Revista Mexicana de Física 30 no. 1 (1983) 83-89

MODIFICACION A LA METRICA DE REISSNER — NORDSTROM EN UNA COSMOLOGIA DE EINSTEIN — DE SITTER

L. Nuñez, H. Rago, L. Aulestia

Departamento de Fisica, Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes
Zona Postal 5101. Mérida - Venezuela

(recibido mayo 18, 1983; aceptado julio 20, 1983)

RESUMEN

Se propone una modificación a la métrica de Reissner - Nordstrφm de tal forma que tienda asintóticamente al modelo de Einstein-De Sitter. Se encuentra que la evolución de este modelo impone una variación temporal de la masa y de la carga de la partícula. Dentro de este esquema, se calculan la cuadricorriente y el tensor energía - momento asociados con la partícula.

ABSTRACT

A modification of the Reissner - Nordstrom metric, which makes it tend asymptotically to the Einstein-De Sitter model, is proposed. It is found that the evolution of this model imposes a time variation on the mass and charge of particle. The associated four-current and energy - momentum tensor are calculated within this framework.

1. INTRODUCCION

En un artículo escrito en 1979, que en lo sucesivo designaremos como I, Dirac[1] concluyó que el modelo de universo consistente con la hipótesis de los grandes números es el universo de Einstein-De Sitter. Puesto que la métrica de Schwarzchild se obtiene con la suposición de que el espacio-tiempo es asintóticamente minkowskiano, Dirac propone una modificación de esta métrica de tal suerte que se ajuste al universo de Einstein - De Sitter a grandes distancias de la masa de Schwarzchild.

En este trabajo se realiza el ajuste correspondiente a la métrica generada por una partícula cargada. La métrica resultante, que llamaremos métrica de Reissner - Nordstrφm modificada, es necesariamente no estática. En la sección 2 hallaremos su forma explícita, así como la dependencia de los parámetros m y e con el tiempo cósmico. En la sección 3 calculamos el tensor de energía - momento y la cuadricorriente correspondientes, a través de las ecuaciones de Einstein - Maxwell.

2. ECUACIONES DE EINSTEIN - MAXWELL

Consideremos las ecuaciones de campo en la teoría de Einstein - Maxwell,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = -8\pi E_{\mu\nu} \quad , \tag{1-a}$$

$$E^{\mu}_{\nu} = - F^{\mu\alpha}F_{\nu\alpha} + \frac{1}{4}\, \delta^{\mu}_{\nu}\, F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \quad , \tag{1-b}$$

$$F^{\mu\nu} = A^{\mu,\nu} - A^{\nu,\mu} \quad , \tag{1-c}$$

$$F^{\mu\nu;\nu} = J^{\mu} \quad , \tag{1-d}$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, R la curvatura escalar, $E_{\mu\nu}$ es el tensor de energía - momento asociado con el campo electromagnético, $F_{\mu\nu}$ y J^{μ} el tensor de Maxwell y el cuadrivector corriente eléctrica respectivamente.

Es bien sabido[2] que la única solución esféricamente simétrica y asintóticamente plana a estas secciones, con $J^{\mu} = 0$ y $F_{\mu\nu} \neq 0$, es la solución estática de Reissner - Nordstrøm, que en las coordenadas usuales $(t,\bar{r},\theta,\phi)$ tiene la forma

$$ds^2 = (1 - \frac{2m}{\bar{r}} + \frac{e^2}{\bar{r}^2})\, dt^2 - (1 - \frac{2m}{\bar{r}} + \frac{e^2}{\bar{r}^2})^{-1}\, d\bar{r}^2 - \bar{r}^2(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta d\phi^2) \quad . \tag{2}$$

