

SOBRE EL TEOREMA DE VON NEUMANN DE VARIABLES OCULTAS

A. Nieva

Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

(recibido febrero 17, 1983; aceptado septiembre 6, 1983)

RESUMEN

El presente trabajo tiene como objeto mostrar que la demostración de von Neumann sobre inexistencia de variables ocultas es matemáticamente impecable, pero que está utilizando implícitamente una hipótesis muy restrictiva, a saber, que toda probabilidad en la mecánica cuántica debe surgir del formalismo matemático usual de ella. Pero si se acepta cierto principio físico heterodoxo de carácter general, entonces se da cabida a la existencia de probabilidades conjuntas, a las probabilidades condicionales y, por consecuencia, a ciertos entes matemáticos que formalmente cumplen las condiciones que se suele pedir a ciertas variables para ser variables ocultas. Además, se obtiene que esos entes resultan ser dispersivos.

ABSTRACT

The object of the present paper is to show that von Neumann's

proof that hidden variables do not exist is mathematically impeccable, but that he is implicitly employing a very restrictive hypothesis which is that every probability in quantum mechanics must arise from its usual mathematical formalism. But if a certain heterodox physical principle of a general character is accepted, the existence of joint probabilities may be established, leading to conditional probabilities and, in consequence, to certain mathematical entities that formally fulfill the conditions that are usually required for certain variables to be interpreted as "hidden". Those entities turn out to be dispersive.

1. INTRODUCCION

El criterio de von Neumann, como lo bautizó Mme. P. Février⁽¹⁾, para probar que el comportamiento en el mundo atómico es acausal o indeterminista esencialmente, consiste en probar que existe un ensamble que sea a la vez puro y dispersivo.

Von Neumann demuestra⁽²⁾ que todo ensamble generado por el vector de estado, ψ ($|\psi| = 1$) es puro y dispersivo. La demostración es a partir de la hipótesis implícita de que todas las probabilidades sean originadas de la manera ya conocida por su operador estadístico o, en general, por el análisis funcional, que es el formalismo matemático usual (F.M.U.) de la mecánica cuántica (M.C.).

Los aspectos que toca el presente trabajo son los de mostrar que la demostración de von Neumann es matemáticamente inobjetable, para lo cual se demuestra su teorema a partir de lo que se ha tenido, se ha aceptado y se ha usado desde Born: un vector de estado que genera un ensamble de sistemas cuánticos y una colección de operadores por medio de los cuales se conocen ciertas propiedades estadísticas de los sistemas de ese ensamble; y que no es objetando la validez de la herramienta matemática o la lógica que se usan como se puede echar abajo la "demostración" de que "la naturaleza ha prescindido del principio de razón suficiente", sino replanteando las concepciones de base sobre las que von Neumann construye la mecánica cuántica. Es por esto que se hace una formulación matemática que permite la construcción de ciertas probabilidades condicionales que no surgen de y en el F.M.U. de la M.C., pero que hacen que los ensambles originados por un vector de estado sean impuros y dispersivos, cumpliendo así esa condición necesaria, mas no suficiente, que von Neumann

pide a una teoría para ser causal, para tener variables ocultas, *i.e.*, para ser determinista esencialmente.

La formulación matemática que se presenta en este trabajo tiene por base física el principio de que en cada instante un sistema cuántico tiene simultáneamente energía, posición, momento, espín, etc.; principio sostenido, por ejemplo, por Einstein⁽³⁾, de la Peña y Cetto⁽⁴⁾, y Wigner⁽⁵⁾ (¡aunque no se crea!). Este principio hace posible la construcción de probabilidades conjuntas de magnitudes físicas asociadas a operadores hermiteanos que no conmutan y cuyas probabilidades marginales coinciden con las usuales en la M.C.^(6,7); aunque, hay que recalcarlo, éstas no pueden surgir del F.M.U. de la M.C.⁽⁷⁾. Con esta formulación se llega entonces a que: a) no se puede afirmar que la mecánica cuántica es una teoría acausal, y b) no se puede afirmar que no existen variables ocultas.

