

SIGNIFICADO DE LAS SUPERFICIES CAUSTICAS EN OPTICA*

O. Cardona Núñez, J. Pedraza Contreras, A. Cornejo Rodríguez

Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica
Apartado Postal 216. 72000 - Puebla, Pue.

y

A. Cordero Dávila

Escuela de Ciencias Fisico-Matemáticas
Universidad Autónoma de Puebla
Apartado Postal 1152. 72000 - Puebla, Pue.

(recibido septiembre 23, 1982; aceptado noviembre 11, 1982)

RESUMEN

Se introduce el concepto y la formulación, en un plano, de las llamadas curvas cáusticas que físicamente representan la distribución de la irradiancia en la imagen de un punto objeto, producida por una componente o sistema ópticos. Por simplicidad se considera que dicha imagen proviene de un frente de onda cónico producido por el sistema óptico.

ABSTRACT

The concept and a simplified formulation of the so-called caustic curves are introduced. It is assumed that the caustic curve is produced by a conic wavefront coming from an optical system or component.

* Parte de este trabajo fue presentado en el VI Congreso Nacional de Enseñanza de la Física, realizado en la U. de Guadalajara, Guadalajara, Jal., noviembre, 1980.

1. INTRODUCCION

En general, las imágenes producidas por un sistema o componentes ópticos no son perfectas y adolecen de una serie de defectos llamados aberraciones⁽¹⁾. Como resultado de estas imperfecciones, se tiene que la distribución de la luz, que se supone debería estar en un punto imagen ideal, está, en realidad, sobre una superficie. Las superficies así formadas reciben el nombre de cáusticas y aunque desde el punto de vista experimental han sido observadas desde hace tiempo, su formulación matemática se ha ido desarrollando lentamente. El primer intento a este respecto fue realizado por Gullstrand⁽²⁾. En la actualidad este tópico ha adquirido mayor auge y desarrollos matemáticos más amplios y profundos se han estado realizando^(3,4), con la idea principal de poder expresar matemáticamente la forma de dichas superficies cáusticas.

En el presente trabajo se realiza un desarrollo simplificado para encontrar la formulación de las superficies cáusticas. Se supone que la forma del frente de onda proveniente del sistema o componente óptico, puede ser una cónica cualquiera (una circunferencia sería un caso particular). Es conveniente aclarar que el término "cónicas" se refiere a las secciones de revolución, tales como los hiperboloides, elipsoides y paraboloides, en el caso tridimensional, y sus correspondientes curvas en el plano.

Las derivaciones de las fórmulas que representarán el contorno de las superficies cáusticas se realizarán como sigue: En primer término se obtendrá la ecuación de las cónicas en una forma particular, pero que es la más comúnmente usada en óptica. A partir de dicha expresión matemática se obtendrá la fórmula para los radios de curvatura de las diferentes zonas del frente de onda, y a partir de ella se derivarán las fórmulas para las coordenadas de los puntos que generarán la superficie cáustica, pero medidas tanto a partir del vértice de la superficie o frente de onda, como del centro de curvatura paraxial del frente de onda. Puede ser que en lugar de un sistema se tenga una sola superficie óptica; en este último caso la cáustica formada es equivalente a la formada por un frente de onda proveniente de un sistema.

2. DERIVACION DE LA FORMULA PARA LAS CONICAS

Con el objeto de simplificar la formulación, los planteamientos se llevarán a cabo para un plano solamente, sin que esto implique perder generalidad pues es bastante sencillo pasar del caso bidimensional que presentaremos al caso tridimensional (en las siguientes fórmulas es necesario substituir sólo x^2 por $s^2 = x^2 + y^2$).

Como ejemplo del tipo de ecuación que queremos obtener para las cónicas, se derivará a continuación la fórmula para el caso particular de la circunferencia. Una vez logrado lo anterior, la formulación que desarrollemos para las cónicas tenderá a buscar la misma estructura de la Ec. (2).

