

DINAMICA DE ITERACIONES*

E. Piña[†]

Departamento de Física. UAM-Iztapalapa
Apartado Postal 55-534. 09340 - México, D.F.

RESUMEN

Se desarrolla una mecánica discontinua a partir de ejemplos elementales. Se pueden incorporar sistemas lineales y se hace un tratamiento exacto del péndulo simple con ayuda de funciones racionales y trigonométricas. Se da la formulación general para un sistema hamiltoniano. Se presenta a continuación un resumen de las propiedades elementales de las iteraciones, inclusive la conjugación y su relación con ecuaciones funcionales. Se estudian finalmente algunas propiedades del mapeo logístico por medio de una analogía con el método de Newton para las raíces de una ecuación y se inicia el tratamiento por el método de los puntos periódicos.

ABSTRACT

A discontinuous formulation of mechanics is developed starting from elementary examples. Linear systems are incorporated and an exact treatment of the pendulum is presented in terms of rational and trigonometric functions. The general formulation for a hamiltonian system is included. A short account of some fundamental properties of iterations, including conjugation and its relation to functional equations, is made. Finally, some properties of the logistic map are studied by using Newton's method to obtain the roots of an equation and a sketch of the method of periodic points is presented.

* Presentado en la asamblea general ordinaria de la SMF del 9 de septiembre de 1982.

† También en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN.

1. MECANICA DISCRETA

El propósito de este trabajo es adoptar un punto de vista discontinuo o discreto en la descripción de la mecánica clásica.

Queremos distinguir este enfoque de la solución numérica aproximada de problemas mecánicos.

Se quiere hacer aquí una descripción de una mecánica exacta, que en principio no es aproximada, pero con un tiempo discreto que avanza en múltiplos de un intervalo finito Δt , fundamental y de duración constante arbitraria. Esto da una imagen estroboscópica del movimiento⁽¹⁾.

Existen otros enfoques discontinuos del movimiento mecánico como los mapeos de Poincaré⁽²⁾, desarrollados posteriormente a este autor por Birkhoff, Hadamard y muchos otros. Estos estudios consideran las intersecciones de la trayectoria que recorre en cierta región, con un hiperplano fijo que interseca la trayectoria, y mediante cada corte, numerado en el orden temporal con el cual acontece, se obtiene información sobre la conducta del sistema dinámico.

El punto de vista consistente en describir la mecánica con tiempos discretos se ilustra con varios ejemplos.

En todos ellos se usa un índice j para denotar el tiempo, la cantidad mecánica x al tiempo $j \cdot \Delta t$ será designada por x_j :

$$x_j = x(j\Delta t) \quad (1)$$

Considero primeramente el ejemplo de una partícula libre (P.L.), las ecuaciones de movimiento son para cada j entero,

$$x_{j+1} = x_j + \Delta t \cdot \frac{1}{m} \cdot p_j \quad (P.L.) \quad (2)$$

y

$$p_{j+1} = p_j \quad ,$$

donde m es la masa de la partícula y p_j es la cantidad de movimiento lineal de la partícula, la que no cambia por la iteración:

$$p_j = p_o \quad (\text{constante}) \quad (\text{P.L.}) \quad , \quad (3)$$

donde p_o es el valor constante de esta cantidad de movimiento.

En forma semejante expresaremos la conservación en el tiempo de cualquier otra cantidad mecánica.

La primera ecuación de movimiento (2) es una de las más sencillas ecuaciones en diferencias. Su solución se encuentra si sumamos miembro a miembro todas las ecuaciones desde $j = 0$ hasta j para tener la posición en función del tiempo:

$$x_j = x_o + j \cdot \frac{1}{m} \cdot p_o \cdot \Delta t \quad , \quad (\text{P.L.}) \quad (4)$$

donde x_o es la posición inicial.

Observamos que la ecuación de movimiento produce la igualdad

$$p_j = m \frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta t} \quad , \quad (\text{P.L.}) \quad (5)$$

la cual es una ecuación exacta, sin necesidad de acudir al límite de hacer tender Δt a cero, cosa que no hacemos en este trabajo.

En segundo lugar quiero considerar la formulación de la mecánica de una partícula moviéndose en un campo de aceleración constante (A.C.).

Las ecuaciones exactas de movimiento son en este caso

$$x_{j+1} = x_j + \Delta t \cdot \frac{1}{m} \cdot p_j + \frac{1}{2} a(\Delta t)^2$$

y

$$(A.C.) \quad (6)$$

$$p_{j+1} = p_j + \Delta t \cdot a \cdot m \quad ,$$

donde a es la aceleración constante de la partícula. La segunda ecuación de movimiento conduce a la expresión para la aceleración:

$$a = \frac{1}{m} \frac{p_{j+1} - p_j}{\Delta t} \quad . \quad (\text{A.C.}) \quad (7)$$

La analogía matemática con la Ec. (5) indica la solución

$$p_j = p_o + j \cdot \Delta t \cdot m \cdot a \quad , \quad (\text{A.C.}) \quad (8)$$

donde p_0 es el valor inicial de la cantidad de movimiento lineal.

Se sustituye la Ec. (8) en la primera de las Ecs. (6) y se suman miembro a miembro las ecuaciones desde $j = 0$ hasta j para obtener la coordenada x_j :

$$x_j = x_0 + \frac{1}{m} \cdot p_0 \cdot j \cdot \Delta t + \frac{a}{2} \cdot j \cdot (\Delta t)^2 \quad . \quad (\text{A.C.}) \quad (9)$$

Destacan en este caso la conservación de la energía mecánica, la cual no cambia con un incremento Δt del tiempo:

$$\frac{1}{2m} \cdot (p_{j+1})^2 - m \cdot a \cdot x_{j+1} = \frac{1}{2m} \cdot (p_j)^2 - m \cdot a \cdot x_j \quad . \quad (\text{A.C.}) \quad (10)$$

Aprendemos por estos ejemplos que las ecuaciones de movimiento se expresan por medio de ecuaciones en diferencias y la solución corresponde a conocer el resultado de un número discreto, arbitrario de iteraciones.

