

UNA INTRODUCCION A LOS CAMPOS DE NORMA CUANTIZADOS

Jesús Urias

Instituto de Física

Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

San Luis Potosí, S.L.P., México

(recibido septiembre 4, 1981; aceptado diciembre 4, 1981)

RESUMEN

Las características más importantes (v.g., problemas de cuantización, identidades de Ward y de Taylor-Slavnov, etc.) de las teorías de campos de norma cuantizados son ilustradas utilizando un método diagramático.

Después de presentar lo que es una teoría de campos de norma, se discuten los problemas de la cuantización del campo electromagnético en la electrodinámica cuántica (QED), como ejemplo de una teoría de norma abeliana. Se muestra que aunque el esquema de cuantización no es único, los elementos de la matriz S si están definidos de manera única. Una consecuencia de esto son las identidades de Ward, que son derivadas diagramáticamente.

En el caso no abeliano, es inevitable la introducción de campos auxiliares en la teoría (para los cuales no se definen estados asintóticos) de manera que los elementos de la matriz S sean independientes del esquema de cuantización.

Finalmente se muestran los principios básicos del llamado mecanismo de Higgs (inevitable en cualquier teoría unificada) y las identidades de Taylor-Slavnov son derivadas diagramáticamente.

ABSTRACT

The main features of quantum gauge fields (e.g., difficulties in quantizing a gauge theory, Ward and Taylor-Slavnov identities, etc.) are illustrated by using a diagrammatic technique.

After a general presentation of what a gauge theory is, the problems in quantizing the electromagnetic field in quantum electrodynamics (QED) are discussed, as example of an abelian gauge theory. It is shown that the quantizing scheme is not unique, but the S-matrix elements are uniquely defined. Generalized Ward identities are then derived, diagrammatically.

For the non-abelian case quantization of gauge fields can only be done with the help of some ad-hoc fields (having no asymptotic states) as to make the S-matrix independent of the quantization scheme.

Finally, the main concepts at the basis of the so-called Higgs mechanism (essential for any unified theory) are illustrated and the Taylor-Slavnov identities are diagrammatically derived.

INTRODUCCION

Las teorías de norma fueron inventadas en 1954 por C.N. Yang y R.L. Mills⁽¹⁾, pero permanecieron casi ignoradas durante quince años debido a dos problemas difíciles de resolver: no se sabía cómo cuantizar los campos de norma y, si eran cuantizables, no se sabía como llevar a cabo la renormalización de la teoría.

En 1971 fueron resueltos los dos problemas. El primero lo resolvieron L.S. Fadeev y U.N. Popov⁽²⁾, y el segundo lo resolvió G. 'tHooft⁽³⁾.

Una vez resueltos ambos problemas, se desencadenó una gran actividad alrededor de las teorías de norma durante la década de los setentas⁽³⁻⁹⁾. Los esfuerzos de esta actividad culminaron en el establecimiento de las teorías de norma como un nuevo paradigma en la física de las partículas elementales.

La década de los ochentas se inicia con una gran fe en las teorías de norma como clave para la descripción de los hadrones y la gran unificación de todas las interacciones (no deja sin embargo de preocupar que el número de quarks vaya aumentando con los años).

Un efecto secundario de la actividad de los setentas es el abandono del formalismo canónico en teoría del campo (operadores de campo, reglas de conmutación, método LSZ, etc.) en favor del formalismo funcional basado

en las integrales sobre trayectorias. Esto ocurrió por lo poderoso que se mostró el formalismo funcional en la cuantización de los campos de norma⁽²⁾, en la derivación de identidades entre diferentes funciones de Green que llevan los nombres de J.C. Taylor y A.A. Slavnov, etc.

Sin embargo, cualquiera que sea el formalismo utilizado, al final de cuentas los elementos de la matriz S son calculados mediante un conjunto adecuado de diagramas de Feynman.

En el presente artículo hacemos énfasis en el uso de los diagramas de Feynman, sin mencionar los formalismos canónicos ni funcional. El hacer esto creemos que es ventajoso por las siguientes razones: Por una parte, es posible establecer una sólida relación entre los formalismos canónico y funcional con los diagramas de Feynman, otorgando así a estos últimos el poderoso arsenal de las transformaciones canónicas. Por otra parte, el método de regularización dimensional, que es el más sencillo y eficiente para teorías de norma, es aplicable solamente a los diagramas de Feynman y, a la fecha, nadie sabe como incorporar el método de regularización dimensional ya sea al formalismo canónico o al formalismo funcional.

Finalmente, los diagramas de Feynman están conectados directamente con modernos métodos electrónicos de cómputo.

Para entender el contenido del presente artículo es necesario estar familiarizado con los diagramas de Feynman. Saber, por ejemplo, escribir en forma diagramática las ecuaciones de Dyson para los propagadores del electrón y fotón y para el vértice electrón-fotón en QED; entender, también en QED, la invariancia de norma y poder extraer directamente del lagrangiano las reglas para construir diagramas de Feynman en diferentes esquemas de cuantización (i.e., en diferentes normas), al menos en los dos más populares: los de Landau y Feynman.

Una excelente (excepto por la métrica adoptada) introducción a la teoría del campo desde el punto de vista de los diagramas de Feynman son las notas de G. 't Hooft y M. Veltman publicadas por CERN (diagrammar)⁽⁹⁾. La vía canónica para derivar y representar diagramáticamente las ecuaciones de Dyson en QED puede encontrarse en el segundo de los libros de Bjorken y Drell⁽¹⁰⁾.

A lo largo del texto, especialmente en la sección dedicada al mecanismo de Higgs⁽⁴⁾, se hace referencia extensa al curso "Continuons

Symmetries" impartido por el autor en la Escuela de Verano en Física de Altas Energías realizada en la Universidad Autónoma de San Luis Potosí en 1978. Las notas (con todos los cursos de la Escuela de Verano) aparecerán en breve publicadas por el CINVESTAV⁽¹¹⁾ y en el presente artículo son referidas como SC.

1. EL CAMPO DE YANG-MILLS

En 1954 Yang y Mills⁽¹⁾ dieron a conocer un método para crear interacciones. El método se basa en la posibilidad de construir lagrangianos que son invariantes ante un grupo de transformaciones en las que los parámetros del grupo son funciones arbitrarias de x_μ , las coordenadas espacio-temporales.

La electrodinámica cuántica (QED) es un ejemplo de una teoría de Yang-Mills abeliana. QED es definida por el lagrangiano⁽¹⁰⁾.

$$L_{\text{QED}} = \bar{\psi} (i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}, \quad (1)$$

donde $\psi(x)$ es un campo de Dirac, $\not{D} = \gamma_\mu D^\mu$,

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \quad (2)$$

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (3)$$

y A_μ es el campo del fotón.

L_{QED} es no sólo invariante ante la transformación

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha} \psi; \quad \alpha = \text{cte.}, \quad (4)$$

sino que es invariante ante la transformación más general

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha(x)} \psi; \quad A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x). \quad (5)$$

Las transformaciones con $\alpha = \text{cte.}$ son llamadas transformaciones globales de norma o transformaciones de norma del primer tipo. Las transformaciones con $\alpha = \alpha(x)$ son llamadas transformaciones locales de norma o transformaciones de gauge del segundo tipo.

Al verificar la invariancia de L_{QED} ante las transformaciones locales de norma (Ec. (5)) observamos que

$$D_\mu \psi \rightarrow (D_\mu \psi)' = e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi. \quad (6)$$

$D_\mu \psi$ se transforma covariantemente, i.e., en la misma forma que ψ , de manera que $\bar{\psi} D_\mu \psi$ es invariante. Al operador D_μ (Ec. (2)) se le llama por esta razón derivada covariante. $f_{\mu\nu}$ (Ec. (3)) es invariante por sí mismo:

$$f_{\mu\nu} \rightarrow f_{\mu\nu} + \frac{1}{e} [\bar{\partial}_\mu \partial_\nu \alpha(x) - \partial_\nu \bar{\partial}_\mu \alpha(x)] = f_{\mu\nu} . \quad (7)$$

Si conociéramos sólo el lagrangiano libre de Dirac,

$$L_0 = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi , \quad (8)$$

que es invariante ante transformaciones globales (Ec. (4) con $\alpha = \text{cte.}$), podemos reinventar la QED extendiendo la invariancia de L_0 a transformaciones locales con $\alpha = \alpha(x)$. L_0 obviamente no es invariante pues $\partial_\mu \psi$ deja de transformarse como ψ , y $\bar{\psi} \not{\partial} \psi$ no es invariante. Para hacer $\bar{\psi} \not{\partial} \psi$ invariante debemos introducir al campo electromagnético transformándose según (5) y hacer la sustitución

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \quad (9)$$

en L_0 (Ec. (8)). Finalmente introducimos la parte libre para el campo del fotón.

Siguiendo estos mismos pasos podemos construir una teoría que sea invariante ante transformaciones locales de norma no-abelianas. Sea $L(\phi)$ invariante ante un grupo G de transformaciones de los campos

$$\phi(x) \rightarrow U\phi(x) = e^{i\alpha_i \lambda^i} \phi(x) , \quad (10)$$

con $\alpha_i = \text{cte.}$ Para obtener un lagrangiano invariante ante G local definimos una derivada covariante

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - igA_\mu)\phi , \quad (11)$$

de manera que ante transformaciones (Ec. (10)) con $\alpha_i = \alpha_i(x)$:

$$D_\mu \phi \rightarrow (D_\mu \phi)' = U(x) D_\mu \phi . \quad (12)$$

La Ec. (12) define las propiedades de transformación de A_μ . Reemplazando (11) en (12)

$$(\partial_\mu - igA'_\mu)U(x)\phi = U(x)(\partial_\mu - igA_\mu)\phi ,$$

y haciendo álgebra

$$\left(\partial_{\mu} U(x) \right) \phi + igU(x)A_{\mu} \phi = igA'_{\mu} U(x) \phi \quad .$$

Puesto que esta ecuación debe ser satisfecha para ϕ arbitraria, obtenemos

$$A'_{\mu} = U(x)A_{\mu} U(x)^{-1} - \frac{i}{g} \left(\partial_{\mu} U(x) \right) U^{-1}(x) \quad . \quad (13)$$

Esto significa que A_{μ} debe ser una matriz en el espacio de la representación R de las ϕ de G .

Si $UA_{\mu}U^{-1} \neq A_{\mu}$, la forma más general para $A_{\mu}(x)$ es

$$A_{\mu} \equiv \lambda^i A_{\mu}^i \quad , \quad (14)$$

donde λ^i son los generadores de G en la representación provista por las ϕ_i .