En coordenadas rectangulares la ecuación de una circunferencia, cuyo centro está a lo largo del eje z , está dada por

$$x^2 + (z - r)^2 = r^2 \quad . \quad (1)$$

De la Ec. (1) fácilmente se obtiene

$$z = \frac{c x^2}{1 + \sqrt{1 - x^2 c^2}} \quad , \quad (2)$$

donde $c = 1/r$.

La representación de la Ec. (2) está mostrada en la Fig. 1 y de la misma se explica el signo positivo del radical del denominador de la Ec. (2). La conveniencia de expresar en óptica las curvas de los frentes de onda o superficies ópticas⁽⁵⁾ como se muestra en la Fig. 1, es porque generalmente se trabaja con los casquetes o secciones de las superficies y consecuentemente con los frentes de onda salientes del sistema. Cabe aclarar que los ejes de simetría respectivos de cada superficie, idealmente se suponen alineados respecto a un eje de simetría común, denominado el eje óptico del sistema.

En lo que sigue se derivará una expresión semejante a la Ec. (2) pero ahora para las cónicas, donde, como ya se mencionó, el caso de la circunferencia deberá estar contenido como un caso particular. Sin embargo, con el objeto de darle fluidez al escrito, los detalles de la

derivación no se presentarán. Los interesados pueden derivar sin problema alguno, paso a paso, los desarrollos presentados que resumen los resultados de mayor importancia.

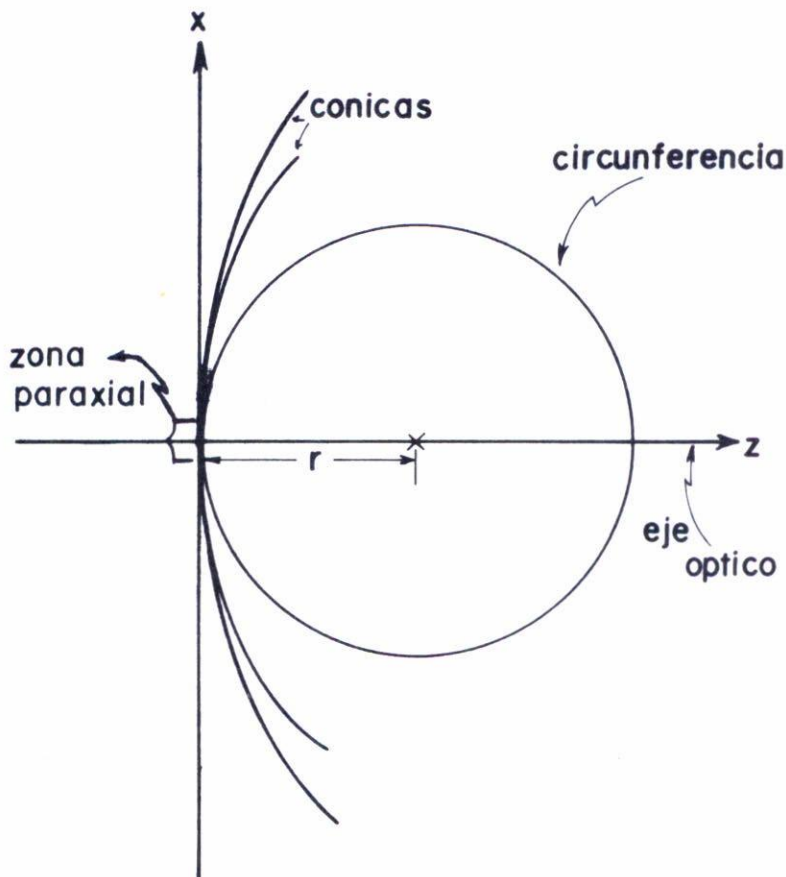


Fig. 1 Diferencias entre las secciones cónicas y la circunferencia, tomando como referencia esta última.