Esta forma de expresar los problemas mecánicos se adapta al avance considerable de la computación. Las cantidades mecánicas expresadas en términos de iteraciones permiten incorporar automáticamente programas de cómputo para dar la solución numérica del movimiento, y más importante es la posibilidad, también inmediata, de la representación gráfica del movimiento por medio de pantallas y graficadores que requieren también de valores discretos para ser representados.

La disminución continua de los costos de computadoras y graficadores ha hecho conveniente que cada físico tenga asociados a su trabajo una computadora para iterar rápidamente y una graficadora para ilustrar los resultados. Con este punto de vista basta poder plantear un problema en el lenguaje de las iteraciones. La solución se obtiene en seguida por computación y representación gráfica del movimiento. Una solución explícita en términos de la variable continua tiempo no es necesaria y en muchos casos tampoco es posible o conveniente.

Con esta filosofía en mente, debemos reformular los problemas mecánicos por medio de ecuaciones en diferencias. Esto es fácil en los problemas lineales en que ecuaciones diferenciales lineales se mapean en ecuaciones lineales en diferencias. Tomamos por ejemplo el sistema de

ecuaciones diferenciales lineales homogéneo

$$\frac{dy}{dt} = My \quad , \quad (11)$$

donde y son las coordenadas mecánicas del problema y M es una matriz constante.

La solución formal del sistema (11) está dada en términos de la condición inicial y_0 por medio de⁽³⁾

$$y(t) = \exp (tM) y_0 \quad . \quad (12)$$

El número de problemas mecánicos representados por la Ec. (11) no tiene fin: movimiento de fricción proporcional a la velocidad, oscilador armónico amortiguado, vibraciones de amplitud corta, etc.

La Ec. (11) y su solución, son equivalentes a la ecuación lineal en diferencias

$$y_{j+1} = A y_j \quad , \quad (13)$$

donde A es una matriz constante. La solución de la Ec. (13) es trivialmente

$$y_j = A^j y_0 \quad , \quad (14)$$

y la relación entre ambos puntos de vista (11) ó (13) y sus soluciones (12) y (14) está dada por la ecuación

$$A = \exp (M \Delta t) \quad . \quad (15)$$

Por este camino, el estudio de los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales y sus propiedades se pueden incorporar fácilmente al tratamiento por iteraciones. En particular es útil clasificar puntos singulares con criterios similares a como se hace en la teoría de ecuaciones diferenciales lineales. La ecuación en diferencias (13) acepta también la utilidad de las coordenadas normales, y los vectores y valores propios de la matriz M se sustituyen por los mismos vectores propios

de la matriz A y por valores propios de la matriz A relacionados por medio de la Ec. (15) con los valores propios de la matriz M.

La integral de la ecuación diferencial (11) en un intervalo Δt lleva a la ecuación en diferencias (13),

$$y_{n+1} - y_n = (e^{M \Delta t} - 1) y_n, \quad (16)$$

y no cabe duda de la relación exacta entre ambos formalismos. La solución gráfica de las soluciones es preferible obtenerla del tratamiento de las ecuaciones en diferencias por ser el lenguaje natural de las máquinas electrónicas. Es un ejercicio ilustrativo encontrar en un sistema de dos ecuaciones lineales la clasificación de puntos singulares⁽³⁾: focos, nodos, centros, sillars, nodos logarítmicos, etc. con el formalismo de las iteraciones y su dibujo por computadora.

Problemas mecánicos resueltos y muy conocidos pueden expresarse en el lenguaje de la mecánica discreta en forma insospechada. Veamos el ejemplo de la ecuación no lineal del péndulo simple. Sea θ el ángulo que forma el péndulo con la vertical y

$$\omega = \dot{\theta}/2 \sqrt{g/l} \quad (17)$$

su velocidad angular sin dimensiones; g y l son las constantes usuales del péndulo, gravedad y longitud, respectivamente.

Las ecuaciones de movimiento serán

$$\sin \frac{\theta_{j+1}}{2} = \frac{c \cdot d \cdot \sin \frac{\theta_j}{2} + s \cdot \omega_j \cdot \cos \frac{\theta_j}{2}}{c^2 + s^2 \cos^2 \frac{\theta_j}{2}}$$

y

$$\omega_{j+1} = \frac{c \cdot \omega_j - s \cdot d \cdot \sin \frac{\theta_j}{2} \cdot \cos \frac{\theta_j}{2}}{c^2 + s^2 \cos^2 \frac{\theta_j}{2}}, \quad (18)$$

donde c , s , d son constantes tales que

$$c^2 + s^2 = 1 \quad (19)$$

y

$$d^2 + \left(\frac{E}{2mg\ell} + \frac{1}{2} \right) s^2 = 1 \quad , \quad (20)$$

y E es la energía del péndulo. S es una constante relacionada con el intervalo de tiempo Δt cuya función explícita se escribe más adelante.

Obsérvese que, mientras en los libros elementales e intermedios de mecánica⁽⁴⁾ no se escribe la solución exacta del péndulo, aquí tenemos ecuaciones de movimiento exactas, y solución implícita exacta por computadora. La solución con ayuda de computadora y graficador no requiere conocimientos de funciones elípticas. Por supuesto está detrás de esto la fórmula de adición de las funciones de Jacobi⁽⁵⁾, la cual fue utilizada para hallar las ecuaciones de movimiento (18), y la relación entre la constante s y el intervalo de tiempo Δt es por medio de la función elíptica de Jacobi:

$$s = \operatorname{sn}(\Delta t \sqrt{g/\ell}) \quad , \quad (21)$$

cuyo módulo k resulta de

$$k^2 = \frac{1 - d^2}{s^2} = \frac{E}{2mg\ell} + \frac{1}{2} \quad . \quad (22)$$

Es interesante observar en la iteración (18) que las funciones elípticas que dan la solución exacta en términos de un tiempo continuo juegan un papel secundario, y la iteración (18) proporciona el movimiento en términos de una función racional de funciones trigonométricas.