Si A_{μ} se transforma según (13), efectuando la sustitución mínima

$$\partial_{\mu} \rightarrow D_{\mu} = \partial_{\mu} - igA_{\mu} \quad (15)$$

en $L(\phi)$, obtenemos un lagrangiano, $L(\phi, D_{\mu}\phi)$, invariante ante transformaciones de norma locales. $L(\phi, D_{\mu}\phi)$ contiene los nuevos bosones de gauge A_{μ} y nuevos términos de interacción. Si $L(\phi, \partial_{\mu}\phi)$ contiene derivadas únicamente en la parte cuadrática en los campos ϕ (parte libre de $L(\phi)$), entonces los nuevos términos de interacción son un polinomio en g cuando más de orden g^2 . Los nuevos vértices de primer orden en g son generados por

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial L(\phi, D_{\mu}\phi)}{\partial A_{\mu}^i} \right|_{A_{\mu}^i = 0} &= \frac{\partial L(\phi, D_{\mu}\phi)}{\partial D_{\nu}\phi} \frac{\partial D_{\nu}\phi}{\partial A_{\mu}^i} \Bigg|_{A=0} = A_{\mu}^i = \\ &= \frac{L(\phi, \partial_{\mu}\phi)}{\partial \partial_{\mu}\phi} \left(-ig\lambda^i \phi \right) A_{\mu}^i = gj_{\mu}^i A_{\mu}^i \quad . \quad (16) \end{aligned}$$

Los nuevos campos de norma se acoplan, al primer orden en g , a las viejas corrientes $j_{\mu}^i(x)$ (Ec. (1.46) de SC)⁽¹¹⁾. Sin embargo, estas corrientes $j_{\mu}^i(x)$ no están más conservadas. Las nuevas corrientes de Noether, que resultan de $L(\phi, D_{\mu}\phi)$, incluyen términos en $A_{\mu}(x)$.

Si los campos $\phi(x)$ son campos de Dirac, $L(\phi, D_{\mu}\phi)$ difiere de $L(\phi, \partial_{\mu}\phi)$ únicamente por el término de interacción (16). En este caso, y si la teoría es abeliana, $j_{\mu}(x)$ si está conservada (ver más adelante, don-

de se incluye la parte libre para $A_\mu(x)$.

2. UNA ECUACION DE MOVIMIENTO PARA $A_\mu(x)$.

En $L(\phi, D_\mu \phi)$ los campos de norma deben considerarse como campos externos conocidos. Para tratar $A_\mu(x)$ como un campo interno, i.e., incluir diagramas en que propagadores de A_μ^i aparezcan en bucles, es necesario tener una ecuación de movimiento para $A_\mu(x)$. Esto quiere decir que a $L(\phi, D_\mu \phi)$ hay que añadir una parte "libre" cuadrática en $A_\mu(x)$, sin romper la invariancia local de norma.

De aquí en adelante, consideraremos sólo transformaciones infinitesimales que, de las Ecs. (10) y (15), son de la forma

$$\delta A_\mu = i \left[\alpha^i(x) \lambda^i, A_\mu(x) \right] + \frac{1}{g} \partial_\mu (\alpha^i(x) \lambda^i) \quad . \quad (17)$$

Como un primer intento dispongamos que la parte libre es igual a la que aparece en L_{QED} con $f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ (Ec. (1)). Ante una transformación infinitesimal $f_{\mu\nu}$ cambia por la cantidad

$$\delta f_{\mu\nu} = i \left[\alpha^i(x) \lambda^i, f_{\mu\nu} \right] + i \left[\partial_\mu (\alpha^i \lambda^i), A_\nu \right] - i \left[\partial_\nu (\alpha^i \lambda^i), A_\mu \right] \quad . \quad (18)$$

Si no fuera por los dos últimos conmutadores en la Ec. (18) $f_{\mu\nu}$ se transformaría covariantemente y $f_{\mu\nu}$ sería la elección correcta para construir la parte libre de $A_\mu(x)$. Para obtener una expresión covariante debemos añadir a $f_{\mu\nu}$ un nuevo término que se transforme de manera tal que cancele los términos indeseables en Ec. (18). El término necesario, de orden 2, es (A_μ, A_ν) . Ante una transformación infinitesimal

$$\begin{aligned} \delta \left[A_\mu(x), A_\nu(x) \right] &= \left[A_\mu(x), \delta A_\nu(x) \right] + \left[\delta A_\mu(x), A_\nu(x) \right] = \\ &= i \left[\left[\alpha^i \lambda^i, A_\mu \right], A_\nu \right] - i \left[\left[\alpha^i \lambda^i, A_\nu \right], A_\mu \right] + \\ &+ \frac{1}{g} \left[\partial_\mu (\alpha^i \lambda^i), A_\nu \right] - \frac{1}{g} \left[\partial_\nu (\alpha^i \lambda^i), A_\mu \right] \quad . \end{aligned} \quad (19)$$

Usando la identidad de Jacobi

$$\left(\left[\lambda^i, A_\mu \right], A_\nu \right) + \left(\left[A_\mu, A_\nu \right], \lambda^i \right) + \left(\left[A_\nu, \lambda^i \right], A_\mu \right) = 0$$

(19) se transforma en

$$\delta \left(A_\mu(x), A_\nu(x) \right) = i \left(\alpha^i \lambda^i, \left[A_\mu, A_\nu \right] \right) + \frac{1}{g} \left(\partial_\mu (\alpha^i \lambda^i), A_\nu \right) - \frac{1}{g} \left(\partial_\nu (\alpha^i \lambda^i), A_\mu \right) \quad (20)$$

Comparando Ecs. (18) y (20) vemos que la expresión

$$F_{\mu\nu} \equiv f_{\mu\nu} - ig \left(A_\mu, A_\nu \right) \quad (21)$$

se transforma covariantemente, i.e.,

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = U(x) F_{\mu\nu} U^{-1}(x) \quad (22)$$

de manera que

$$\text{Tr} F_{\mu\nu} F^{i\nu} \text{ es invariante.}$$

El tensor $F_{\mu\nu}$ (Ec. (21)) es una matriz en la representación de G proporcionada por los $\phi(x)$. Hay otra forma frecuente de presentar a $F_{\mu\nu}$. Usando la definición (Ec. (14)) y el álgebra de los generadores

$$\left[\lambda^i, \lambda^j \right] = i C_{ijk} \lambda^k \quad , \quad (23)$$

la Ec. (21) es

$$F_{\mu\nu} = \lambda^i \left(\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g C_{ijk} A_\mu^j A_\nu^k \right) \quad .$$

De aquí definimos

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g C_{ijk} A_\mu^j A_\nu^k \quad . \quad (24)$$

El lagrangiano completo para un campo de Yang-Mills acoplado al conjunto de campos $\phi(x)$ es

$$L_{\text{YM}} = L(\phi, D_\mu \phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu} \quad (25)$$

Nótese que a diferencia de QED (teoría abeliana) el segundo término en la derecha de (25) incluye términos de interacción entre los bosones de norma (ver Ec. (24)), requeridos por la invariancia L_{YM} ante transformaciones

locales de norma. Debido a esos términos de interacción, no existe una teoría de Yang-Mills no-abeliana completamente libre. La única característica en común con QED es que los bosones de norma siguen siendo de masa nula.

Aunque de (25) obtenemos una ecuación de movimiento para $A^i(x)$, su cuantización presenta los mismos problemas que la cuantización del campo electromagnético en QED, sólo que a un grado de complicación mayor. Al igual que para el fotón, el operador en la parte cuadrática en $A_\mu^i(x)$ de L_{YM} (ver Ecs. (1.1) y (1.11b) de SC) es proporcional a $g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu$ que se comporta como un operador de proyección y no tiene por lo tanto inverso con el cual construir el propagador de $A_\mu^i(x)$. Cualquier contribución de la forma $\partial_\mu \Lambda^i(x)$ en $A_\mu^i(x)$ es proyectada fuera de juego por el operador $g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu$. Esto significa que los campos $A_\mu^i(x)$ no están completamente determinados por las ecuaciones de movimiento y que hay contribuciones a los $A_\mu^i(x)$ que podemos fijar ad libitum, sin que esto tenga repercusiones en la matriz S, construida a partir de L_{YM} (una vez que sepamos cómo cuantizar $A_\mu^i(x)$). Por el momento el lagrangiano L_{YM} es inútil pues no podemos calcular con él hasta que encontremos la forma de cuantizar $A_\mu(x)$, i.e., definir su propagador. Para obtener experiencia para tratar el caso no-abeliano primero revisaremos la cuantización del campo electromagnético.

3. PRIMER EJEMPLO: CUANTIZACION DEL CAMPO ELECTROMAGNETICO.

3.1 Caso Libre.

Para poder cuantizar el campo electromagnético debemos determinar, aunque sea parcialmente, las componentes longitudinales de $A_\mu(x)$ que son de la forma $\partial_\mu \Lambda(x)$. Esto significa que debemos fijar una norma. Para esto, consideraremos el lagrangiano

$$L_1 = -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu)^2 = \frac{1}{2} A^\alpha \left(-g_{\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\mu + \partial_\beta \partial_\alpha - \frac{1}{\xi} \partial_\alpha \partial_\beta \right) A^\beta$$

$$\equiv \frac{1}{2} A^\alpha W_{\alpha\beta} A^\beta .$$

De esta forma W no es singular y el propagador del fotón es

$$\text{---}\mu \text{---}\nu \text{---} = i\tilde{W}_{\mu\nu}^{-1} = \frac{i}{q^2} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} (1-\xi) \right) . \quad (27)$$

Con el nuevo término introducido obtenemos una teoría bien definida, pero debemos asegurarnos que su contenido físico sea el mismo que el de las ecuaciones de Maxwell. Lo que debemos hacer es comprobar que el nuevo término en ξ sólo afecta a las componentes longitudinales de A_μ que son de la forma $\partial_\mu \Lambda$, es decir, que la matriz S construida a partir de (26) sea independiente de ξ . Para seguirle la pista a las componentes $\partial_\mu \Lambda(x)$ de $A_\mu(x)$ introducimos un campo escalar real, $b(x)$, libre y de masa cero:

$$L_2 = \frac{1}{2} A_\mu W_{\mu\nu} A_\nu + \frac{1}{2} (\partial_\mu b(x))^2 \quad , \quad (28)$$

y hacemos la transformación

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \epsilon \partial_\mu b(x) \quad , \quad (29)$$

donde ϵ es un parámetro arbitrario de dimensión - 1

$$L_2 \rightarrow L_3 = L_2 + \epsilon A^\mu W_{\mu\nu} \partial^\nu b(x) + \frac{\epsilon^2}{2} (\partial_\mu b) W_{\mu\nu} (\partial_\mu b) \quad . \quad (30)$$

De L_3 obtenemos las siguientes reglas de Feynman:

$$\text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} = \frac{1}{q^2} \quad (31a)$$

$$\begin{matrix} \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} \\ \mu \end{matrix} \begin{matrix} \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} \\ \nu \end{matrix} = - \epsilon \tilde{W}_{\mu\nu} q^\nu \quad (31b)$$

$$\text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} = i \epsilon^2 \tilde{W}_{\mu\nu} q^\mu q^\nu \quad (31c)$$

junto con la Ec. (27). Vamos a demostrar que a pesar de la transformación (29) el campo $b(x)$ sigue siendo libre, tal que la matriz S , que en este caso es simplemente la unidad, es independiente de ϵ .