A partir de la ecuación general de segundo grado⁽⁶⁾,

$$a_{11} x^2 + a_{12} xz + a_{22} z^2 + 2a_{14} x + 2a_{24} z + a_{32} = 0 \quad , \quad (3)$$

nosotros deseamos obtener una ecuación muy semejante, en primer lugar, a

la Ec. (1) para de allí pasar a otra parecida a la Ec. (2). Para lograr este objetivo es necesario eliminar los términos cruzados $x y$, y el correspondiente a y . Esto se puede hacer mediante una rotación y traslación adecuadas de los ejes⁽⁷⁾, de tal manera que se obtiene una expresión simplificada dada por

$$x^2 + \lambda z^2 + 2 \mu z + F = 0 \quad . \quad (4)$$

Los valores de los coeficientes λ , μ y F pueden ser encontrados y expresados en función de algunos de los parámetros más conocidos de las cónicas, de tal manera que en referencia a la Fig. 2, es posible obtener las expresiones siguientes:

$$\lambda = \frac{b^2}{a^2} \quad , \quad \mu = -\frac{b^2}{a^2} \quad , \quad F = 0 \quad . \quad (5)$$

Sin embargo, en lugar de substituir los resultados de la Ec. (5) en la Ec. (4), expresaremos λ y μ en función de otros parámetros más convenientes y generalmente empleados en óptica. Estos parámetros son la constante de conicidad $K = -e^2$ (e =excentricidad), y el radio de curvatura r de la superficie en su zona paraxial (región cercana al eje óptico). Así tenemos que podemos escribir

$$\lambda = 1 + K \quad , \quad \frac{b^2}{a} = \frac{1}{c} \quad . \quad (6)$$

El signo de b^2/a de esta Ec. (6) se obtiene, considerando la curvatura c de la superficie con signo positivo, cuando el centro de curvatura está a la derecha del vértice. Substituyendo los valores de λ y μ obtenidos en las Ecs. (5) y (6), dentro de la Ec. (4) y al mismo tiempo resolviendo la ecuación de segundo grado obtenida para z , se obtiene

$$z = \frac{1 - \left[1 - (1 + K)c^2 x^2 \right]^{1/2}}{(1 + K)c} \quad , \quad (7)$$

donde el significado del signo negativo del paréntesis rectangular en el numerador se debe a que sólo se usa la rama negativa de la solución de la cuadrática, que al mismo tiempo mantiene la convención de signos explicada anteriormente.