No es de extrañar este resultado; desde Gauss existen muchos métodos numéricos iterativos aplicados a la obtención de funciones e integrales elípticas. Por ejemplo, la obtención del período del péndulo puede encontrarse con rapidez del promedio aritmético-geométrico de Gauss⁽⁶⁾. A partir de los valores iniciales

$$X_0 = 1, Y_0 = \frac{\sqrt{d^2 - c^2}}{s} \quad , \quad (23)$$

se obtienen por iteración los promedios

$$X_{j+1} = \frac{X_j + Y_j}{2} \quad , \quad Y_{j+1} = \sqrt{X_j Y_j} \quad , \quad (24)$$

y ambos convergen al promedio \bar{X} de Gauss, obteniéndose el período del péndulo

$$T = \frac{\pi}{2 \bar{X}} \sqrt{g/\ell} \quad . \quad (25)$$

Generalizamos ahora la situación cuando existe un hamiltoniano capaz de describir la mecánica de un sistema. La existencia de la formulación de las ecuaciones de movimiento en forma discreta viene dada por las expresiones⁽⁷⁾

$$q_{j+1} = \exp \{ \Delta t [H,] \} q_j$$

(26)

y

$$p_{j+1} = \exp \{ \Delta t [H,] \} p_j \quad ,$$

donde q_j, p_j son las coordenadas del espacio fase al tiempo j y $[H,]$ es el operador de evolución temporal construido con el hamiltoniano H y el paréntesis de Poisson. La obtención explícita de (25) permite describir la dinámica por iteración y es equivalente a conocer el movimiento mecánico del sistema.

Las Ecs. (26) pueden considerarse si se quiere como el desarrollo en serie de Taylor, a todos los órdenes, de las funciones q_{j+1} y p_{j+1} , en potencias de Δt , alrededor de los valores q_j y p_j .

En ausencia de una formulación hamiltoniana, se verá en cada caso particular la posibilidad de expresar las ecuaciones de movimiento como una ecuación en diferencias.

2. TEORIA DE ITERACIONES

Veamos ahora algunas propiedades elementales de las iteraciones (8), (9) y (10).

Se llama iteración de una función $\Psi(z)$ de la variable z , a la aplicación repetida de la función. La función $\Psi(z)$ se itera al usar su valor como nuevo argumento de la misma función.

A partir de X_0 , se obtiene la sucesión de iterados

$$X_0, X_1 = \Psi(X_0), X_2 = \Psi(X_1), X_3 = \Psi(X_2), \text{ etc.} \quad (27)$$

Llamamos $\Psi_n(z)$ a la aplicación sucesiva n veces de la función Ψ , por ejemplo

$$X_2 = \Psi_2(X_0) = \Psi(\Psi(X_0)), X_3 = \Psi_3(X_0) = \Psi(\Psi(\Psi(X_0))) \quad (28)$$

La función $\Psi_n(z)$ tiene la propiedad

$$\Psi_{n+m}(z) = \Psi_n(\Psi_m(z)) = \Psi_m(\Psi_n(z)) \quad (29)$$

donde n y m son enteros positivos.

Llamamos punto fijo de la función de iteración $\Psi(z)$ a la solución de la ecuación

$$z = \Psi(z) \quad (30)$$

El punto fijo es invariante de la iteración:

$$\Psi_n(z) = z \quad (\forall n \text{ entero positivo}) \quad (31)$$

Un punto fijo de $\Psi_n(z)$ puede no ser punto fijo de $\Psi(z)$, aunque lo contrario sea cierto.

Pero si z es punto fijo de $\Psi_n(z)$, entonces z es punto fijo de $\Psi_{np}(z)$, donde np es cualquier múltiplo entero de n .

Es importante observar en estas ecuaciones que si z es punto fijo de $\Psi(z)$, también es raíz de la función $z - \Psi(z)$:

$$z - \Psi(z) = 0 \quad (32)$$

Dado un iterado se puede preguntar uno por el valor del argumento de la función Ψ igual al iterado. El argumento se llama el antecedente del iterado y se denota por $\Psi_{-1}(z)$. Ψ_{-1} es la función inversa de Ψ y Ψ_{-n} es la iterada enésima de la misma. Por ejemplo, de las Ecs. (27) deducimos

$$\Psi_{-1}(X_3) = X_2, \quad \Psi_{-1}(X_2) = X_1, \text{ etc.} \quad (33)$$

En algunos casos este inverso no es único sino que existen varios antecedentes que pueden dar el mismo resultado.

Como ejemplo de función $\Psi(z)$ sin inverso único consideramos la iteración de Von-Neumann y Ulam⁽¹¹⁾,

$$\Psi(z) = 4z(1-z) \quad , \quad (34)$$

entonces

$$\Psi_{-1}(z) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1-z} \quad (35)$$

con doble antecedente.

Como consecuencia, existe la posibilidad de que el antecedente de un punto fijo no sea punto fijo.

Para el ejemplo anterior $z = 3/4$ es punto fijo de la función (34), pero $z = 1/4$ es otro antecedente de $3/4$.

En el supuesto que a sea punto fijo de Ψ_p ,

$$\Psi_p(a) = a \quad , \quad (36)$$

pero a no es punto fijo de ningún $\Psi_j(z)$ para j menor que p , entonces

$$\Psi(a), \Psi_2(a), \Psi_3(a), \dots, \Psi_{p-1}(a) \quad , \quad (37)$$

son también puntos fijos de Ψ_p , debido a la propiedad fundamental (29)

$$\Psi_p(\Psi_j(a)) = \Psi_j(\Psi_p(a)) = \Psi_j(a) \quad (j = 1, 2, \dots, p-1) \quad , \quad (38)$$

y al conjunto de p valores (37) se le llama ciclo de orden p de la función $\Psi(z)$. Este ciclo es invariante ante la función Ψ . Se tiene una representación no lineal del grupo cíclico de orden p .

Los p valores (37) son raíces de la Ec. (36). Esta ecuación puede tener además otras raíces.

La sucesión de iteraciones se representa gráficamente por una línea quebrada que se dobla 90° al tocar la gráfica de la función $Y = \Psi(x)$, o de la recta $Y = X$, según se muestra en la Fig. 1.