El primer paso para obtener la modificación requerida en la métrica (2) es reescribirla en coordenadas isotrópicas (t,r,θ,ϕ). Un cálculo simple da

$$ds^2 = \bar{\alpha}^2(r)\, dt^2 - \bar{\beta}^2(r)\, [\, dr^2 + r^2(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta d\phi^2)\,] \quad , \tag{3}$$

donde

$$\bar{\alpha}\,(r) = \frac{(1 - \frac{m^2}{4r^2} + \frac{e^2}{4r^2})}{(1 + \frac{m}{2r})^2 - \frac{e^2}{4r^2}} \tag{4}$$

y

$$\bar{\beta}\,(r) = \left[\, (1 + \frac{m}{2r})^2 - \frac{e^2}{4r^2} \right] \quad . \tag{5}$$

La comparación de (3) con la métrica de Einstein - De Sitter,

$$ds^2 = dt^2 - t^{4/3}\, [\, dr^2 + r^2(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta d\phi^2)\,] \quad , \tag{6}$$

sugiere modificar las funciones $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$ multiplicando $\bar{\beta}$ por $t^{2/3}$ y permitiendo que e y m dependan de t. El resultado es que ahora

$$ds^2 = \alpha^2(r,t)\, dt^2 - \beta^2(r,t)\, (dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2\mathrm{sen}^2\theta d\phi^2) \quad , \tag{7}$$

donde

$$\alpha(r,t) = \frac{1 - \frac{m^2(t)}{4r^2} + \frac{e^2(t)}{4r^2}}{(1 + \frac{m(t)}{2r})^2 - \frac{e^2(t)}{4r^2}} \tag{8}$$

y

$$\beta^2(r,t) = \left[\left(1 + \frac{m(t)}{2r}\right)^2 - \frac{e^2(t)}{4r^2} \right]^2 t^{4/3} \quad . \tag{9}$$

Siguiendo a I, la dependencia de m y e con el tiempo se encuentra tratando de satisfacer el sistema original de Einstein - Maxwell, tanto como sea posible, para lo cual escribimos

$$R_{01} - \frac{1}{2} g_{01} R = -8\pi E_{01} \quad ; \tag{10}$$

pero (1-b) nos permite afirmar que $E_{01} = 0$, y como $g_{01} = 0$ podemos escribir

$$R_{01} = 0 \quad , \tag{11}$$

que concuerda con la ecuación usada en I. Esta condición para la métrica puede ser integrada una vez para obtener

$$\dot{\beta} = \alpha\beta\, F(t) \quad ,$$

donde F(t) es una función desconocida de t y el punto significa derivada parcial respectc a t. El cálculo explícito da

$$\frac{2t^{-1}}{3} \left[\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2 - \frac{e^2}{4r^2} \right] + \frac{\dot{m}}{r}\left(1 + \frac{m}{2r}\right) - \frac{\dot{e}^2}{4r^2} = \left(1 - \frac{m^2}{4r^2} + \frac{e^2}{4r^2}\right) F(t) \quad .$$

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de r a ambos lados de esta ecuación, conseguimos

$$\frac{2}{3} t^{-1} = F(t) \quad , \tag{12-a}$$

$$\frac{2}{3} m + t\dot{m} = 0 \tag{12-b}$$

y

$$\frac{m\,\dot{m}\,t}{2} - \frac{\dot{e}^2 t}{4} = 0 \quad ; \tag{12-c}$$

concluyendo que

$$m = m_o t^{-2/3} \tag{13-a}$$

y

$$e^2 = e^2{}_o t^{-4/3} \quad , \tag{13-b}$$

por lo que la métrica (7) está completamente determinada.