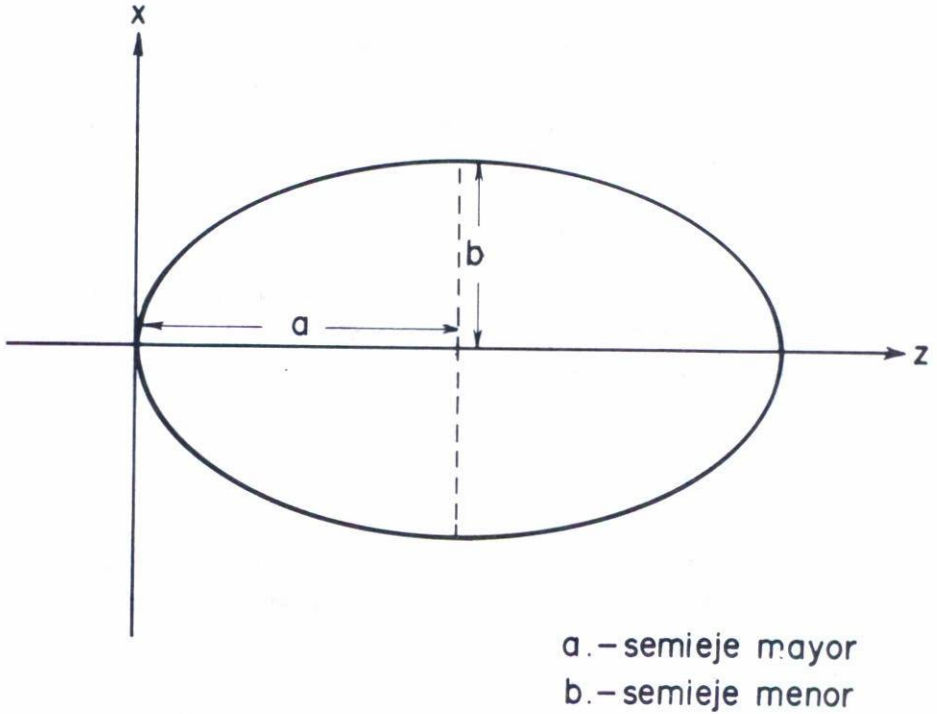


Fig. 2 Parámetros de una elipse.

Para evitar el caso singular que se presentaría en la Ec. (7) cuando $c = 0$ (superficies planas), la misma Ec. (7) la transformamos en

$$z = \frac{c x^2}{1 + [1 - (K + 1)c^2 s^2]^{1/2}} \quad , \quad (8)$$

que se obtiene a partir de dicha ecuación al multiplicar numerador y denominador por $\{1 + [1 - (1 + K)c^2 s^2]^{1/2}\}$. Por lo tanto las cónicas quedan representadas por la Ec. (8), considerando que los valores de la constante de conicidad (K) están dados de acuerdo a la siguiente tabla:

$K = 0$	esfera,
$K = -1$	parábola,
$K > 0$	elipse,
$K < -1$	hipérbola .

De acuerdo a la Ec. (8) y a nuestra convención de signos para la curvatura c , la curva para c positiva está mostrada en la Fig. 3(a) y la curva correspondiente para c negativa está en la Fig. 3(b).

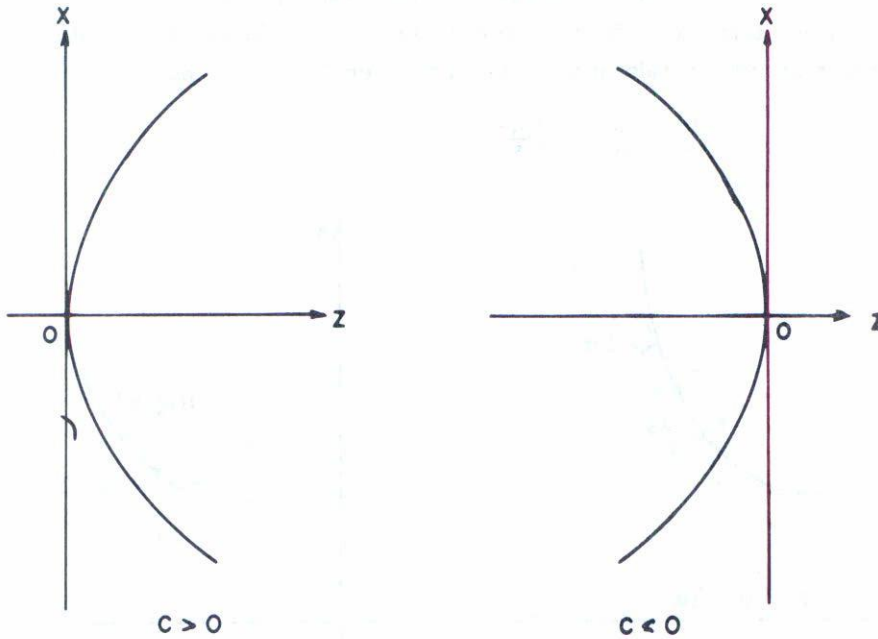


Fig. 3 Convención de signos para las curvaturas de las superficies más usualmente empleadas en óptica, considerando que la luz viaja de izquierda a derecha.