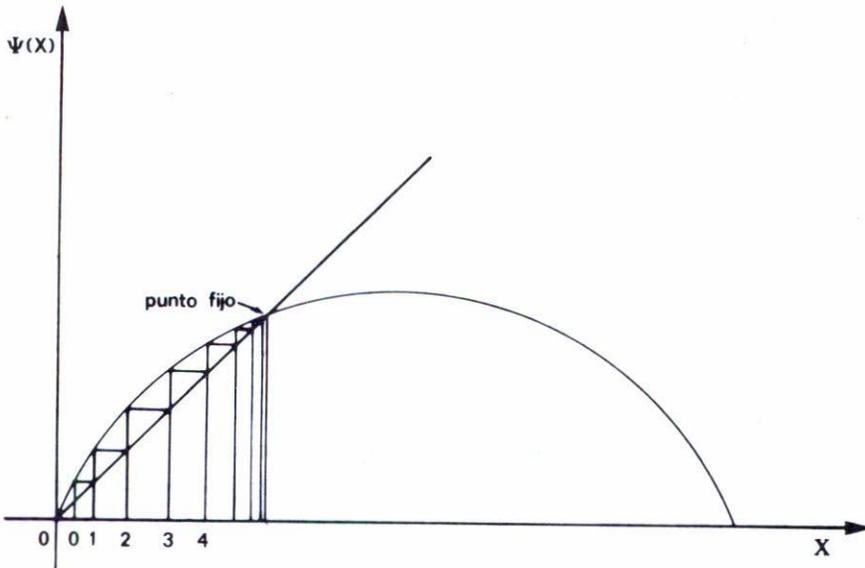


Fig. 1 Representación de iteraciones.

Esta representación gráfica enseña con claridad la posibilidad de la convergencia de la iteración:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n(X_0) = a = \Psi(a) \quad . \quad (39)$$

Para la buena definición del límite en la Ec. (39), éste debe ser un punto fijo de Ψ . De ahí resulta la última igualdad.

Consideramos la convergencia de Ψ . Sea E_n la desviación del iterado X_n respecto a su límite a :

$$X_n = a + E_n \quad . \quad (40)$$

Tenemos entonces, por la serie de Taylor de Ψ ,

$$X_{n+1} = \Psi(X_n) = \Psi(a + E_n) = \Psi(a) + E_n \Psi'(a) + \frac{E_n^2}{2!} \Psi''(a) + \dots \quad (41)$$

Pero como

$$E_{n+1} = X_{n+1} - a = X_{n+1} - \Psi(a) \quad , \quad (42)$$

la Ec. (41) se transforma en

$$\frac{E_{n+1}}{E_n} = \Psi'(a) + \frac{E_n}{2!} \Psi''(a) + \dots \quad , \quad (43)$$

y la condición para la convergencia de la sucesión X_n es entonces

$$|\Psi'(a)| < 1 \quad . \quad (44)$$

Cuando se cumple esta condición el punto fijo a actúa como un atractor de la sucesión y conviene decir que la iteración es estable.

Por el contrario, cuando la magnitud de la derivada es mayor que uno en el punto fijo, éste es un punto inestable que repele los iterados de la función.

El caso $|\Psi'(a)| = 1$ puede conducir a diferentes resultados.

En algunos casos, al iterar una función $\Psi(z)$ se obtiene como límite un ciclo de orden p . Esta situación corresponde al caso anterior cuando $\Psi_p(z)$ es la función de iteración con un punto fijo a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_{pn}(X_0) = a \quad . \quad (45)$$

Los puntos (37) son también límites de Ψ_p con diferente condición inicial, y se llaman por eso ciclo límite (ver Figs. 2 y 3).

La condición de convergencia de (45) es ahora

$$|\Psi'_p(a)| < 1 \quad , \quad (46)$$

y por la regla de la cadena se encuentra que

$$\Psi'_p(a) = \prod_{j=1}^p \Psi'(\Psi_j(a)) \quad . \quad (47)$$

Resulta entonces que la derivada de la función $\Psi_p(z)$ es la misma en todos los puntos de un ciclo de orden p , por ser igual al producto

de las derivadas en los puntos del ciclo. Y por otra parte observamos que

$$\Psi'_{pn}(a) = (\Psi'_p(a))^n \quad . \quad (48)$$

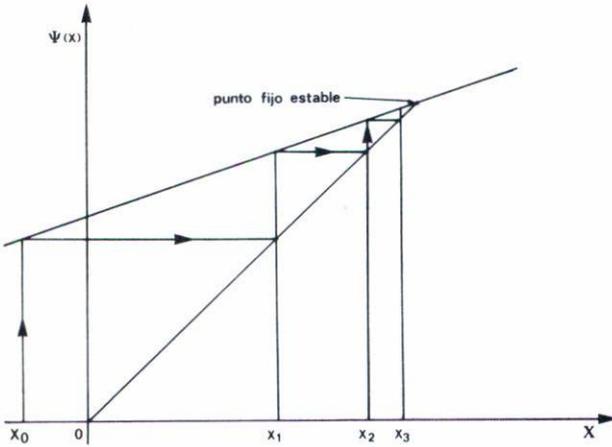


Fig. 2 Iteración convergente. Pendiente menor que uno.

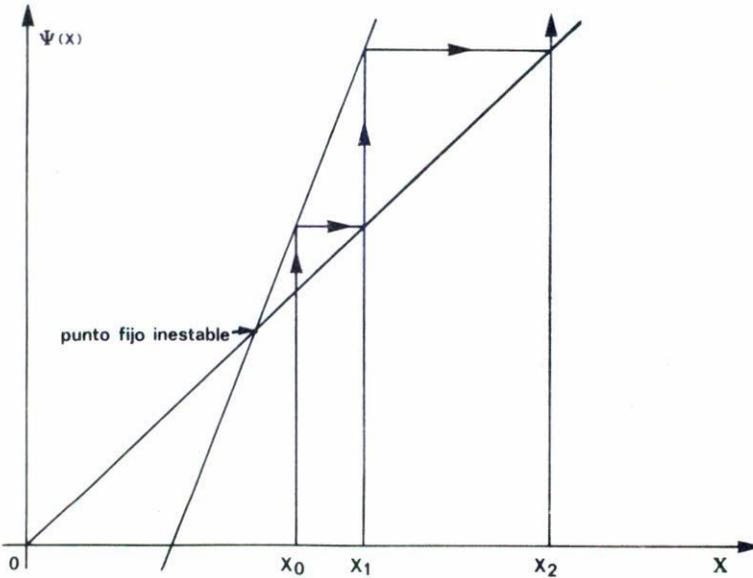


Fig. 3 Iteración divergente. Pendiente mayor que uno.