La clave para esto está en que

$$\text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} + \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} = 0, \quad (32)$$

pues en el vértice (31b) $\tilde{W}_{\mu\nu}$ se cancela con el propagador del fotón (Ec. (27)) dejando un factor i y el vértice $\text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---}$ lleva el signo opuesto al vértice (31b) (el momento q fluye en dirección opuesta). Los propagadores completos los calculamos mediante las ecuaciones de Dyson:

$$\text{---}\bigcirc\text{---} = \text{---} + \text{---}\bigcirc\text{---} \quad (33a)$$

$$\text{---}\bigcirc\text{---} = \text{---}\bigcirc\text{---} + \text{---}\times\text{---}\bigcirc\text{---} \quad (33b)$$

$$\text{---}\bigcirc\text{---} = \text{---} + \text{---}\bigcirc\text{---} + \text{---}\times\text{---}\bigcirc\text{---} + \text{---}\times\text{---} \quad (33c)$$

En este caso sencillo las ecuaciones de Dyson son ecuaciones algebraicas lineales de las cuales podemos despejar

$$\text{---}\bigcirc\text{---} = \text{---} = \epsilon \frac{q^\mu}{q^2} \quad (34a)$$

$$\text{---}\bigcirc\text{---} = \text{---} = \frac{i}{q^2} \quad (34b)$$

$$\text{---}\bigcirc\text{---} = \frac{i}{q^2} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} (1 - \xi + \epsilon^2) \right) \quad (34c)$$

La Ec. (34b) muestra que, a pesar de la transformación (29), el campo $b(x)$ sigue siendo libre, es decir, que la propagación de las componentes físicas de $A_\mu(x)$ no son afectadas por $b(x)$ y son por lo tanto independientes de ϵ . El efecto de $b(x)$ sobre el propagador de A_μ es equivalente a modificar el valor del parámetro de norma $\xi \rightarrow \xi - \epsilon^2$. Por lo tanto, si la matriz S es independiente de ϵ , pues $b(x)$ está desacoplado de A_μ , también es independiente de ξ .

3.2 QED

Los resultados anteriores siguen siendo válidos si el campo A_μ es acoplado a un campo de Dirac $\psi(x)$ mediante la sustitución mínima (Ec. (2)):

$$L_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi + \frac{1}{2} A_\mu W_{\mu\nu} A_\nu \quad (35)$$

De nuevo, para seguirle la pista a las componentes $\partial_\mu A_\nu$ de A_μ , introducimos el campo libre $b(x)$ y efectuamos la transformación de A_μ (Ec. (29)) y la transformación

$$\psi(x) \rightarrow e^{ieEb(x)} \psi(x). \quad (36)$$

Puesto que el primer término de L_{QED} (Ec. (35)) es invariante ante transformaciones locales de norma, los vértices en ϵ son los mismos que en el caso

libre (Ec. (31)). El único vértice nuevo es

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} = ie\gamma_{\mu} \tag{37a}$$

y el propagador para :

$$\text{---} \cdot \text{---} = \frac{i}{\not{p}-m} \tag{37b}$$

Para mostrar que $b(x)$ sigue siendo un campo libre a pesar de las transformaciones que aparecen en las Ecs. (29) y (36) calculamos su propagador completo. Las ecuaciones de Dyson son:

$$\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \tag{38a}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \tag{38b}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \tag{38c}$$

Estas ecuaciones difieren de la Ec. (33) únicamente por el último diagrama a la derecha de (38a). Este nuevo diagrama no modifica los resultados obtenidos para $b(x)$ (Ecs. (34a) y (34b)). Los efectos de este diagrama sobre el propagador de $b(x)$ se cancelan debido a que

$$q \rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array} = e\epsilon \not{q} \tag{39}$$

donde $\not{q} = \gamma_{\mu} q^{\mu}$.

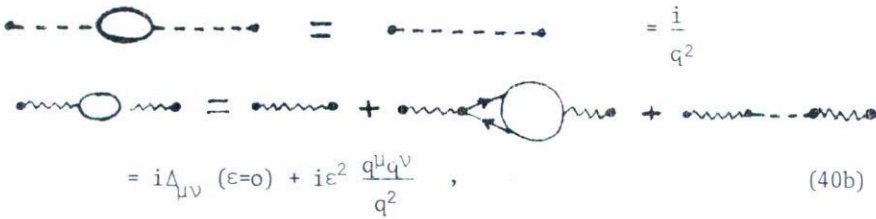
Sustituyendo (38a) en (38b) y usando la Ec. (32) obtenemos

$$\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \tag{40}$$

Debido a la Ec. (39) el último diagrama a la derecha de (40) es cero:

$$\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} = 0$$

La demostración de que esta figura es cero puede encontrarse en Bjorken & Drell (II) (p.p. 197-200)⁽¹⁰⁾. La Ec. (40) se reduce a la Ec. (34a) del caso libre. Sustituyendo (34a) en (38a) y (38c) obtenemos:



$$= i\Delta_{\mu\nu}(\epsilon=0) + i\epsilon^2 \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}, \quad (40b)$$

siendo $\Delta_{\mu\nu}(\epsilon=0)$ el propagador completo del fotón que resulta de (35).

Los resultados son los mismos que en el caso libre: el campo $b(x)$ sigue siendo un campo libre de manera que los elementos de la matriz S son independientes de ϵ . El efecto de $b(x)$ en el propagador del fotón es equivalente a un cambio en el parámetro ξ .

En conclusión, la adición del término

$$\frac{1}{2} C^2 = -\frac{1}{2\xi} (\partial \cdot A)^2$$

en L_{QED} (Ec. (1)) nos permite definir un propagador para A_μ (i.e., cuantizar el campo electromagnético) y la matriz S construida mediante L_{QED} (Ec. (35)) es independiente del parámetro de norma ξ .

4. IDENTIDADES DE WARD EN QED.

La invariancia de norma de L_{QED} implica relaciones entre diferentes funciones de Green, que son las identidades de Ward. A diferencia de las identidades de Ward quirales (ver SC), las identidades de Ward en QED son válidas para cualquier valor del momento de una línea del campo $b(x)$.

Para construir funciones de Green, añadimos a L_{QED} (Ec. (35)) términos de fuentes⁽⁹⁻¹¹⁾.

$$L = L_{\text{QED}} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + j_\mu A_\mu. \quad (41)$$

Las identidades de Ward se obtienen mediante una transformación infinitesimal de gauge de los campos:

$$\delta A_\mu = \epsilon \partial_\mu b(x), \quad (42a)$$

$$\delta \psi = i\epsilon b(x)\psi. \quad (42b)$$

Ante esta transformación, al primer orden en ϵ ,

$$L \rightarrow L' = L + \epsilon \Lambda_{\mu} W_{\mu\nu} \partial_{\nu} b(x) + ie\epsilon b(x) \bar{\eta}\psi - ie\epsilon b(x) \bar{\psi}\eta + \epsilon j_{\mu} \partial_{\mu} b(x). \quad (43)$$

Las reglas de Feynman necesarias para derivar las identidades de Ward son

- Términos de fuentes de orden cero en ϵ :

$$\overrightarrow{p} \quad \begin{array}{c} \times \\ \rightarrow \end{array} = i\eta(p) \qquad \overleftarrow{p} \quad \begin{array}{c} \times \\ \leftarrow \end{array} = i\bar{\eta}(p) \quad (44a)$$

$$\begin{array}{c} \times \\ \sim \end{array} = ij_{\mu} \quad (44b)$$

- Términos de fuentes de orden uno en ϵ :

$$\begin{array}{c} \times \\ \nearrow \\ \searrow \end{array} = e \epsilon \eta(p) \quad ; \quad \begin{array}{c} \times \\ \nwarrow \\ \swarrow \end{array} = -e\epsilon \bar{\eta}(p) \quad (45a)$$

$$\begin{array}{c} \times \\ \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} = \epsilon q^{\mu} j_{\mu} \quad (45b)$$

- Término de interacción de orden uno en ϵ :

$$\begin{array}{c} \times \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \sim \end{array} = -\epsilon W_{\mu\nu} q^{\nu} \quad (46)$$

Las identidades de Ward resultan del hecho que $b(x)$ es un campo libre. Cualquier función de Green que tenga una línea de $b(x)$ externa debe ser ce ro; diagramáticamente

$$\begin{array}{c} \times \\ \nearrow \\ \circ \\ \searrow \\ \times \end{array} = 0 \quad (47)$$

donde las líneas continuas pueden ser líneas de fermión o líneas de fotón y en cualquier número.

Puesto que la transformación efectuada (Ec.(42)) fue del primer orden en ϵ , en (47) debemos considerar sólo diagramas del primer orden en ϵ . De las Reglas de Feynman (45) y (46) encontramos que (47) al primer orden en ϵ es

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \times \\ \nearrow \\ \circ \\ \searrow \\ \times \end{array} + \begin{array}{c} \times \\ \nearrow \\ \circ \\ \searrow \\ \times \end{array} + \begin{array}{c} \times \\ \nearrow \\ \circ \\ \searrow \\ \times \end{array} + \dots + \begin{array}{c} \times \\ \nearrow \\ \circ \\ \searrow \\ \times \end{array} + \\ + \begin{array}{c} \times \\ \nearrow \\ \circ \\ \searrow \\ \times \end{array} + \begin{array}{c} \times \\ \nearrow \\ \circ \\ \searrow \\ \times \end{array} + \dots + \begin{array}{c} \times \\ \nearrow \\ \circ \\ \searrow \\ \times \end{array} = 0 \quad (48) \end{array}$$

Los últimos tres diagramas desconectados en (48) ocurren solamente en el caso que las fuentes sean de fotones. Para fuentes de fermiones no existen estos diagramas desconectados.

La Ec. (48) son las identidades de Ward. Como primer ejemplo consideremos la función de Green más sencilla que contiene sólo un fotón como línea externa (además de la línea $b(x)$). Al primer orden en ϵ

$$\text{---} \bigcirc \text{---} \times = \text{---} \text{---} \bigcirc \text{---} \times + \text{---} \times + \bigcirc \text{---} \times \quad (49)$$

El último término a la derecha de (49) es cero, pues $\langle A_\mu \rangle = 0$. La identidad de Ward es entonces

$$\text{---} \text{---} \bigcirc \text{---} \times + \text{---} \times = \bigcirc \quad (50)$$

Esta identidad, al orden cero en ϵ , es

$$\text{---} \text{---} \bigcirc \text{---} \times + \text{---} \times = 0,$$

que es muy fácil de verificar usando (45b) y (46). Definimos el propagador completo del fotón como

$$i\Delta_{\mu\nu}(q) = \text{---} \bigcirc \text{---} \quad (51)$$

Usando esta definición y las reglas de Feynman (45b) y (46) la identidad de Ward (50) se escribe

$$\epsilon q^\nu \tilde{W}_{\nu\mu} i\Delta_{\mu\nu}(q) i j^\nu + \epsilon q^\mu j_\mu = 0, \quad (52)$$

donde $\tilde{W}_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} q^2 + q_\mu q_\nu \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)$ (c.f. Ec. (27)).

Como la función de fuente es arbitraria, la Ec. (52) puede escribirse como

$$q^\mu \Delta_{\mu\nu}(q) = -q_\nu \frac{\xi}{q^2} \quad (53)$$

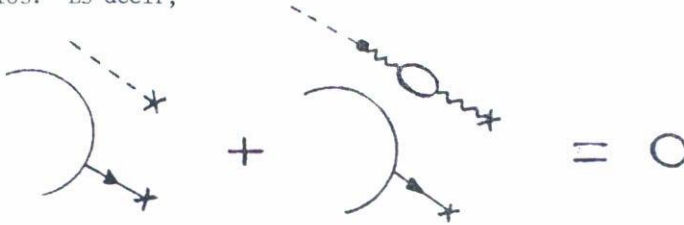
Comparando con (27):

$$q^\mu \Delta_{\mu\nu}(q) = q^\mu W_{\mu\nu}^{-1}(q). \quad (54)$$

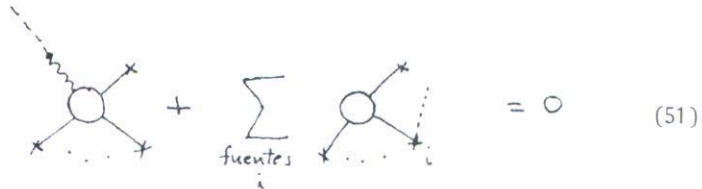
La Ec. (54) dice que la parte longitudinal del propagador completo es igual a la parte longitudinal del propagador libre. En otras palabras, la parte longitudinal de A_μ no es tocada por las interacciones y se propaga libremente. Este resultado ya lo habíamos obtenido en la sección anterior (ver la Ec. (40b)).