Para mostrar lo dicho, nos es suficiente trabajar en un espacio de Hilbert complejo y separable; además, usaremos la representación espectral de un operador hermiteano continuo, \hat{X} , definido y con valores en aquél, $\sum x_i \hat{X}_i$, donde x_i es el autovalor correspondiente al autoespacio X_i , compuesto por todos los autovectores correspondientes a x_i ; \hat{X}_i representará la proyección asociada al autoespacio X_i ⁽⁸⁾.

2. DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE VON NEUMANN.

En la sección 1 del Cap. IV del libro de von Neumann⁽²⁾, éste da un criterio que permite determinar si una teoría es indeterminista esencialmente: es suficiente probar que existe un ensamble que sea a la vez puro y dispersivo.

Ensamble puro.- Sea E un ensamble donde para cada magnitud física R con valores r_1, r_2, \dots se tiene su distribución de probabilidad $P(r_i)$, $i = 1, 2, \dots$. El ensamble E se dice que es impuro si es mezcla de dos (o más) subensambles diferentes E' y E'', con probabilidades P' y P'', respectivamente, tales que para cada magnitud física R se tiene que

$$P(r_i) = \alpha P'(r_i) + \beta P''(r_i) \quad (i = 1, 2, \dots) \quad ,$$

donde α y β son reales positivos que suman uno y que además son independientes de R . Y se dirá que el ensamble es homogéneo o puro cuando la fórmula anterior implique que

$$P(r_i) = P'(r_i) = P''(r_i) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

para cualquier magnitud física R .

Ensamble dispersivo.- Un ensamble es dispersivo si existe al menos una magnitud física definida en él con dispersión positiva. Y será no dispersivo cuando toda magnitud física definida en él sea constante, i.e., con dispersión cero.

Partiendo del F.M.U. de la M.C. (el análisis funcional) y del ensamble de sistemas cuánticos preparado en cierto estado, se puede demostrar en forma matemáticamente impecable que la mecánica cuántica es una teoría indeterminista esencialmente y, por lo tanto, se demuestra la inexistencia de variables ocultas. Veamos: consideremos un espacio de Hilbert y una colección de operadores hermiteanos $\hat{A}, \hat{B}, \dots, \hat{Z}$, definidos y con valores en ese espacio, de importancia para cierto problema. Consideremos el ensamble $E_{|a\rangle}$ de sistemas cuánticos preparados en cierto estado $|a\rangle$ autovector del operador \hat{A} , con autovalor a . El valor medio de la magnitud física X , asociada al operador \hat{X} , con desarrollo espectral $\hat{X} = \sum x_i \hat{X}_i$, sobre el ensamble $E_{|a\rangle}$ lo denotaremos por $M_{|a\rangle} X$ en vez de la notación usual $\langle a | \hat{X} | a \rangle$; y este valor medio es igual a

$$M_{|a\rangle} X = \langle \hat{X} | a \rangle, | a \rangle = \sum x_i \langle \hat{X}_i | a \rangle, | a \rangle = \sum x_i \| \hat{X}_i | a \rangle \|^2 \quad ,$$

donde $\| \hat{X}_i | a \rangle \|^2$ es la probabilidad de que sobre ese ensamble la magnitud física X tome el valor x_i .

La dispersión de X sobre ese ensamble la denotaremos por $D_{|a\rangle} X$ y será igual, como es usual, a

$$\begin{aligned} M_{|a\rangle} (X - M_{|a\rangle} X)^2 &= \langle (\hat{X} - M_{|a\rangle} X)^2 | a \rangle, | a \rangle \\ &= \langle (\hat{X} - M_{|a\rangle} X) | a \rangle, \langle (\hat{X} - M_{|a\rangle} X) | a \rangle \quad , \end{aligned}$$

y esto último en vista de que $(\hat{X} - M_{|a\rangle} X)$ es operador hermiteano.