Vamos a considerar ahora la operación de conjugación de alguna función de iteración. Esta corresponde a un cambio de variable.

Dada la iteración de la función $\Psi(z)$,

$$X_{n+1} = \Psi(X_n) \quad , \quad (49)$$

hacemos el cambio de variable

$$W = f(X) \quad . \quad (50)$$

En las variables W tenemos la nueva iteración

$$W_{n+1} = f(X_{n+1}) = f(\Psi(X_n)) = f(\Psi(f^{-1}(W_n))) = \phi(W_n) \quad . \quad (51)$$

La nueva función de iteración

$$\phi = f \Psi f^{-1}$$

es la conjugada (bajo f) de la función Ψ .

Cuando $\phi(W) = 1 + W$, a la función ϕ se le llama función de Abel porque la función correspondiente f es solución de la ecuación funcional de Abel^(8,9),

$$f(\Psi(X)) = 1 + f(X) \quad . \quad (52)$$

Tenemos entonces, si $W = f(X)$,

$$W_{n+1} = 1 + W_n \quad . \quad (53)$$

Análogamente, cuando $\phi = CW$, a la función ϕ se le llama función de Schroeder porque la función correspondiente f es solución de la ecuación funcional de Schroeder^(8,9),

$$f(\Psi(X)) = C f(X) \quad , \quad (54)$$

y se tiene la iteración

$$W_{n+1} = C W_n \quad . \quad (55)$$

Finalmente, cuando $\phi(W) = W^a$, a la función ϕ se le llamará función de Böttcher⁽¹²⁾, porque la función correspondiente f es solución de la ecuación funcional de Böttcher,

$$f(\Psi(X)) = f^a(X) \quad . \quad (56)$$

En este caso la iteración es

$$W_{n+1} = (W_n)^a \quad . \quad (57)$$

Estas tres iteraciones se resuelven fácilmente en las nuevas variables W , pero no es fácil encontrar la solución de las ecuaciones funcionales de Abel, Schroeder y Böttcher. De hecho es equivalente resolver una iteración o encontrar la solución de la ecuación funcional correspondiente. Este resultado proviene de Laplace⁽²¹⁾ y Koenigs⁽⁸⁾.

Si a es un punto fijo de la función de iteración $\Psi(z)$ y se conoce explícitamente el resultado de iterar n veces la función $\Psi(z)$, y si además la derivada de Ψ en a está acotada por los valores 0 y 1,

$$0 < \Psi'(a) < 1 \quad , \quad (58)$$

entonces existe el límite

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Psi_n(z) - a}{[\Psi'(a)]^n} \quad (59)$$

y esta función satisface la ecuación funcional de Schroeder,

$$f(\Psi(z)) = \Psi'(a) f(z) \quad . \quad (60)$$

Si la derivada se anula en el punto fijo, es posible entonces resolver la ecuación funcional de Böttcher⁽¹³⁾.

3. EL METODO DE NEWTON Y EL MAPEO LOGISTICO

Una de las iteraciones muy estudiadas en nuestros días es la iteración cuadrática o logística^(10,14,15,16,17).

$$\Psi(z) = \lambda z (1 - z) \quad , \quad (61)$$

donde z varía en el intervalo $(0,1)$ y donde λ es un parámetro ajustable que se hace variar entre 1 y 4 para asegurar que el resultado $\Psi(z)$ está entre 0 y 1, y puede servir nuevamente de argumento de la función de iteración. Esta función de iteración es convexa y tiene un máximo único en el intervalo.

Esta iteración se ha vuelto famosa por su aparente sencillez y por haberse descubierto propiedades universales comunes a las funciones de iteración dependientes de un parámetro, y con un máximo único en el intervalo. Un gran esfuerzo multinacional se dedica ahora a encontrar sus propiedades, y algunos experimentos^(18,19,20) auguran que estos resultados jugarán un papel estelar en la física del futuro.

Veamos estas propiedades universales⁽¹⁰⁾. En un subintervalo de λ se encuentra un punto fijo, único y estable. Al alcanzar cierto valor de λ , éste se vuelve inestable y nace un ciclo límite de período doble, estable en otro subintervalo de λ , adyacente al anterior. Este a su vez se vuelve inestable en otro valor de λ y surge otro ciclo límite estable de período 4. Las bifurcaciones de período continúan sin parar, pero los subintervalos en que son estables disminuyen de tamaño, y las bifurcaciones se acumulan en cierto valor de λ , donde se tiene un ciclo límite de período infinito, o lo que es idéntico, en un ciclo límite aperiódico.

A continuación aparecen ciclos estables de cualquier período, ordenados en forma complicada pero conocida. Cada uno de estos ciclos estables aparecen para cierto valor de λ , junto con otro ciclo del mismo período pero inestable. Este último se mantiene inestable para todo λ en $(1,4)$.

El ciclo de período dado arbitrario es estable en un subintervalo de λ . Al extremo del subintervalo se vuelve inestable, y aparece por bifurcación un ciclo estable de período doble. Surge una cascada de bifurcaciones que continúa hasta acumularse en cierto valor de λ , en un ciclo límite aperiódico semejante al que se mencionó antes (ver Fig. 4).

Se ha encontrado que funciones de iteración, con un máximo único, dependientes de un parámetro λ , tienen todas el mismo comportamiento

y participan todas del orden común en que se presentan los períodos y sus bifurcaciones.