Usando la identidad de Ward (50) en la identidad (48) vemos que

los diagramas desconectados los podemos olvidar, pues se cancelan entre ellos. Es decir,

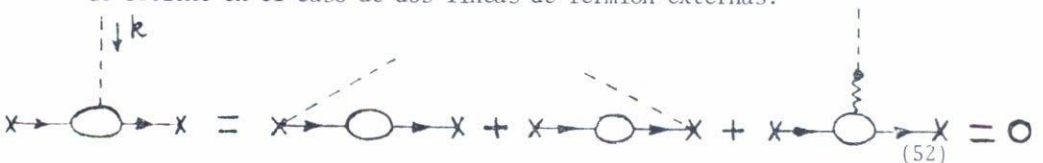


Entonces, si incluimos únicamente diagramas conectados, la identidad (48) se simplifica a



Es interesante observar las semejanzas entre los bosones de Goldstone y la componente longitudinal del campo electromagnético. Ambos son de masa cero y satisfacen identidades de Ward análogas (compare (51) con (4.60b) de SC). Al igual que el campo del pión en el modelo $-\sigma$ (c.f. SC), la componente longitudinal de A_μ se mezcla con los parámetros del grupo a través del vértice (46). La diferencia entre los bosones de Goldstone y la componente longitudinal del fotón resulta de que en los primeros la simetría es global y para los segundos es local. Como consecuencia de esto las identidades de Ward quirales (c.f. SC) son válidas únicamente en el límite $q \rightarrow 0$, mientras que las identidades de Ward en QED son válidas para cualquier valor q_μ . De esta manera, en vez de teorema de Goldstone, la Ec. (53) nos dice que la componente longitudinal de A_μ se propaga libremente y no tiene por lo tanto ninguna realidad física. (ver también la Ec. (4.62) de SC).

Otra identidad de Ward, muy útil en la renormalización de QED⁽¹⁰⁾, se obtiene en el caso de dos líneas de fermión externas:



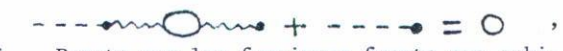
Para transcribir (52) a una expresión matemática definimos

$$\begin{array}{c} \vec{p} \rightarrow \\ \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} \bullet \\ \rightarrow \end{array} = iS(p) \tag{53a}$$

$$\begin{array}{c} \vec{k} \\ \uparrow \\ \bigcirc \\ \swarrow \quad \searrow \\ \vec{p} \quad \bullet \end{array} = iS(p+k) \Gamma_\mu(p+k,p) iS(p), \tag{53b}$$

donde Γ_μ es el vértice electromagnético irreducible en una partícula. Usando las definiciones (53) y las reglas de Feynman (44)-(46), la Ec. (52) se escribe

$$\begin{aligned} & i\bar{n}(p+k) iS(p+k) e\epsilon n(p) - e\epsilon \bar{n}(p+k) iS(p) i n(p) + \\ & + i\bar{n}(p+k) iS(p+k) \Gamma_\mu(p+k,p) iS(p) i n(p) i\epsilon k^\mu = 0, \end{aligned} \tag{54}$$

en donde usamos la identidad , i.e., Ec. (50) sin la fuente j_μ . Puesto que las funciones fuente son arbitrarias, podemos omitirlas y escribir (54) en la forma

$$k_\mu \Gamma_\mu(p+k,p) = ie \left[S^{-1}(p+k) - S^{-1}(p) \right]. \tag{55}$$

Esta es la identidad de Ward usual. La Ec. (55) puede ser verificada orden por orden en teoría de perturbaciones. Usando la Ec. (37) es evidente que la identidad (55) es satisfecha al primer orden en e .

Es un buen ejercicio verificar que la identidad

$$\begin{array}{c} \text{---} \bigcirc \text{---} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \times \quad \times \end{array} = 0$$

al orden 2 en e ,

$$\begin{array}{c} \text{---} \bigcirc \text{---} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \times \quad \times \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \bigcirc \text{---} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \times \quad \times \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \bigcirc \text{---} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \times \quad \times \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \bigcirc \text{---} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \times \quad \times \end{array} = 0$$

es satisfecha.

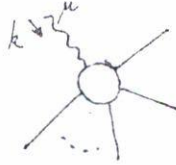
Si en lugar de funciones de Green consideramos solamente amplitudes, la identidad (51) se reduce a

$$\begin{array}{c} \vec{k} \\ \uparrow \\ \bigcirc \\ \swarrow \quad \searrow \\ \times \quad \times \end{array} = 0, \tag{56}$$

y en virtud de la identidad (50) la identidad (56) se escribe

$$k_{\mu} M^{\mu} = 0,$$

donde M^{μ} es la amplitud



5. CUANTIZACION DEL CAMPO DE YANG-MILLS NO-ABELIANO.

Para cuantizar el campo electromagnético en QED es necesario introducir en L las componentes longitudinales de A_{μ} que permitan definir un propagador para el fotón. Al hacerlo, debemos asegurarnos que las componentes longitudinales se propaguen libremente, de manera que no modifiquen el contenido físico de la teoría. Al estar completamente desacoplados, las componentes longitudinales de A_{μ} no tienen ninguna realidad física. De hecho, la identidad de Ward en QED, $q^{\mu} \Delta_{\mu\nu} = q^{\mu} W_{\mu\nu}^{-1}$ (Ec. (54)), muestra efectivamente que no hay interacción de la parte longitudinal de A_{μ} con el resto de sus componentes ni con los otros campos.

La incorporación de la componente longitudinal de A_{μ} puede hacerse en QED de una manera relativamente sencilla debido a que los fotones tienen carga eléctrica cero, es decir, no hay acoplamiento entre fotones en L_{QED} . La forma en que se transforma el campo del fotón ante transformaciones de norma,

$$A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} + \partial_{\mu} \alpha(x),$$

muestra que sólo la parte longitudinal de A_{μ} se mezcla con los parámetros del grupo y las componentes transversales no son modificadas por las transformaciones de norma. Por esto el término $-(\partial \cdot A)^2 / 2\xi$ en L_{QED} no modifica el contenido físico de la teoría.

Para los campos de Yang-Mills no-abelianos la situación es muy distinta, pues los parámetros del grupo se mezclan con todas las componentes de A_{μ}^i (ver la Ec. (17)), de manera que, si introducimos en L las componentes longitudinales de A_{μ}^i , necesariamente se van a acoplar con las componentes transversales de A_{μ}^i , modificando el contenido físico de la teoría.


En la actualidad, el único método que existe para cuantizar los campos de Yang-Mills no abelianos es el siguiente:


- (1) Introduzca en L un término $-\frac{1}{2\xi} C^2(A_\mu)$ que ponga en juego a las componentes longitudinales de A_μ ($C^i(A) = 0$ es la condición de norma).
- (2) Identifique la forma en que las componentes longitudinales se acoplan a las transversales debido al término $C^i(A)$.
- (3) Introduzca un nuevo término en L , con campos ficticios, que cancele los efectos indeseables debido al acoplamiento entre componentes longitudinales y transversales.

Cualquier función $C^i(A)$ que no se transforme covariantemente (i.e., que $C^2(A)$ no sea invariante) y que contenga al menos un término lineal en A_μ^i es útil. Podemos usar, por ejemplo, $C^i = \partial_\mu A_\mu^i$. En el paso (1) tenemos el lagrangiano

$$L_1 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^i - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu^i)^2, \quad (57)$$

donde $F_{\mu\nu}^i$ es el de Ec. (24).

Para obtener (justificar) la receta de cuantización (1)-(3) el único método que conozco es el método funcional⁽²⁾. Sin embargo, es posible usar el mismo método que usamos en las secciones anteriores para cuantizar el campo electromagnético⁽⁹⁾. La dificultad con este último método es la proliferación de vértices y las relaciones que existen entre ellos debido a la estructura del grupo de simetría (e.g., la identidad de Jacobi para las constantes de estructura). Sin embargo, partiendo de L_1 (Ec. (57)) es posible verificar que las componentes longitudinales de los campos A_μ^i no modifican la teoría al nivel de la aproximación de árbol. Esto resulta de una identidad análoga a la Ec. (32) del caso abeliano. Clásicamente, i.e., aproximación de árbol, las componentes longitudinales de los A_μ^i están desacoplados (recordar que el primer término a la derecha de (57) contiene términos de interacción de orden 3 y 4 en los campos de norma). Sin embargo, en los diagramas con bucles calculados con L_1 (Ec. (57)) como por ejemplo , hay contribución de las componentes longitudinales que no se cancelan. Usando el método de la sec. 3, la contribución de los componentes longitudinales a este diagrama pueden ser representados por el dia

grama  . Estas contribuciones se pueden eliminar mediante un campo ficticio ad-hoc (fantasmas de Fadeev-Popov), que se acopla a los campos de gauge según el vértice





$$(58)$$

y poniendo un signo menos para cada bucle de manera que



$$= 0$$

En el diagrama a la derecha de (58) el vértice  es proporcional al inverso del propagador del campo A_μ^i (definido gracias al término $-C^2/2\xi$ en (57)), cancelando el propagador  (ver la Ec. (31b) en el caso del campo electromagnético) quedando un acoplamiento efectivo del campo de norma a la línea de fantasmas proporcional a q_μ , i.e., del tipo derivativo. Esto es indicado por el punto en el diagrama a la izquierda de (58). Los pasos (2) y (3) en la receta de cuantización se llevan a cabo de la siguiente manera:

El cambio de C^i ante una transformación infinitesimal de norma es

$$\delta C^i = \frac{1}{g} \partial^2 \alpha^i(x) - C_{kji} \partial_\mu (\alpha^k A_\mu^j). \tag{59}$$

El lagrangiano para los fantasmas de Fadeev-Popov es

$$L_2 = g \phi_i^\dagger(x) \delta C^i(\alpha(x) \rightarrow \phi(x)) = \phi_i^\dagger(x) \partial^2 \phi_i(x) - g C_{kji} \phi_i^\dagger \partial_\mu (\phi^k A_\mu^j) \\ = |\partial_\mu \phi_i|^2 + g (\partial_\mu \phi_i^\dagger) \phi_j A_\mu^k C_{ijk}, \tag{60}$$

donde $\phi_i(x)$ es el campo de los fantasmas y para obtener la Ec. (60) usamos el hecho de que términos en L_2 de la forma $\partial_\mu G_{\mu\mu}(x)$ no modifican la acción.

Finalmente, el lagrangiano completo es

$$L_3 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^i - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu^i)^2 + |\partial_\mu \phi_i|^2 + g (\partial_\mu \phi_i^\dagger) \phi_j A_\mu^k C_{ijk}. \tag{61}$$

Al calcular diagramas con L_3 los fantasmas ϕ aparecen únicamente en bucles

y con un signo menos por cada bucle. Debido a esto L_2 está definido hasta una constante multiplicativa, i.e., $\text{cte} L_2$ hace la misma función que L_2 . La constante multiplicativa aparece como un factor $(\text{constante})^{-1}$ en el propagador y como un factor (constante) en el vértice, quedando en cada bucle un factor total de 1 (la transformación $L_2 \rightarrow \text{cte} \times L_2$ equivale a la transformación $\phi_i \rightarrow \sqrt{\text{cte}} \phi_i$ que, en el formalismo funcional su único efecto es el de multiplicar la amplitud de transición vacío a vacío por $(\text{constante})^{-1}$).

