. y Rabinovich, M.I., Sov. Phys. JETP 44 (1976) 292; Shimzu, T. y N. Morioda, Phys. Lett. 69A (1978) 148; Yorke, J.A. y Yorke, E.D., J. Stat. Phys. 21 (1979) 263; Kaplan, J.L. y Yorke, J.A., Commun. Math. Phys. 67 (1979) 93.
11. Henon, M., Commun. Math. Phys. 50 (1976) 69; Hu, B., J. Phys. A 14 (1981) 423.
12. Curry, J.H. y Yorke, J.A. en Ref. 3.
13. May, R.M., Nature 256 (1975) 165; May, R.M., Nature 261 (1976) 459; Derrida, A., Gervois, A. y Pomeau, Y., J. Phys. A 12 (1979) 269; Guckenheimer, J., Commun. Math. Phys. 70 (1979) 133.
14. Li, T.Y. y Yorke, J.A., Am. Math. Mon. 82 (1975) 985.
15. Cartwright, M.L. y Littlewood, J.E., J. Lond. Math. Soc. 20 (1946) 1980; Levinson, N., Annals of Math. 50 (1949) 127; Grasman, J. et al., Siam J. Appl. Math. 31 (1976) 667; Guckenheimer, J., Physica Ld, 227 (1980).
16. Rosenberg, H., Seminaire Bourbaki 28 e 1975/76, 476.
17. Glass, L. y Mackey, J., J. Math. Biol. 7 (1979) 339; Keener, J., Trans. Am. Math. Soc. 261 (1980) 589; Pérez R. y Glass, L. (Preprint) (1982); Glass, L. y R. Pérez (Preprint) (1982).
18. Feigenbaum, M.J., J. Stat. Phys. 19 (1978) 25; Feigenbaum, M.J., Phys. Lett. A 74 (1979) 375; Feigenbaum, M.J., Commun. Math. Phys. 77 (1980) 65.
19. Swinner, H.L. y J.P. Gollub, Phys. Today 31 (1978) 41; Fenstermacher, P.R. et al., J. Fluid Mechn. 94 (1979) 103; Maurer J. y Libchaber, A., J. de Phys. Lett. 40 (1979) L419; Donnelly, R.J. et al., Phys. Rev. Lett. 44 (1980) 987.
20. Blacher, S. y Per Dang, J. Physica 3D (1981) 512; Froehling, H. et al., Physica 3D (1981) 605; Jensen, R.V. y Oberman, C.R., Physica 4D (1982) 183.