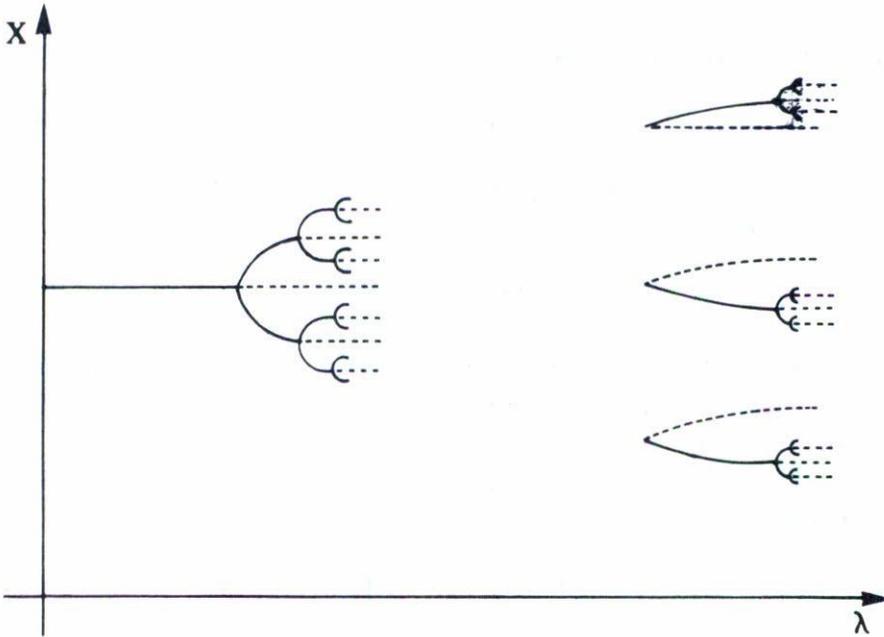


Fig. 4 Diagrama esquemático de bifurcaciones.

Además encontró Feigenbaum⁽¹⁷⁾ que la razón en que decrece el tamaño de los intervalos entre bifurcaciones sigue una ley exponencial con una base universal $1/\delta$ de valor aproximado

$$\delta = 4.669 \quad , \quad (62)$$

válido en la cercanía del punto de acumulación. También encontró Feigenbaum otro escalamiento universal entre los valores de un ciclo y los del ciclo de período doble.

Estas propiedades universales han creado una actividad enorme en el estudio de las propiedades matemáticas de las iteraciones. Esto se incrementa por tenerse evidencia experimental cualitativa y cuantitativa de conducta similar en sistemas electrónicos⁽¹⁹⁾, ópticos⁽²⁰⁾ e hidrodinámicos⁽¹⁸⁾.

La iteración logística tiene como puntos fijos a

$$z = 0 \quad \text{y} \quad z = 1 - 1/\lambda \quad , \quad (63)$$

y las derivadas en ellos valen

$$\Psi'(0) = \lambda \quad \text{y} \quad \Psi'(1 - 1/\lambda) = 2 - \lambda \quad . \quad (64)$$

La primera bifurcación se encuentra en los puntos fijos de la función Ψ_2 dada por

$$\Psi_2(z) = \lambda^2 z (1 - z) [1 - \lambda z(1 - z)] \quad . \quad (65)$$

Los puntos (63) vuelven a ser puntos fijos de $\Psi_2(z)$. Y la función (65) tiene también otra solución doble estable cuando λ está en el intervalo $(3, 1 + \sqrt{6})$.

Los ciclos de período 3 vienen del estudio de los puntos fijos de la función

$$\Psi_3(z) = \lambda^3 z(1-z) [1 - \lambda z(1-z)] \{1 - \lambda^2 z(1-z) [1 - \lambda z(1-z)]\} \quad , \quad (66)$$

que nos lleva a una ecuación de grado $2^3 = 8$. Los puntos (63) son soluciones de esta ecuación y las otras 6 raíces se dividen en dos ciclos de período 3, uno estable y otro inestable cuando λ es mayor que $1 + \sqrt{8}$.

Los ciclos de período 4 resultan del estudio de los puntos fijos de Ψ_4 que son soluciones de una ecuación de grado $2^4 = 16$. Los cuatro puntos fijos de (65) son también puntos fijos de Ψ_4 . Esta función tiene otros 12 puntos fijos que forman tres ciclos de período 4. Uno de ellos existe estable a partir de $\lambda = 1 + \sqrt{6}$ y es el armónico por bifurcación del ciclo 2. Los otros dos ciclos de período 4 nacen, uno estable y el otro inestable en $\lambda = 3$.

Este camino no puede seguirse mucho por la complejidad de las ecuaciones a resolver, pero se puede profundizar si se establece una analogía con el método de Newton⁽²¹⁾ para obtener las raíces de alguna función.

Para encontrar las raíces de

$$F(z) = 0 \quad , \quad (67)$$

Newton encontró que iterando la función

$$\Psi(z) = z - \frac{F(z)}{F'(z)} \quad (68)$$

se obtiene como límite un punto fijo que es una raíz de la ecuación (67). Esta iteración de Newton se sigue utilizando con éxito, modificada y generalizada convenientemente.

Como dato curioso, según Bell⁽²²⁾, el caso particular

$$F(z) = z^2 - c^2 \quad , \quad \Psi(z) = \frac{z^2 + c^2}{2z} \quad , \quad (69)$$

era el método que utilizaba Herón de Alejandría para obtener por iteración las raíces cuadradas de c^2 .

Por este método se asocia a un punto x_j la intersección de la tangente de la función $F(z)$ con el eje de las ordenadas para dar el iterado x_{j+1} , y la nueva aproximación a la raíz. La Fig. 5 ilustra el método de Newton.