3. DETERMINACION DE LOS RADIOS DE CURVATURA PARA LAS DIFERENTES ZONAS DE UNA SUPERFICIE CONICA

Para hacer más intuitivo al lector el desarrollo de esta sección, quisiéramos recordar, en primer lugar, el caso particular de una circunferencia. En este caso es fácil visualizar que el radio de curvatura (r) de una circunferencia tiene el mismo valor para cualquier zona de un casquete de la superficie, y que la localización de las coordenadas del centro de curvatura también es un punto único. De ahí que con un compás se puedan trazar circunferencias. Luego entonces, preguntamos: en el caso de las cónicas, ¿se tiene también un solo radio de curvatura

y, consecuentemente, un solo centro de curvatura?

Para encontrar unas respuestas a las preguntas planteadas, vamos a tener que recurrir a algunos resultados de la geometría analítica⁽⁷⁾. Así tenemos que la curvatura (c) de una superficie cualquiera está definida como la razón de cambio de la inclinación de la tangente al recorrer un determinado arco de la curva (ver Fig. 4a). Es decir,

$$c = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d \alpha}{d s} \quad . \quad (9)$$

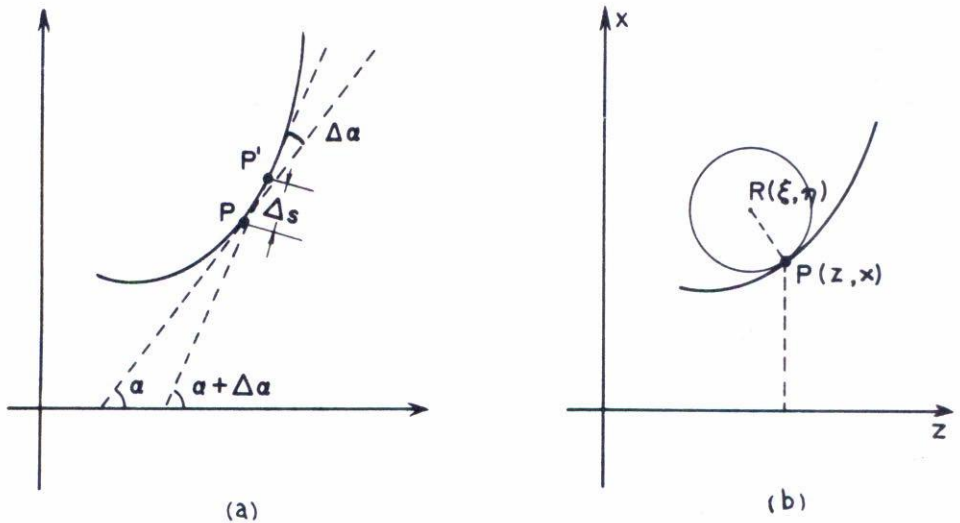


Fig. 4 (a) Definición de la curvatura en un punto cualquiera de una superficie en función de la razón de cambio de la tangente. (b) Circunferencia osculadora al punto $P(x, y)$ y con centro de curvatura en el punto $R(\xi, \eta)$.

Es a partir de esta definición, y para el caso de una superficie cualquiera, que se tiene la Ec. (10) en donde la curvatura para cierto punto o zona está en función de la primera y segunda derivadas z' y z'' :

$$c = \frac{z''}{(1 + z'^2)^{3/2}} \quad . \quad (10)$$

Si aplicamos lo anterior a la Ec. (8) se obtienen como resultados:

$$z' = \frac{cx}{[1 - (K + 1)c^2 x^2]^{1/2}} \quad , \quad (11)$$

$$z'' = c [1 - (K + 1)c^2 x^2]^{-3/2} \quad .$$

Por lo tanto, si consideramos que el radio de curvatura (R) es el inverso de la curvatura c ($c = 1/R$), se tiene que el caso general de R, para cualquier zona de una cónica, puede ser expresado como

$$R = \frac{1}{c} [1 - K c^2 x^2]^{3/2} \quad . \quad (12)$$

Analizando la Ec. (12) es fácil observar la dependencia de R, de la zona correspondiente para un valor particular de x que estemos considerando. Por otra parte, para el caso particular de una circunferencia, cuando $K = 0$, tenemos que $R = \frac{1}{c} = r$. Es decir, para esta última situación tenemos un radio único e independiente de la zona que se considere. Quisiéramos también hacer notar que para los casos de secciones en que estamos cerca del eje óptico, el producto $(cx)^2$ tiene valores muy pequeños y, por lo tanto, el radio de curvatura es casi el mismo para cualquier cónica, y dicho radio de curvatura es denominado generalmente en óptica como el radio de curvatura paraxial. Con referencia a la Fig. 1, se tiene que cerca del eje óptico todas las cónicas tienden a la circunferencia.