Con esto veamos que $E_{|a\rangle}$ es dispersivo y puro:

1° Es dispersivo.- Tomemos un operador \hat{R} de la lista de operadores anterior que para nada commute con \hat{A} , situación que debe ocurrir para que esa lista sea digna de tomarse en cuenta; como $D_{|a\rangle} R \geq 0$ siempre, supongamos que $D_{|a\rangle} R = 0$; utilizando la última expresión de la dispersión, tendremos que $(\hat{R} - M_{|a\rangle} R)|a\rangle = 0$; de lo cual se obtiene que $\hat{R}|a\rangle = (M_{|a\rangle} R)|a\rangle$, lo cual nos dice que, al ser $|a\rangle$ autovector de \hat{R} , que \hat{R} y \hat{A} conmutan al menos sobre el subespacio lineal generado por $|a\rangle$. Por lo tanto, si \hat{R} para nada commuta con \hat{A} entonces debe tenerse que $D_{|a\rangle} R > 0$. Entonces el ensamble $E_{|a\rangle}$ es dispersivo.

2° Es ensamble puro.- Supongamos que el ensamble $E_{|a\rangle}$, con probabilidad $P_{|a\rangle}$, es impuro, i.e., que $E_{|a\rangle}$ es mezcla de dos subensambles $E'_{|a\rangle}$ y $E''_{|a\rangle}$, cuyos correspondientes sistemas cuánticos también están en el estado $|a\rangle$ pero cuyas respectivas probabilidades $P'_{|a\rangle}$ y $P''_{|a\rangle}$, diferentes, se relacionan con $P_{|a\rangle}$ por medio de

$$P_{|a\rangle} = \alpha P'_{|a\rangle} + \beta P''_{|a\rangle},$$

donde α y β son números reales positivos que suman uno.

Tomemos la magnitud física R , correspondiente al operador $\hat{R} = \sum r_i \hat{R}_i$; si para cada i , $P_{|a\rangle}(r_i)$ denota la probabilidad de que la magnitud física R tome el valor r_i sobre los sistemas del ensamble $E_{|a\rangle}$, $P'_{|a\rangle}(r_i)$ denota la probabilidad de que la magnitud física R tome el valor r_i sobre los sistemas de ensamble $E'_{|a\rangle}$ y $P''_{|a\rangle}(r_i)$ denota la probabilidad de que la magnitud física R tome el valor r_i sobre los sistemas del ensamble $E''_{|a\rangle}$, entonces, por la relación entre estas probabilidades, tendremos que

$$P_{|a\rangle}(r_i) = \alpha P'_{|a\rangle}(r_i) + \beta P''_{|a\rangle}(r_i)$$

para cada valor r_i de cada magnitud física R ; como esas probabilidades deben ser originadas por el formalismo matemático usual, entonces deberán existir proyecciones \hat{R}_i , \hat{R}'_i y \hat{R}''_i con las cuales $P_{|a\rangle}(r_i) = \|\hat{R}_i|a\rangle\|^2$, $P'_{|a\rangle}(r_i) = \|\hat{R}'_i|a\rangle\|^2$ y $P''_{|a\rangle}(r_i) = \|\hat{R}''_i|a\rangle\|^2$. Tendremos entonces que

$$|\hat{R}_i |a\rangle|^2 = \alpha |\hat{R}'_i |a\rangle|^2 + \beta |\hat{R}''_i |a\rangle|^2 \quad ;$$

de la cual se obtiene

$$(\hat{R}_i |a\rangle, |a\rangle) = \alpha (\hat{R}'_i |a\rangle, |a\rangle) + \beta (\hat{R}''_i |a\rangle, |a\rangle) \quad ;$$

y como esto sucede para cualquier vector normalizado, se obtiene que

$$\hat{R}_i = \alpha \hat{R}'_i + \beta \hat{R}''_i \quad ,$$

obteniendo, así, una formulación del problema probabilista en términos de proyecciones, o sea, del F.M.U. de la M.C. Como los únicos autovalores de \hat{R}_i son 0 ó 1, tendremos que: si ψ es un vector normalizado tal que $\hat{R}_i \psi = \delta \psi$, donde δ es 0 ó 1; tendremos que $\delta = (\hat{R}_i \psi, \psi)$.