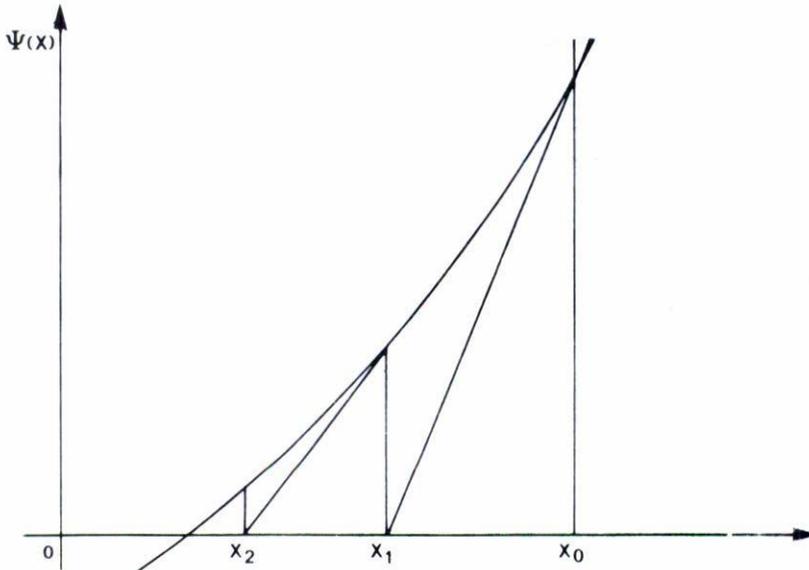


Fig. 5 Iteración de Newton.

Consideramos ahora el problema inverso. Dada una función de iteración $\Psi(z)$, obtener la función correspondiente $F(z)$ determinada por la ecuación diferencial (68). Hacemos este cálculo para la iteración logística

$$\Psi(z) = \lambda z (1 - z) \quad (70)$$

y se encuentra la función $F(z)$ correspondiente:

$$F(z) = z^{\frac{1}{1-\lambda}} \left(z - \frac{\lambda-1}{\lambda} \right)^{\frac{1}{\lambda-1}} \quad (71)$$

Se deduce que $z = 0$ es un punto fijo estable de $\Psi(z)$ cuando $\lambda < 1$, y $z = 1 - 1/\lambda$ es punto fijo estable de $\Psi(z)$ para $\lambda < 1$.

Usamos este método de Newton de nuevo. Tomamos ahora como función de iteración a la segunda iterada del mapeo logístico. Se encuentra en este caso que la función de Newton correspondiente es

$$f_2(z) = z^{\frac{1}{(\lambda+1)(1-\lambda)}} \left(z - \frac{\lambda-1}{\lambda} \right)^{\frac{1}{(\lambda-1)(\lambda-3)}} \left(z^2 - \frac{\lambda+1}{\lambda} z + \frac{\lambda+1}{\lambda^2} \right)^{\frac{1}{(\lambda+1)(\lambda-3)}}, \quad (72)$$

que asocia un cero de esta función en $z = 0$ para $-1 > \lambda > 1$, otro cero en $z = 1 - 1/\lambda$ para $1 < \lambda < 3$ y una raíz doble

$$z = \frac{\lambda + 1 \pm \sqrt{(\lambda+1)(\lambda-3)}}{2\lambda} \quad (73)$$

para $\lambda > 3$ y $\lambda < -1$. Esta raíz doble corresponde al ciclo de período de 2 de la iteración logística.

En general, al iterado $\Psi_n(z)$ le corresponde una función $F_n(z)$ de la forma

$$F_n(z) = \prod_j (z - \alpha_j(\lambda))^{C_j(\lambda)}, \quad (74)$$

donde $\alpha_j(\lambda)$ son los 2^n puntos fijos de $\Psi_n(z)$ y $C_j(\lambda)$ son exponentes que se puede demostrar son iguales a

$$C_j(\lambda) = \frac{1}{1 - \Psi'_n(\alpha_j)} \quad (75)$$

Del estudio de estas dos ecuaciones viene que α_j será un cero de $F_n(z)$ sólo cuando $\Psi'(\alpha_j) < 1$, la cual corresponde a la condición de estabilidad para el punto fijo α_j de $\Psi_n(z)$. La derivada debe estar acotada por abajo ($\Psi'(\alpha_j) > -1$) para ser estable. Esta se satisface al considerar la función $F_{2n}(z)$. Observamos que cuando $\Psi'_n(\alpha_j)$ se acerca al valor -1 , entonces por la expresión (48) $\Psi'_{2n}(\alpha_j) = [\Psi'_n(\alpha_j)]^2$ tiende al valor uno y el coeficiente (75) tiende a infinito.

Entre los exponentes (75) existe la propiedad

$$\sum_j C_j = 0 \quad (76)$$

que es resultado de que la función de iteración sea un polinomio.

Los exponentes $C_j(\lambda)$ explican el fenómeno de bifurcación porque tienden a ∞ y cambian de signo en el valor de λ en que ocurre la bifurcación.

Se encuentra también en los exponentes una simetría en λ de las bifurcaciones respecto del valor $\lambda = 1$, que produce el mismo tipo de bifurcaciones y ciclos periódicos en el intervalo $-2 > \lambda > 1$ que aquellos que ocurren en $1 < \lambda < 4$.

El valor $\lambda = 1$ es un punto singular de la función $X - \Psi(X, \lambda)$, donde se cruzan las soluciones $X = 0$ y $X = 1 - 1/\lambda$, y donde las derivadas de dicha función respecto a las variables X y λ son cero. Este punto singular difiere de los puntos singulares asociados a la bifurcación doble o a la creación en pareja de algún período. En este punto la derivada de Ψ respecto a X tiende al valor uno para las dos soluciones (63) que ahí se cruzan.

Los puntos donde ocurre la bifurcación se caracterizan por la propiedad⁽¹⁶⁾ de que

$$\frac{\partial \Psi_n(X, \lambda)}{\partial X} = -1 \quad (77)$$

cuando X es punto fijo de Ψ_n . Entonces se deduce como consecuencia que

$$\frac{\partial \Psi_{2n}}{\partial X} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \Psi_{2n}}{\partial X^2} = 0 \quad , \quad (78)$$

y $\Psi_{2n}(X)$ tiene un punto de inflexión en la bifurcación. Aquí también la función $\Psi_{2n}(X, \lambda) - X$ tiene derivadas nulas respecto a las variables X y λ .

En cambio, donde ocurre la creación de un ciclo con su pareja inestable, la función tiene derivada igual a uno⁽¹⁶⁾. Esto acontece siempre que coexista más de un ciclo límite⁽¹³⁾, pero ahora la derivada de la función Ψ_n respecto a λ no es cero.