Por lo tanto, como respuesta a la pregunta sobre si existe un solo valor para la curvatura o el radio de curvatura de una cónica, hemos encontrado que no existe un valor único (ver resultados mostrados en la Tabla I). En la sección siguiente se derivarán las ecuaciones para determinar las coordenadas de dichos centros de curvatura, correspondientes a los diferentes radios $R(x)$, tomando como origen de coordenadas ya sea el centro de curvatura o el vértice de la superficie o frente de onda.

4. DETERMINACION DE LOS CENTROS DE CURVATURA DE UNA CONICA

De los resultados anteriores, y después de hacer un análisis

cuantitativo e intuitivo, es difícil concebir la existencia de un solo centro de curvatura para los diferentes radios de curvatura. Ahora bien, como ya se mencionó, además de conocer las magnitudes de los radios de curvatura (ver Tabla I), lo que también es importante e interesante es determinar la posición de los centros de curvatura (c.c. de la Fig. 5a) que correspondan a los radios de curvatura de las diferentes zonas del frente de onda o superficie óptica considerada.

TABLA I

x	z	R(x)	$\xi = z_c$	η	x_c
0.5	1.25E-3	100.0038	1.25E-5	100.0038	3.75E-3
1.0	5.00E-3	100.0150	1.00E-4	100.0150	1.50E-2
10.0	0.50	101.5038	0.1000	101.5000	1.50E-0
25.0	3.1250	109.5200	1.5625	109.3750	9.375
50.0	12.5000	139.7543	12.500	137.5000	37.500
100.0	50.0000	282.8427	100.000	250.0000	150.000

Tabla I Parábola con $K = -1$ y radio de curvatura paraxial $r = 100$ cm. Todas las unidades están en cm. Se han dejado diferentes números de cifras significativas en los valores de los diferentes parámetros z , R , ξ , η , z_c y x_c para ejemplificar las variaciones en ellos.

Aunque aquí no se va a dar la derivación de la fórmula para determinar las coordenadas ξ y η de los centros de curvatura de una curva cónica, como un resultado del cálculo diferencial (ver por ejemplo la Ref. 7) se tiene que

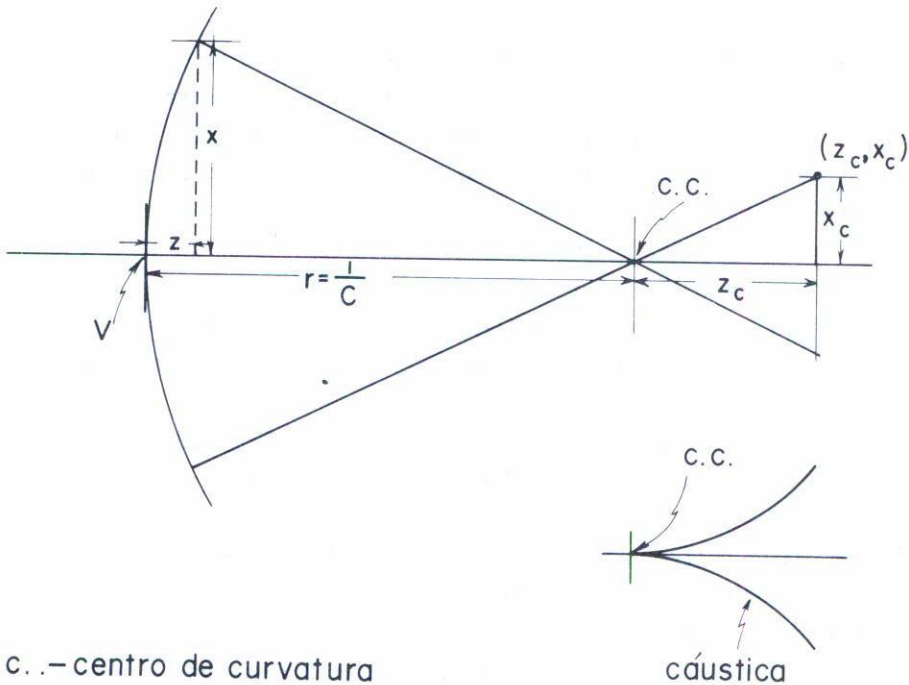
$$\xi = x - \frac{z' (1 + z'^2)}{z''} , \quad (13)$$