De L_3 (Ec. (61)) resultan las siguientes reglas de Feynman:

$$\begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \text{---} \\ | \\ i \quad j \end{array} = \frac{i}{q^2} \delta_{ij} \quad ,$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ j, \nu \quad i, \mu \end{array} = i W_{\mu\nu}^{-1} ij = \frac{i}{q^2} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} (1-\xi) \right) \delta^{ij} \quad ,$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ s, \lambda \quad r, \sigma \\ | \\ i, \mu \quad j, \nu \end{array} = \left\{ \begin{array}{l} -ig^2 \left\{ C_{kji} C_{krs} \left(g^{\nu\sigma} g^{\mu\lambda} - g^{\nu\lambda} g^{\mu\sigma} \right) + \right. \\ \left. + C_{kri} C_{kjs} \left(g^{\nu\sigma} g^{\mu\lambda} - g^{\lambda\sigma} g^{\mu\sigma} \right) + \right. \\ \left. + C_{ksi} C_{krj} \left(g^{\lambda\sigma} g^{\mu\nu} - g^{\nu\lambda} g^{\mu\sigma} \right) \right\} \quad , \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ q_2 \quad q_3 \\ | \\ i, \mu \quad k, \sigma \end{array} = -g C_{ijk} \left\{ g^{\mu\sigma} (q_1 - q_3)_\nu + g^{\mu\nu} (q_2 - q_1)_\sigma + g^{\nu\sigma} (q_3 - q_2)_\mu \right\} \quad ,$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ q \\ | \\ i, \mu \quad k, \nu \end{array} = g q_\mu C_{ijk} \quad .$$

6. MECANISMO DE HIGGS⁽⁴⁾.

Empecemos por considerar el modelo σ con la simetría $SU(2) \times SU(2)$ (c.f. SC)⁽¹¹⁾. En este modelo, debido al rompimiento espontáneo de la simetría

tría, i.e., $Q_5^i | 0 \rangle \neq 0$, el campo del pión se transforma ante los elementos del grupo generados por Q_5^i de una manera no homogénea (ver Ec. (4.46) de SC). Las consecuencias de esta propiedad del campo del pión son las identidades de Ward quirales y los teoremas de piones suaves; esto, debido esencialmente a la mezcla que hay entre el campo del pión y los parámetros del grupo (Ec. (4.56c) de SC). De hecho, las características del modelo $-\sigma$ son las de cualquier modelo en teoría del campo en el que la simetría (o parte de ella) se realiza a la Nambu-Goldstone⁽¹¹⁾.

Por otra parte, los campos de gauge también se transforman de una manera inhomogénea ante los elementos del grupo de norma (ver la Ec. (17)). Las identidades de Ward son también en este caso un resultado de la mezcla entre los parámetros del grupo y las componentes longitudinales de los campos de norma (Ec. (31b) en QED).

Si acoplamos campos de norma a los bosones de Goldstone mediante la sustitución mínima (Ec. (9)), puesto que los bosones de Goldstone y las componentes longitudinales de los campos de norma se mezclan ambos con los parámetros del grupo, esperamos que habrá también una mezcla entre los propios bosones de Goldstone y las componentes longitudinales de los campos de norma, de manera que estas últimas participarán en la dinámica a través de los bosones de Goldstone; i.e., las componentes longitudinales de los bosones de norma dejarán de propagarse libremente.

Consideremos la situación en que

$$L(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) \quad (62)$$

es invariante ante un grupo G de transformaciones globales de gauge de los campos ϕ según una representación R , en general reducible, de G en la que las componentes de ϕ son reales:

$$\left[Q^i, \phi \right] = -\lambda^i \phi \quad ,$$

donde Q^i son las cargas que generan los elementos de G , las matrices λ^i son los generadores en R y, puesto que ϕ es real, las matrices λ^i son antisimétricas.

Además, suponemos que las ecuaciones de movimiento clásicas de $L(\phi, \partial_\mu \phi)$ tienen soluciones de la forma $\phi = \text{cte.}$, i.e., $\langle \phi \rangle \neq 0$. Sea H el subgrupo de G que es una simetría del estado vacío, i.e.,

$$H\langle\phi\rangle = \langle\phi\rangle . \quad (63)$$

Si denotamos por κ^i los generadores de H, la Ec. (63) es equivalente a

$$\kappa^i\langle\phi\rangle = 0 . \quad (64)$$

Sean γ^i los generadores del coset (izquierdo) G/H tales que

$$\gamma^i\langle\phi\rangle \neq 0 \quad i \in G/H . \quad (65)$$

De acuerdo al teorema de Goldstone $n = \dim(G-H)$ de las componentes de ϕ tienen masa cero y el estado vacío de la teoría definida por $L(\phi, \partial_\mu \phi)$ está degenerado. Cada vacío está caracterizado por un vector $\langle\phi\rangle$ diferente, todos de magnitud $|\langle\phi\rangle|$ es decir, que los elementos de la órbita $G\langle\phi\rangle$ (e.g. Ec. (2.23) de SC) pueden ser puestos en correspondencia uno a uno con los diferentes estados vacío. Al igual que en modelo $-\sigma$, una transformación infinitesimal del estado vacío ante los elementos del coset G/H se efectúa mediante la emisión (o absorción) de un bosón de Goldstone de energía y momento cero.

Acoplemos $N(=\dim G)$ campos de norma $A_\mu^i(x)$ a los campos escalares ϕ mediante la sustitución mínima

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu ,$$

donde $A_\mu \equiv \lambda^i A_\mu^i$. El nuevo lagrangiano $L(\phi, D_\mu \phi)$ es ahora invariante ante transformaciones locales de norma. Veamos que pasa ahora con el teorema de Goldstone. Para esto, usamos el lagrangiano

$$L' = L(\phi, D_\mu \phi) + r \cdot \phi + j_\mu^i A_\mu^i , \quad (66)$$

donde r y j_μ^i son funciones fuente arbitrarias y efectuamos una transformación del II - tipo únicamente de los campos ϕ y una transformación del primer tipo de los campos de norma A_μ^i . Ante esta transformación

$$L' \rightarrow L_t = L' + \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \partial_\mu \phi + i\alpha^i(x) r \lambda^i \phi ,$$

donde $\delta \partial_\mu \phi \equiv i(\partial_\mu \alpha^i(x) \lambda^i) \phi$ y $\alpha^i(x)$ son los parámetros del grupo. Usando (62) obtenemos para L_t la expresión

$$\begin{aligned} L_t = & L' + i \left[\partial_\mu \chi \lambda^i \chi + ig(\chi A_\mu \lambda^i \chi + \langle\phi\rangle A_\mu \lambda^i \chi + \chi A_\mu \lambda^i \langle\phi\rangle) \right] \partial_\mu \alpha^i + i \vec{v}^j \cdot \vec{v}^i A_\mu^j \partial_\mu \alpha^i + \\ & + i \partial_\mu \chi v^i \partial_\mu \alpha^i + i \alpha^i \left[r \lambda^i \chi + r \cdot v^i \right] . \end{aligned} \quad (67)$$

En (67) usamos las definiciones $\phi = \chi + \langle \phi \rangle$ tal que $\langle \chi \rangle = 0$ y $v^i \equiv \lambda^i \langle \phi \rangle$, siendo \bar{v}^i el traspuesto de v^i .

Excepto por los términos de fuente, L_t se reduce a L' en el límite $\alpha^i(x) \rightarrow$ constante. Nótese que $v^i = 0$ para cualquier $i \in H$ (ver Ec. (64)) de modo que los campos de norma que se mezclan con los parámetros del grupo son sólo los correspondientes al coset G/H . De la misma manera, los campos χ se mezclan con los parámetros $\alpha^i(x)$ sólo a través de la combinación $\chi \cdot v^i$. Los $n [= \dim(G/H)]$ campos χv^i "serían los bosones de Goldstone" si $g = 0$ (ver más adelante).

De los vértices generados por L_t (Ec. (67)) usaremos los siguientes:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{L} \rightarrow \\
 \text{-----} \\
 i \quad a
 \end{array} = -q^2 v_a^i, \tag{68a}$$




$$\begin{array}{c}
 i \text{-----} \chi
 \end{array} = -r v^i, \tag{68b}$$

$$\begin{array}{c}
 i \text{-----} \chi \\
 \searrow \\
 a
 \end{array} = -r_a \lambda_{ba}^i, \tag{68c}$$

$$a \text{-----} x = i r_a, \tag{68d}$$

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{L} \rightarrow \\
 \text{-----} \\
 j \quad i, \mu
 \end{array} = -g q_\mu \bar{v}^i \cdot v^j. \tag{68e}$$

En estos vértices la espiral corresponde a los parámetros del grupo, la línea continua a los campos escalares y la línea ondulada a los campos de norma.

Puesto que L' es invariante ante transformaciones de norma del I-tipo, tanto de ϕ como de A_μ^i , cualquier función de Green que contenga una línea $\alpha^i(x)$ externa es cero en el límite en que el momento de esta línea va a cero. Nótese que en este límite los diagramas que contienen los vértices ,  y  (también generados por (Ec. (67))) son trivialmente cero. Las identidades de Ward relevantes para el propagador de ϕ y A_μ^i son

$$\lim_{q \rightarrow 0} q \rightarrow \text{diagram} = \lim_{q \rightarrow 0} \left\{ \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} \right\} = 0$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} q \rightarrow \text{diagram} = \lim_{q \rightarrow 0} \left\{ \text{diagram 1} + \text{diagram 2} \right\} = 0 \quad (69a)$$

Usando las definiciones

$$\chi_{ij} \cdot \text{diagram} \cdot \mu_{ji} = i\Delta_{\mu\nu}^{ij}(q) \quad (70a)$$

$$b \cdot \text{diagram} \cdot a = i\Delta_{ab}(q) \quad (70b)$$

$$i_{,\mu} \cdot \text{diagram} \cdot a = ih_a^{i\mu}(q) \quad (70c)$$

y las reglas de Feynman (Ec. (68)), las identidades de Ward se escriben:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \left\{ q^2 h_a^{j\mu} + g\Delta_{\mu\nu}^{jk} q \frac{v^k}{v_a^j} \right\} v_a^i = 0 \quad (71a)$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} \left\{ q^2 \Delta_{ab} + gq_{\mu} h_a^{j\mu} \frac{v^j}{v_b^j} - \delta_{ab} \right\} v_b^i = 0 \quad (71b)$$

La mezcla entre las componentes longitudinales de A_{μ}^i y los campos χv^i estropea el teorema de Goldstone. En el límite $g \rightarrow 0$ de la Ec. (71) recuperamos el teorema de Goldstone. Las Ecs. (71) son una trivialidad para los v^i tales que $i \in H$, pues en este caso $v^i = 0$. Sólo los bosones de norma asociados a los generadores de G/H , en la combinación $A_{\mu}^j \frac{v^j}{v^j} v^i$, y los campos χ , en la combinación χv^i , son los que se mezclan.

Para identificar los estados físicos en la teoría es necesario eliminar la mezcla mediante una redefinición de los campos.