El orden con λ de los ciclos periódicos en el mapeo cuadrático fue descubierto por estudios con computadora de Metropolis, Stein y Stein^(14,15). A partir de este estudio se sabe que con el ciclo estable de período 4 coexisten dos puntos fijos inestables de período 1 y dos puntos de un ciclo inestable de período 2. Es decir, se puede predecir la historia en λ del ciclo. En este caso se encuentran inestables los ciclos que fueron estables para valores menores que λ .

Análogamente, cuando ocurre el primer ciclo de período 5 (para el mapa logístico en la vecindad de $\lambda = 3.7389$), hay $N_j = 2, 4, 2, 8, 7, 16, 16, 32, 38, \dots$ puntos correspondientes a ciclos inestables de períodos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ... respectivamente.

Estos números satisfacen la relación de recurrencia

$$N_{j+5} = 2N_{j+3} + N_j - 2 \quad . \quad (79)$$

Los N_j puntos incluyen períodos degenerados, por lo que deben analizarse. El análisis de estos números se hace como sigue. Los 38 puntos asociados al período 9 se descomponen en dos puntos de período 1 y cuatro ciclos inestables de período 9, dos de los cuales nacieron estables.

Los 32 puntos asociados al período 8 están formados por 2 puntos de período 1, 2 puntos de un ciclo de período 2, 4 puntos de un ciclo de período 4 y 24 puntos de período 8, no degenerado, que corresponden a un ciclo armónico del ciclo 4 y dos ciclos de 8 que nacieron en

una pareja estable-inestable y ahora son inestables los tres.

Los 16 puntos de período 6 consisten de 2 puntos de período 1, 2 puntos de período 2, 0 puntos de período 3 y 12 puntos de período 6 que corresponden a una pareja estable-inestable. Como no hay ciclos de período 3, tampoco hay armónicos de período 6 antes de este ciclo 5.

El cálculo se puede proseguir sin esfuerzo por computadora y encontramos 9775664 ciclos estables y 629 armónicos de período 50 antes de dicho ciclo de período 5.

El cálculo y su análisis se puede repetir para cualquier ciclo. Por ejemplo, antes del primer ciclo 6 (alrededor de $\lambda = 3.6276$ del mapa cuadrático), no hay ningún ciclo de período impar excepto los dos puntos fijos correspondientes a las expresiones (63). Pero hay $2 + 2 L_j$ puntos asociados al período $2j$, donde L_j son los números de Lucas emparentados con los números de Fibonacci.

La obtención de estos números y su estudio nos llevaría muchas páginas más, por lo cual una presentación de detalle se deja para una publicación aparte.

AGRADECIMIENTOS

Parte de este estudio se realizó cuando el autor fue investigador visitante del Centro de Mecánica Estadística de la Universidad de Texas en Austin. Por este conducto agradezco la hospitalidad de los Profesores Ilya Prigogine y Linda Reichl. Asimismo debo agradecer las discusiones valiosas con el Prof. Bill Schieve en Austin y con la Profa. María Teresa de la Selva en México. Agradezco también a la directiva de la Sociedad Mexicana de Física la oportunidad de presentar y discutir estas ideas antes de la Asamblea de la Sociedad y al Dr. Marco Antonio Rosales por comunicarme la referencia al trabajo de mecánica discreta de Greenspan que fue posible incluir en la bibliografía.

REFERENCIAS

1. D. Greenspan, Discrete Models, Addison Wesley Publ. Co., Massachusetts (1973).

2. H. Poincaré, Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, Vol. 3, Dover, New York (1957); C.M. Bender y S.A. Orzag, Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers, McGraw Hill, New York (1978).
3. L. Cesari, Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations, Springer Verlag, New York (1963).
4. J.B. Marion, Dinámica Clásica de las Partículas y Sistemas, Editorial Reverté, Barcelona (1975).
5. E.T. Whittaker y G.N. Watson, A Course of Modern Analysis, Cambridge University Press, Cambridge (1952).
6. M. Abramowitz y I.A. Stegun, editores, Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York (1965).
7. E.C.G. Sudarshan y N. Mukunda, Classical Dynamics: A Modern Perspective, J. Wiley & Sons, New York (1974).
8. M. Koenigs, Bull. des Sc. Math. 2^{me} serie VII (1883) 340, Ann. Sc. de l'Ecole Normales Sup. Suppl. I S.3 (1884).
9. Z.A. Melzac, Companion to Concrete Mathematics, Cap. 2, J. Wiley & Sons, New York (1973).
10. R.M. May, Nature 261 (1976) 459.
11. S.M. Ulam y J. von Neumann, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947) 1120.
12. J.F. Ritt, Trans Amer. Math. Soc. 21 (1920) 348.
13. M.P. Fatou, Bull. Soc. Math. France 47 (1919) 161.
14. N. Metropolis, M.L. Stein y P.R. Stein, J. Combinatorial Theory 15 (1973) (A) 25.
15. B. Derrida, A. Gervois y Y. Pomeau, J. Phys. A 12 (1979) 269.
16. J. Guckenheimer, Invent. Math. 39 (1977) 165.
17. M.J. Feigenbaum, J. Stat. Phys. 19 (1978) 25, 21 (1979) 6.
18. J.P. Gollub y S.V. Benson, J. Fluid Mech. 100 (1980) 449; A. Libchaber y J. Maurer, J. Phys. (Paris), Colloq. 41 (1980) C3-51; M. Giglio, S. Musazzi y U. Perini, Phys. Rev. Lett. 47 (1981) 243.
19. P.S. Lindsay, Phys. Rev. Lett. 47 (1981) 1349; C. Jeffries y J. Pérez, Phys. Rev. A 26 (1982) 2117; J. Testa, J. Pérez y C. Jeffries, Phys. Rev. Lett. 48 (1982) 714.
20. F.A. Hopf, D.L. Kaplan, R.L. Shoemaker y H.M. Gibbs, Jour. of the Optical Soc. 71 (1981) 1634.
21. Ch. Jordan, Calculus of Finite Differences, Chelsea Publ. Co., New York (1965).
22. E.T. Bell, The Development of Mathematics, McGraw Hill, New York (1945).