$$\eta = z + \frac{1 + z'^2}{z''} ,$$

donde z' y z'' significan la primera y segunda derivadas de z con respecto

a x ; las coordenadas ξ y η están medidas a partir del vértice V de la cónica (ver Fig. 5).

Lo que a continuación se presentará son las mismas coordenadas de los centros de curvatura pero ahora medidas a partir del centro de curvatura (c.c.) de la zona paraxial de la curva bajo consideración y las designaremos por z_c y x_c . La realización de este cambio se debe a que en óptica un parámetro importante que se usa tanto teórica como experimentalmente es dicho centro de curvatura paraxial, cuyo valor numérico es igual a r . De hecho, esto ya se había mencionado y aparece en la Ec. (7) donde $c = 1/r$.



c.c. — centro de curvatura

Fig. 5 (a) Localización de los diferentes centros de curvatura de una superficie cónica, correspondientes a diferentes puntos a lo largo de la misma. (b) Representación de la superficie cáustica donde se localizan los centros de curvatura (ver Tabla I).

Para encontrar las ecuaciones de las coordenadas de los centros

de curvatura con respecto al c.c. seguiremos los resultados obtenidos en la Ref. 8, de donde se tiene

$$\begin{aligned} z_c &= -Kz [3 + A (A - 3)] \quad , \\ x_c &= -xcKz \frac{[2 + A (A - 3)]}{1 - A} \quad , \end{aligned} \tag{14}$$

con $A = cz(K + 1)$.

5. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Los resultados aquí obtenidos los podríamos resumir como sigue: La Ec. (12) nos permite calcular los valores $R(x)$ de los radios de curvatura. Con las Ecs. (13) y (14) podemos calcular las coordenadas de los centros de curvatura con respecto al vértice y al centro de curvatura, respectivamente.

En la Tabla I, junto a los diferentes valores de $R(x)$, están tabulados también los valores de las coordenadas (ξ, η) y (x_c, y_c) . En la Fig. 5(b) se muestra una amplificación de la forma de la curva cáustica definida por los puntos correspondientes a los diferentes centros de curvatura.

Debe quedar claro para el lector que la longitud de la curva cáustica va en función directa del tamaño de la superficie o frente de onda considerado. Por otra parte, para una superficie o sistema óptico, de los cuales emerge un frente de onda afectado por aberraciones, la cáustica adquiere una forma compleja y de dimensión variable. En la Fig. 6 se muestra una fotografía de dichas superficies cáusticas.

Antes de terminar nos gustaría hacer énfasis en la realidad experimental de las cáusticas⁽⁹⁾, que definitivamente son las imágenes de puntos objetos, pero que en lugar de ser puntos imágenes son superficies visibles (cuando se forman imágenes reales) donde está distribuida la irradiancia de la imagen. A diferencia de las nociones de rayos y frentes de onda que son empleados para interpretar muchos fenómenos en óptica, las cáusticas poseen una realidad cuyo tratamiento matemático ha lla-

mado la atención en el transcurso del tiempo y actualmente está sufriendo transformaciones, encontrándose diversas aplicaciones a los resultados hasta ahora analizados y obtenidos.