Los estados físicos de una partícula deben ser ortogonales, y si el propagador de los campos de norma tiene su polo en $q^2 = 0$, entonces

$\lim_{q \rightarrow 0} q \frac{v_{\nu}^{\mu}}{v^{\mu}} \propto \delta^{ij} q^{\mu} / q^2$ de manera que, según la Ec. (71a), la mezcla $h_a^{j\mu}(q)$ debe ser proporcional a q^{μ} / q^4 . Esto quiere decir que el elemento de matriz $\langle \chi_a | A_{\mu}^i \rangle \neq 0$ y por lo tanto los campos $\chi \cdot v^i$ y $\vec{v}^k \cdot v_{\mu}^i A_{\mu}^k$ no son los campos físicos.

Para identificar los estados físicos definimos nuevos campos de

una manera análoga a como se hace para obtener el modelo σ no lineal (c.f. SC). Definimos nuevos campos mediante

$$\phi = U(\xi) \hat{\phi} = U(\xi) (\langle \phi \rangle + \hat{\chi}) \quad , \quad (72a)$$

$$A_\mu = U(\xi) \left(\hat{A}_\mu + \frac{i}{g} \partial_\mu \right) U^{-1}(\xi) \quad , \quad (72b)$$

donde $U(\xi)$ es un elemento del coset G/H , con los parámetros función de los campos χv^i :

$$U(\xi) = \exp \left(i \lambda^i \xi^i / \langle \phi \rangle^2 \right) ; \quad \xi^i \equiv \xi \cdot v^i \quad (73)$$

y $\hat{\chi}$ es tal que⁽⁵⁾

$$\bar{v}^i \hat{\chi} = 0 \quad . \quad (74)$$

Al hacer la sustitución (72) en $L(\phi, D_\mu \phi)$ encontramos que

$$L(\phi, D_\mu \phi) = L(\hat{\phi}, D_\mu \hat{\phi}) \quad , \quad (75)$$

puesto que las Ecs. (72) son de la forma de una transformación de norma y $L(\phi, D_\mu \phi)$ es invariante. El nuevo lagrangiano a la derecha de (75) no contiene los campos ξ^i , es sólo función de $\hat{\chi}$ y \hat{A}_μ , los campos físicos. En particular, el término de energía cinética de L (único que contiene los campos de norma) es

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (D_\mu \phi)^2 &= \frac{1}{2} (\hat{D}_\mu \hat{\phi})^2 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \hat{\chi})^2 + \frac{1}{2} g^2 \left(\hat{\chi} \lambda^i \lambda^j \hat{\chi} + 2 \bar{v}^i \lambda^j \hat{\chi} + \bar{v}^i v^j \right) \hat{A}_\mu^i \hat{A}_\mu^j \\ &\quad - ig \left(\partial_\mu (\bar{v}^i \hat{\chi}) + \partial_\mu \hat{\chi} \lambda^i v^i \right) \hat{A}_\mu^i \quad . \end{aligned} \quad (76)$$

En (76) el término de mezcla

$$- ig \partial_\mu \bar{v}^i \hat{\chi} \hat{A}_\mu^i = 0$$

debido a la condición (74). Precisamente la condición $\bar{v}^i \hat{\chi} = 0$ es la que define la norma unitaria⁽⁵⁾. Además, en (76) hay un término de masa para los campos de norma:

$$+ \frac{1}{2} M^{ij} \hat{A}_\mu^i \hat{A}_\mu^j = \frac{1}{2} g^2 \bar{v}^i v^j \hat{A}_\mu^i \hat{A}_\mu^j \quad ,$$

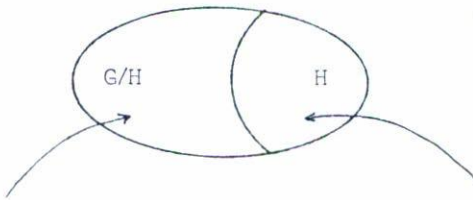
donde

$$M^{ij} = + g^2 \bar{v}^i v^j = M^{ji}$$

es la matriz de masa. Los elementos de M son no-nulos únicamente si i y $j \in G/H$, tal que los campos acoplados a las cargas que aniquilan al vacío; i.e., los generadores de H , son de masa cero.

El resultado de la definición de nuevos campos (Ecs. (72)) es que eliminamos n ($= \dim(G/H)$) campos escalares de la teoría y n de los nuevos campos de norma aparecen masivos. Lo que sucede es que los n campos, que serían los bosones de Goldstone en el límite $g \rightarrow 0$, constituyen la parte longitudinal de n de los campos de norma, que por eso aparecen ahora masivos.

La situación puede resumirse en el siguiente diagrama:



parte de la simetría
rota espontáneamente
Campos de norma masivos

Simetría del vacío.
Campos de norma sin masa

La elipse representa los generadores del grupo G , el pedazo marcado H son los generadores del grupo de simetría del estado vacío (subgrupo de G) y el resto de la elipse son los generadores del cosete G/H .

La regla de transformación de los campos físicos ante transformaciones de norma es no lineal y en general complicada (ver el Apéndice).

6. LAS IDENTIDADES DE TAYLOR-SLAVNOV⁽⁶⁾.

Para cuantizar el campo de Yang-Mills es necesario introducir en la teoría las componentes longitudinales de Λ_μ^i (de la forma $\partial_\mu \Lambda^i$) que permitan definir el propagador del campo de Yang-Mills, pero de tal manera que no se acoplen al resto de los campos; esto es, las $\partial_\mu \Lambda^i$ se deben propagar libremente.

Para teorías abelianas esto es fácil de lograr, como lo vimos en el caso de la QED. Para teorías no-abelianas las $\partial_\mu \Lambda^i$ no pueden ponerse en juego libremente, por lo cual hay que introducir un campo ficticio ϕ^i

(los fantasmas de Fadeev-Popov) que cancele las contribuciones de $\partial_\mu \Lambda^i$ a la matriz S.

Las identidades de Ward en QED son una consecuencia de que las componentes longitudinales del fotón se propagan libremente, y las derivamos con la ayuda de un campo escalar $b(x)$ que mezclamos con $A_\mu(x)$ mediante la transformación $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \epsilon \partial_\mu b(x)$. De esta manera etiquetamos las componentes longitudinales de $A_\mu(x)$ y podemos seguirles la pista.

Para las teorías no-abelianas existen identidades análogas llamadas de Taylor-Slavnov. Para obtenerlas usaremos un método similar al que usamos para derivar las identidades de Ward en QED, sólo que no habrá necesidad de introducir un campo extra $b^i(x)$ pues ya tenemos a la mano los campos $\phi^i(x)$ de los fantasmas que, mediante el acoplamiento derivativo $\partial_\mu \phi^i(x)$, se comportan como las componentes longitudinales de $A_\mu^i(x)$.

El lagrangiano completo para el campo de Yang-Mills es

$$\begin{aligned} L &= L_{\text{YM}} + L_g + L_f \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^i - \frac{1}{2\xi} \vec{C}(A) \cdot \vec{C}(A) - g\vec{\phi}^\dagger \cdot \delta\vec{C}(\phi), \end{aligned} \quad (77)$$

donde $\vec{C}(A) = 0$ es la condición que fija la norma. Nosotros usamos la norma $\vec{C}(A) = \partial_\mu \vec{A}^\mu(x)$. El último término en (77) contiene los campos de los fantasmas, $\vec{\phi}$, a través del término $\delta\vec{C}(\phi)$ que es el cambio de $\vec{C}(A)$ ante una transformación infinitesimal de norma en el que los parámetros del grupo $\vec{\alpha}(x)$ han sido remplazados por el campo del fantasma $\vec{\phi}$ (ver las Ecs. (59) y (60)). Con la norma que estamos usando

$$L_f = -g\vec{\phi}^\dagger \cdot \delta\vec{C}(\phi) = -\vec{\phi}^\dagger \partial^2 \vec{\phi} + g\vec{\phi}^\dagger \cdot \partial_\mu (\vec{\phi} \times \vec{A}_\mu). \quad (78)$$

El producto vectorial en (78) se define mediante las constantes de estructura del grupo:

$$(\vec{A} \times \vec{B})^i = C^{ijk} A^j B^k.$$

L_f en la Ec. (78) se utiliza sólo en diagramas en que los fantasmas aparecen en bucles y con un signo menos acompañando a cada bucle. Esto último se logra automáticamente usando campos $\vec{\phi}(x)$ que anticonmutan:

$$\left\{ \phi^\dagger(x), \phi(y) \right\} = \left\{ \phi(x), \phi(x) \right\} = 0. \quad (79)$$

Puesto que los fantasmas aparecen sólo en bucles, no hay manera de fijar una escala para ellos, esto es, si cambiamos

$$L_f \rightarrow kL_f \quad (80)$$

(donde k es una constante arbitraria) los diagramas calculados con las nuevas reglas de Feynman (que dependen de k) son independientes de k . Esto se puede entender de la siguiente manera: Ante la transformación (80) los nuevos vértices aparecen multiplicados por la constante k y los propagadores por la constante k^{-1} y puesto que un bucle contiene tantos vértices como propagadores entonces todos los factores k se cancelan con los factores k^{-1} dejando sólo un factor 1 por cada bucle. En (77) y (78), k se escogió de manera que el propagador del fantasma es simplemente i/q^2 .

Para derivar las identidades de Taylor-Slavnov observamos que si escribimos el lagrangiano (77) en la forma

$$L = L_{YM} + L_g + kL_f, \quad (81)$$

L contiene a ξ y k como parámetros arbitrarios y es invariante ante la transformación⁽⁷⁾.

$$\delta \vec{A}_\mu = \varepsilon \left(\vec{A}_\mu \times \vec{\phi} + \frac{1}{g} \partial_\mu \vec{\phi} \right) \quad (82a)$$

$$\delta \vec{\phi} = \frac{\varepsilon}{2} \vec{\phi} \times \vec{\phi} \quad (82b)$$

$$\delta \vec{\phi}^\dagger = -\varepsilon \partial_\mu \vec{A}_\mu \quad (82c)$$

si se escoge $k = 1/\xi g$ (con esto, queda sólo un parámetro arbitrario).

Las Ecs. (82a) y (82b) son de la forma de una transformación de norma en la que $\varepsilon \vec{\phi}$ toma el lugar de los parámetros del grupo. En la Ec. (82b) el producto vectorial $\vec{\phi} \times \vec{\phi}$ no es cero porque los $\vec{\phi}$ son campos que anticonmutan. Para demostrar la invariancia de L (Ec. (81)) ante la transformación (82) es necesario utilizar la identidad de Jacobi para las constantes de estructura del grupo en la forma

$$\vec{\phi} \times (\vec{A} \times \vec{\phi}) = -\frac{1}{2} (\vec{\phi} \times \vec{\phi}) \times \vec{A}_\mu. \quad (83)$$

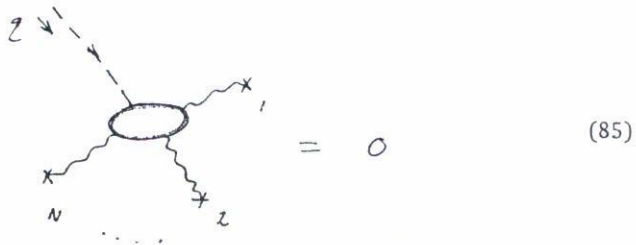
De esta manera es fácil de verificar que ante la transformación (82)

$$\delta L = (1 - \xi g k) \delta L_g$$

$$\delta L_g = \frac{\epsilon}{\xi g} (\partial \cdot \vec{A}) \cdot \left\{ -\partial^2 \vec{\phi} + g \partial_\mu \left(\vec{\phi} \times \vec{A}_\mu \right) \right\} \quad (84)$$

y si $k = 1/\epsilon g$, entonces $\delta L = 0$.