3. TENSOR ENERGIA - MOMENTO Y CUADRICORRIENTE

Las modificaciones impuestas a la métrica de Reissner-Nordstrφm tienen la consecuencia de que el tensor de energía-impulso no es simplemente $E_{\mu\nu}$. Por inspección puede verse que es posible una separación en la forma

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(0) + T_{\mu\nu}(1) \quad , \tag{14}$$

donde $T_{\mu\nu}(0)$ no depende de las derivadas temporales de α y β. El cálculo demuestra que $T_{\mu\nu}(0)$ es formalmente el tensor de Reissner-Nordstrφm en coordenadas isotrópicas pero con m y e dependiendo de t. Por otra parte, las únicas componentes no nulas de $T_{\mu\nu}(1)$ son

$$T^0_0(1) = \frac{4}{3} t^{-2} \tag{15-a}$$

y

$$T^1_1(1) = T^2_2(1) = T^3_3(1) = \frac{4}{3} t^{-2}(1 - \alpha^{-1}) \quad ; \tag{15-b}$$

estas componentes pueden ser expresadas en la forma usual del tensor de energía - momento de un fluido perfecto:

$$T_{\mu\nu}(1) = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} \quad , \tag{16}$$

donde u_μ es la cuadrivelocidad, $\rho = T^0_0(1)$ y $p = -T^1_1(1)$. Podemos por tanto afirmar que hay una densidad efectiva $\rho_{ef} = \rho + p$ y una presión dadas

$$\rho_{ef} = \frac{4}{3} t^{-2} \alpha^{-1} \tag{17}$$

y

$$p = \frac{4}{3} t^{-2} (\alpha^{-1} - 1) \quad . \tag{18}$$

En ausencia de la partícula o a distancias muy grandes de ella, hay una densidad cosmológica $\rho_{ef} = \frac{4}{3} t^{-2}$ proveniente del modelo de Einstein - De Sitter, y presión nula. La presencia de la partícula modifica la densidad por un factor α^{-1} y da lugar a una presión dada por (18) en correspondencia formal con I, cuyos resultados recobramos cuando hacemos $e = 0$.

La Ec. (1-d) hace posible calcular la cuadricorriente. Como es usual, elegimos el cuadrivector potencial como

$$A_\mu = \delta^0_\mu \frac{e(t)}{\beta r} \quad . \tag{19}$$

El correspondiente tensor de Maxwell $F_{\mu\nu}$ tiene componentes diferentes de cero:

$$F_{10} = -F_{10} = \left[1 - \left(\frac{m}{2r} \right)^2 + \left(\frac{e}{2r} \right)^2 \right] \frac{e(t)}{\beta^2 r^2} \quad , \tag{20}$$

de donde se obtiene directamente $J_\mu = 0$.

4. CONCLUSIONES

Hemos obtenido las modificaciones necesarias para lograr que la métrica de Reissner - Nordstrøm tienda asintóticamente al modelo de universo de Einstein - De Sitter. En particular se encontró que $m \propto t^{-2/3}$ y $e \propto t^{-4/3}$ haciendo constante la relación e/m. Es importante señalar que a diferencia de otros casos(3,4) donde los parámetros e y m se hacen dependientes de t, aquí la variación temporal es una consecuencia de la expansión del universo.

Incidentalmente observemos que una métrica de la forma

$$ds^2 = (1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2})dt^2 - \frac{(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2})^{-1}}{(1 - Kr^2)} R^2(t)dr^2 - R^2r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta\phi^2) \quad ,$$

que para pequeñas distancias es una métrica tipo Reissner - Nordstrøm y para valores grandes de r tiende a la métrica de Robertson - Walker, permite obtener exactamente la misma dependencia temporal para la carga y la masa, independientemente del parámetro K[5].

Finalmente, notemos que para el caso $e = 0$ se reproducen los resultados de I.

REFERENCIAS

1. P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. Lond. A, 365 (1979) 19.
2. B. Hoffmann, Quat. J. Math., 4 (1932) 179.
3. P.C. Vaidya, Proc. Ind. Acad. Sciences, A33 (1951) 264.
4. W.B. Bonnor y P.C. Vaidya, Gen. Rel. and Gravit., Vol. 1, No. 2 (1970) 127.
5. H. Rago y L. Nuñez (1981). Trabajo no publicado.