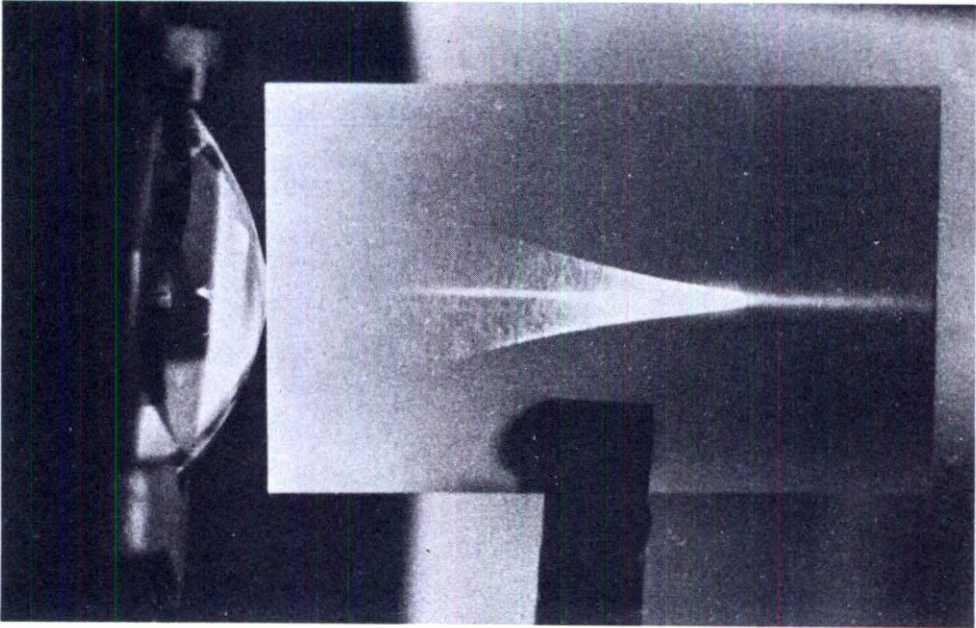


Fig. 6 Superficie cáustica producida por una lente simple iluminada con un láser de He-Ne de baja potencia.

En base a todo lo anterior, quisiéramos recordar la doble finalidad del presente trabajo en el área de enseñanza. Una de ellas fue la de presentar material que le fuera accesible al estudiante; y la segunda consistió en presentarle, al mismo tiempo, una perspectiva nueva de un tema clásico en óptica pero que, al igual que otras ramas de la ciencia y la física en particular, en la actualidad se le busca menos enfoques, desarrollos y aplicaciones.

REFERENCIAS

1. Jenkins, F.A., White, H.E., Fundamentals of Optics, McGraw Hill - Kogakusha (Int. Stud. Edition), Cap. 9, cuarta ed. (1976) p. 147.

2. Gullstrand, A., Su. Vetensk Handl 41 (1906) 1 - 119.
3. Stavroudis, O.N., The Optics of Rays, Wavefronts and Caustics, Academic Press (1972).
4. Berry, M.V., Upstill, C., "Progress in Optics", Cap. IV, Catastrophe Optics: Morphologies of Caustic and their Diffraction Patterns, Ed. E. Wolf, North-Holland (1980).
5. Brueggemann, H.F., Conic Mirrors, Focal Press, London & New York (1968).
6. Wexler, Ch., Geometría Analítica, Montaner y Simon, S.A., Barcelona (1962).
7. Longley, W., Smith, P. y Wilson, W., Analytic Geometry and Calculus, Ginn & Co. (1952) pp. 394 - 403.
8. Cornejo, A., Malacara, D., Appl. Opt. 17 (1978) 18.
9. Stavroudis, O.N., Optics and Las. Tech., 185 (1978), "Generalized Ray Tracing and the Caustic Surface".