Dijimos que las funciones de Green calculadas con (81) no dependen de k y en particular para $k = 1/\xi g$ el término proporcional a δL_g (Ec. (84)) se hace cero. Entonces, los efectos de δL para cualquier otro valor de k deben ser también nulos sobre las funciones de Green. Esto es, si añadimos a L (con $k = 1$) el término δL_g entonces las funciones de Green, al primer orden en ϵ , no sufren ningún cambio. Esto quiere decir que si de jamos circular a los fantasmas en líneas abiertas, al primer orden en ϵ , la función de Green con N campos de norma y un fantasma externo debe ser cero para cualquier valor del momento que fluje por la línea del fantasma :



Esta figura contiene las identidades de Taylor-Slavnov.

Para continuar, debemos primero dar un significado preciso a los diagramas, por ejemplo a (85). Las reglas de Feynman son las que resultan del lagrangiano

$$L' = L + \delta L_g + \vec{j}_\mu \cdot \vec{A}_\mu + \vec{j}'_\mu \cdot \delta \vec{A}_\mu \quad (86)$$

$$= L + \frac{\epsilon}{\xi g} (\partial \cdot \vec{A}) \cdot \left\{ -\partial^2 \vec{\phi} + g \partial_\mu \left(\vec{\phi} \times \vec{A}_\mu \right) \right\} + \vec{j}_\mu \cdot \vec{A}_\mu + \epsilon \vec{j}'_\mu \cdot \left(\vec{A}_\mu \times \vec{\phi} + \frac{1}{g} \partial_\mu \vec{\phi} \right),$$

y deben ser usadas al primer orden en ϵ únicamente.

Los vértices y propagadores que resultan de L son los de la página 25. Los nuevos vértices son:

$$= \frac{i\epsilon}{\xi} g C^{jik} \left(p_{1\mu} p_{1\nu} - p_{2\mu} p_{2\nu} \right), \quad (87a)$$

$$q \rightarrow \text{---} \underset{i}{\text{---}} \rightarrow \text{---} \overset{j}{\text{---}} \mu = - \frac{\epsilon}{\xi g} \delta^{ij} q_{\mu} q^2, \quad (87b)$$

$$\text{---} \overset{i}{\text{---}} \mu = ij \underset{\mu}{i}, \quad (87c)$$

$$\text{---} \overset{j}{\text{---}} \text{---} \overset{i}{\text{---}} \mu = i \epsilon C^{ijk} \underset{\mu}{j} k, \quad (87d)$$

$$\text{---} \text{---} \overset{i}{\text{---}} \mu = \frac{\epsilon}{g} q_{\mu} \underset{\mu}{j} i, \quad (87e)$$

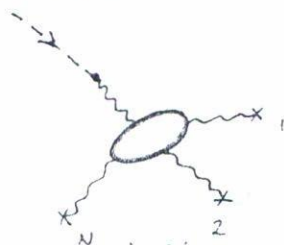
Con estos vértices la Ec. (85) al primer orden en ϵ es:

$$\begin{aligned}
 & \text{---} \overset{q}{\text{---}} \text{---} \text{---} \overset{1}{\text{---}} \text{---} \overset{2}{\text{---}} \text{---} \dots \overset{N}{\text{---}} \\
 & = - \text{---} \overset{q}{\text{---}} \text{---} \text{---} \overset{1}{\text{---}} \text{---} \overset{2}{\text{---}} \text{---} \dots \overset{N}{\text{---}} \\
 & - \sum_{i=1}^N \text{---} \text{---} \text{---} \overset{1}{\text{---}} \text{---} \overset{2}{\text{---}} \text{---} \dots \overset{N}{\text{---}} \\
 & - \sum_{i=1}^N \text{---} \text{---} \text{---} \overset{1}{\text{---}} \text{---} \overset{2}{\text{---}} \text{---} \dots \overset{N}{\text{---}} \\
 & - \sum_{i=1}^N \text{---} \text{---} \text{---} \overset{1}{\text{---}} \text{---} \overset{2}{\text{---}} \text{---} \dots \overset{N}{\text{---}}
 \end{aligned} \quad (89)$$

Utilizando las reglas de Feynman de la página 654 y la (87b) no es difícil de verificar la siguiente relación entre vértices:

(90)

Esta relación entre los vértices nos permite transformar la Ec. (89) en una ecuación para la función de Green



que se puede resolver por iteración.

Sustituyendo (90) en (89) se obtiene

(91)

En esta última ecuación el primer término a la derecha representa las contribuciones de los dos términos a la derecha de (90).

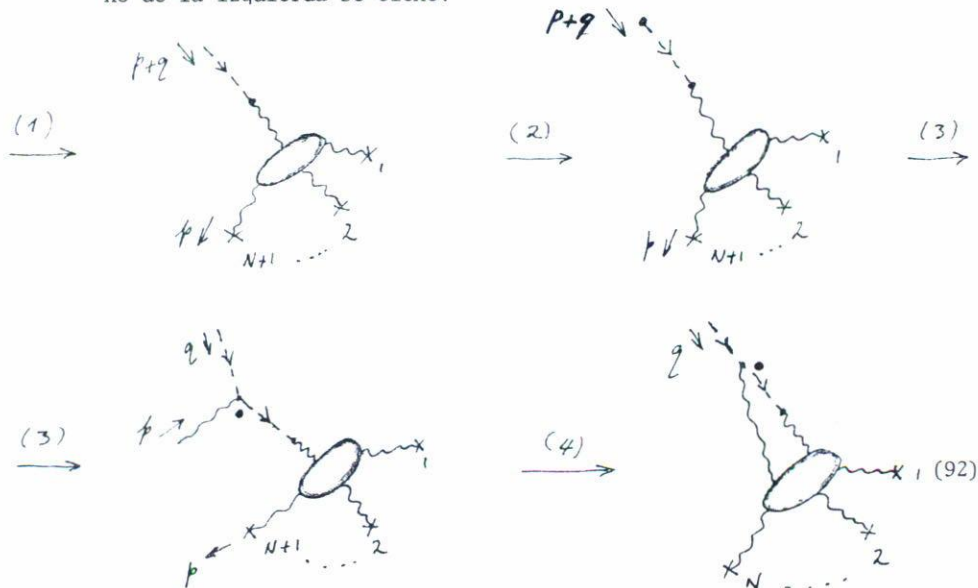
Para resolver la Ec. (91) por iteración, hay que seguir los siguientes pasos:

- (1) Considere las funciones de Green de la Ec. (91) con $N+1$ bosones de norma y un fantasma externos. El momento que fluye hacia adentro por la línea del fantasma debe ser $p+q$ y el momento que sale de la fuente $N+1$ debe ser p .
- (2) Multiplíquese por el propagador del fantasma con momento $p+q$
- (3) Multiplique por el vértice



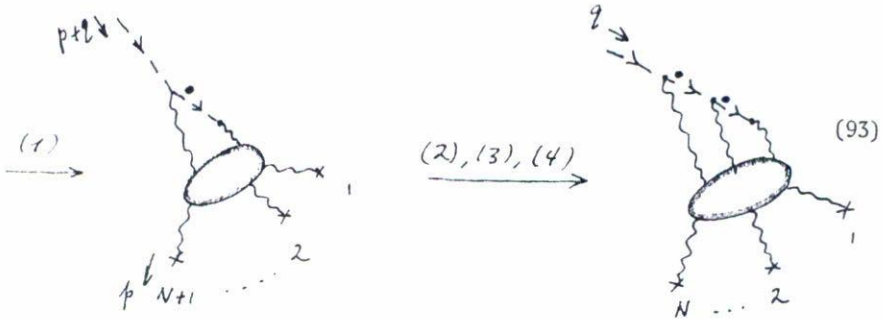
- (4) Quite el factor $ij_{\mu}^i(p)$ de la fuente $N+1$ e intégrese en $d^4p/(2\pi)^4$.

Vamos a aplicar estos cuatro pasos a la Ec. (91). Para el término de la izquierda se tiene:

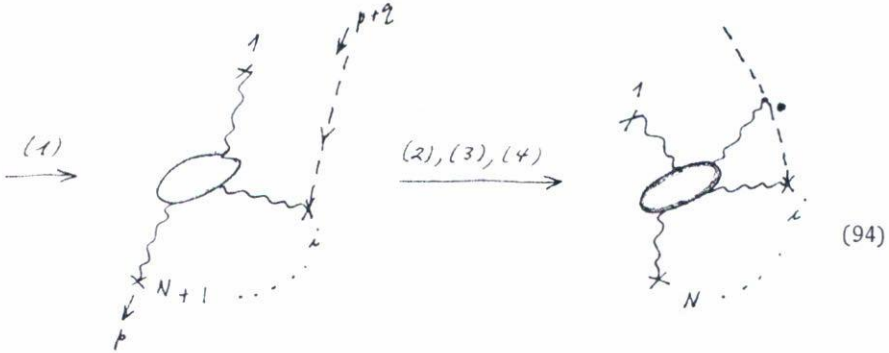


Nótese que al aplicar los pasos (1)-(4) al término a la izquierda de la Ec. (91) se transformó en el primer término a la derecha de (91).

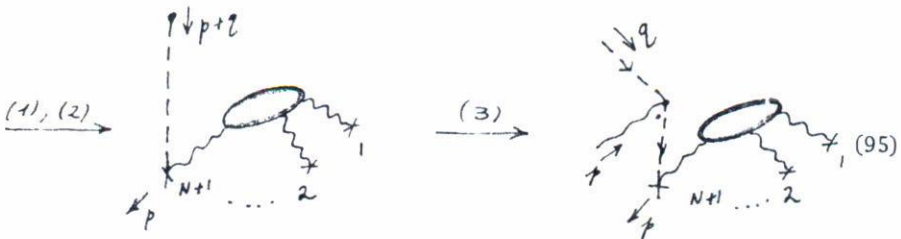
Ahora aplicamos los pasos (1)-(4) al primer término a la derecha de (91):



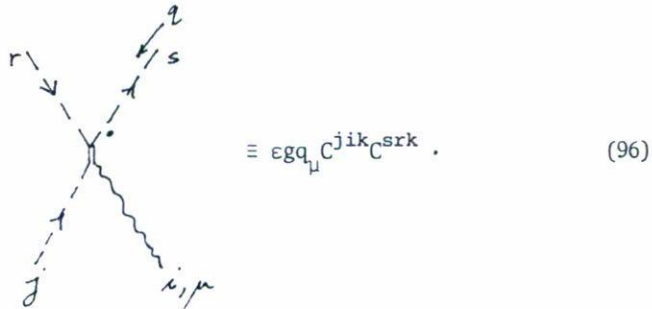
Para el segundo término a la derecha de (91) con $i \neq N+1$:



El término $i = N+1$ requiere atención especial:

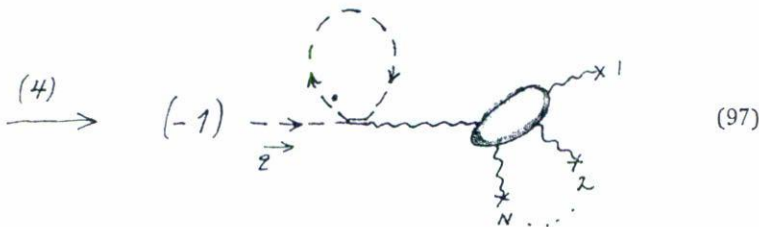


Para poder aplicar aquí el paso (4) y representarlo por un diagrama definimos un vértice especial:



$$\equiv \epsilon g q_{\mu} C^{jik} C^{srk} . \quad (96)$$

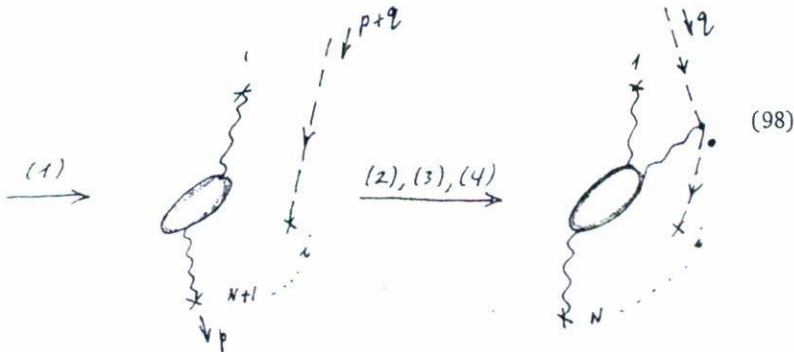
La doble línea en el vértice es para indicar que el bosón de norma y el fantasma de índice j estaban originalmente conectados a la fuente $N+1$. Con el vértice especial (96) podemos efectuar el paso (4) de (95):



$$(-1) \rightarrow \dots \quad (97)$$

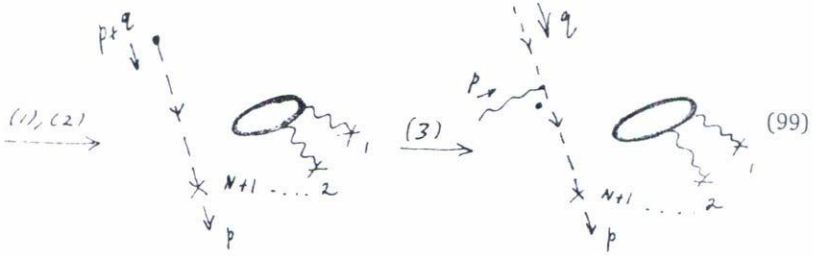
El factor (-1) en este diagrama es para compensar el signo negativo por el bucle de fantasmas.

Para el último término a la derecha de (91) con $i \neq N+1$

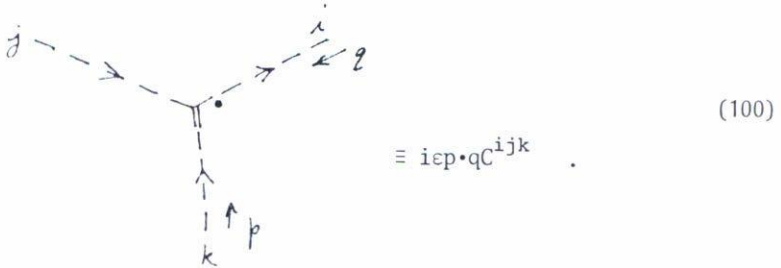


$$(1) \rightarrow \dots \xrightarrow{(2), (3), (4)} \dots \quad (98)$$

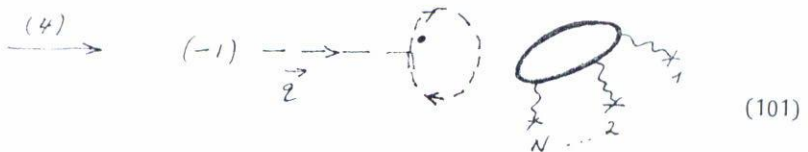
y para $i = N+1$:



Este término es cero a menos que $q = 0$. Para representar el resultado del paso (4) mediante un diagrama definimos otro vértice especial



La doble raya en la línea de momento p es para indicar que es la línea que estaba originalmente conectada a la fuente $N+1$. Con este vértice especial el resultado del paso (4) lo podemos representar como



El signo menos en este diagrama es para compensar el signo menos del bucle de fantasmas.

Finalmente, después de aplicar los pasos (1)-(4) a la Ec. (91), obtenemos la ecuación

The diagram illustrates a mathematical identity involving Feynman diagrams. The top row shows a diagram with a wavy line entering from the top left, a loop, and wavy lines exiting from the bottom right, with an equals sign to its right. The middle row shows a sum over index i from 1 to N of a diagram with a vertical dashed line labeled Y and a loop, with a plus sign to its right. The bottom row shows a sum over index i from 1 to N of a diagram with a horizontal dashed line labeled Y and a loop, with a plus sign to its right.

(102)

Para continuar con la iteración, aplicamos los pasos (1)-(4) a la Ec. (102). El resultado es

(103)

Sumando miembro a miembro las Ecs. (91), (102), (103) y las que resultan de aplicar el mismo procedimiento indefinidamente se obtiene (después de cancelar los términos semejantes)

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagrama: un círculo con una línea que entra desde la izquierda y una que sale hacia la derecha, con una línea que se ramifica en dos líneas que salen hacia abajo y a la izquierda y a la derecha. Hay una flecha en la línea que entra desde la izquierda.} \\
 & = \\
 & = - \sum_{i=1}^N \left\{ \text{Diagrama 1} + \text{Diagrama 2} + \text{Diagrama 3} + \text{etc.} \right\} - \\
 & - \sum_{i=1}^N \left\{ \text{Diagrama 4} + \text{Diagrama 5} + \text{Diagrama 6} + \text{etc.} \right\} + \\
 & + \left\{ \text{Diagrama 7} + \text{Diagrama 8} + \text{Diagrama 9} + \text{etc.} \right\} + \\
 & + \left\{ \text{Diagrama 10} + \text{Diagrama 11} + \text{Diagrama 12} + \text{etc.} \right\}
 \end{aligned}$$

The diagrams in the equation represent various topological configurations of a circle with external lines.
 - The first diagram is a circle with an incoming line from the left and two outgoing lines from the bottom.
 - The first set of diagrams in the sum (multiplied by -) shows the circle with a dashed line extending from the left, and the two bottom lines branching out further.
 - The second set of diagrams (multiplied by -) shows the circle with a dashed line extending from the left, and the two bottom lines branching out further, with a different internal structure.
 - The third set of diagrams (multiplied by +) shows the circle with a dashed line extending from the left, and the two bottom lines branching out further, with a different internal structure.
 - The fourth set of diagrams (multiplied by +) shows the circle with a dashed line extending from the left, and the two bottom lines branching out further, with a different internal structure.

Este resultado, para diferentes valores de N , son las identidades de Taylor-Slavnov, que pueden escribirse en forma un poco más compacta:

Los diagramas en las identidades de Taylor Slavnov contienen únicamente los vértices y propagadores de la página 25. Los únicos dos vértices especiales (Ecs. (96) y (100)) son mostrados explícitamente en las identidades. En el segundo y tercer términos del lado izquierdo de la Ec. (104) el fantasma al entrar en la región de interacción, puede acoplarse $0, 1, 2, \dots$ veces a los bosones de norma antes de alcanzar alguna de las fuentes. En los diagramas del lado derecho de (104) la línea de fantasma termina en uno de los vértices especiales después de interactuar $0, 1, 2, \dots$ veces con los bosones de norma. En QED el fantasma $b(x)$ se propaga libremente, de manera que no hay vértices especiales y pasa directamente a las fuentes sin acoplarse al fotón. De esta manera la identidad de Taylor-Slavnov (Ec. (104)) se reduce a la identidad de Ward (Ec. (48)).

APENDICE

Reglas de transformación de los campos físicos.

Aunque el contenido físico de la teoría definida por $L(\overset{\sim}{\phi}, D_{\mu}\overset{\sim}{\phi})$ es evidente en término de los campos $\overset{\sim}{\chi}$ y \tilde{A}_{μ}^i , la manera en que se transforman

ante G es no-lineal en los campos y en general complicada.

Ante un elemento T de G

$$\phi \rightarrow \phi' = T\phi = TU(\xi)\tilde{\phi} \quad (A.1)$$

Puesto que TU(ξ) es un elemento G, puede escribirse en la forma

$$TU(\xi) = U'(\xi)h(\xi) \quad (A.2)$$

donde h(ξ) es un elemento del subgrupo H y U'(ξ) un elemento del coset izquierdo G/H.

Sustituyendo (A.2) en (A.1):

$$\phi' = U'(\xi)h(\xi)\tilde{\phi} = U'(\xi) \left[\langle \phi \rangle + h(\xi)\tilde{\chi} \right] = U'(\xi) \left[\langle \phi \rangle + \tilde{\chi}' \right].$$

De manera que ante T \in G los campos físicos se transforman según la regla

$$\tilde{\chi} \rightarrow \tilde{\chi}' = h(\xi)\tilde{\chi}$$

$$U(\xi) \rightarrow U'(\xi) = U(\xi').$$

REFERENCIAS

1. C.N. Yang y R.L. Mills, Phys. Rev., 96 (1954) 191; R. Utiyama, Phys. Rev., 101 (1956) 1957.
2. L.S. Fadeev and U.N. Popov, "Perturbation Theory for Gauge Invariant Fields", Kiev ITP report (unpublished). Phys. Lett., 25B (1971) 29.
3. G. 't Hooft, Nucl. Phys., B33 (1971) 173; B.W. Lee and J. Zinn-Justin, Phys. Rev., D5 3121; D5 (1972) 3137; D7 (1973) 1049; B.W. Lee, Phys. Rev., D9 (1974) 933.
4. P. Nozières and D. Pines, Phys. Rev., 109 (1958) 741; Y. Nambu, Phys. Rev., 117 (1960) 648; P.W. Anderson, Phys. Rev., 110 (1958) 827; P.W. Anderson, Phys. Rev., 130 (1963) 439; J. Schwinger, Phys. Rev., 125 (1962) 125; F. Englert and R. Brout, Phys. Rev. Letters, 13 (1964) 321; P.W. Higgs, Phys. Letters, 12 (1964) 132; Phys. Rev. Letters, 13 (1964) 508; Phys. Rev., 145 (1966) 1156; G.S. Guralnik, C.R. Hagen and T.W. Kibble, Phys. Rev., 133 (1964) 585.
5. S. Weinberg, Phys. Rev., 145 (1973) 1156.
6. J.C. Taylor, Nucl. Phys., B33 (1971) 436; A.A. Slavnov, Sov. J. Nucl., 5 (1975) 303.
7. C. Becchi, A. Rouet and R. Stora. Comm. Math. Phys., 42 (1975) 127.
8. Para profundizar en los aspectos formales e implicaciones fenomenológicas de las teorías de norma: J.C. Taylor; Gauge Theories of Weak Interactions, Cambridge University Press (1976); E.S. Abers and B.W. Lee, Phys. Rep., 9C (1973) 1; W. Marciano and H. Pagels, Phys. Rep., 36C (1978) 137; J. Zinn-Justin, Renormalization of Gauge Theories, Lectures of the 1974 Bonn Inter. Summer School (1975); B.W. Lee, Lectures notes at Les Houches Summer School (1975); J. Benstein, Rev. Mod. Phys., 46 (1974) 1.

9. G. 't Hooft and M. Veltman, Diagrammar CERN preprint 73-9.
10. J.D. Bjorken and S.D. Drell, Relativistic Quantum Fields. Mc. Graw-Hill, N.Y. (1965).
11. J. Urías, Continuous Symmetries. Notas del curso en la Escuela de Verano de Física de Altas Energías en San Luis Potosí (1978). En prensa.