Si en este producto sustituimos $\alpha \hat{R}'_i + \beta \hat{R}''_i$ por \hat{R}_i , obtendremos que

$$\delta = \left[(\alpha \hat{R}'_i + \beta \hat{R}''_i) \psi, \psi \right] = \alpha (\hat{R}'_i \psi, \psi) + \beta (\hat{R}''_i \psi, \psi) \quad .$$

Y, como $(\hat{S} \psi, \psi) = (\hat{S} \psi, \hat{S} \psi) = \|\hat{S} \psi\|^2$ para cualquier proyección \hat{S} , obtenemos de lo anterior que $\delta = \alpha \|\hat{R}'_i \psi\|^2 + \beta \|\hat{R}''_i \psi\|^2$. Ahora, tomando en cuenta las condiciones sobre α y β , obtenemos que $\|\hat{R}'_i \psi\|^2 = \|\hat{R}''_i \psi\|^2 = \delta$; por lo cual $(\hat{R}'_i \psi, \psi) = (\hat{R}''_i \psi, \psi) = \delta$. Y esto implica que $\hat{R}'_i \psi = \hat{R}''_i \psi = \delta \psi$.

Por último, tomando cualquier vector normalizado ψ y expresándolo como la suma de dos vectores ortogonales, i.e.,

$\psi = \hat{R}_i \psi + (\hat{I} - \hat{R}_i) \psi$, donde $\hat{I} - \hat{R}_i$ es la proyección ortogonal correspondiente a \hat{R}_i , tendremos por lo anterior que

$$\hat{R}_i \psi = \hat{R}'_i \psi = \hat{R}''_i \psi \quad .$$

Con lo cual hemos demostrado que las proyecciones \hat{R}_i , \hat{R}'_i y \hat{R}''_i son iguales.

Por lo tanto, si en un ensamble generado por un vector de estado $|a\rangle$ su probabilidad $P|a\rangle$ es combinación lineal convexa de dos probabilidades $P'_i|a\rangle$ y $P''_i|a\rangle$, y si todas estas están dadas por el F.M.U., i.e., como los cuadrados de las magnitudes de proyeccio-

nes del vector de estado, normalizado, necesariamente esas probabilidades son iguales entre sí; llegamos así a la conclusión: Todo ensamble generado por un vector de estado es puro.

Ahora, si se quiere sostener el Principio del Determinismo Clásico, que von Neumann identifica con el Principio de Causalidad o Principio de Razón Suficiente, que establece que dos sistemas en el mismo estado se comportan en la misma forma bajo cualquier proceso de medición, entonces se está sosteniendo que $|a\rangle$ no da la información completa sobre las propiedades físicas de cada sistema del ensamble cuántico sino únicamente información de carácter estadístico de ellas; por lo cual el ensamble cuántico $E_{|a\rangle}$ debe ser una mezcla de subensambles preparados en sus correspondientes estados verdaderos. Pero esto no puede ser porque $E_{|a\rangle}$ es un ensamble puro.

Por lo tanto, en base a que todas las probabilidades que pueden surgir del formalismo matemático de la mecánica cuántica, suponer válido a nivel cuántico el Principio de Razón Suficiente conduce a una contradicción. No es que la información dada por $|a\rangle$ sea incompleta. "No es entonces nuestra ignorancia la causa de la dispersión, sino la propia Naturaleza que ha prescindido del Principio de Razón Suficiente⁽²⁾. Y como no hay causas ni explicaciones para que dos sistemas cuánticos en el mismo estado se comporten en forma diferente bajo el mismo proceso de medición, entonces el mundo atómico es indeterminista esencialmente, y no sólo aparentemente, por lo que no puede haber elementos escondidos, información adicional, aún no descubiertos que junto con $|a\rangle$ determinen causalmente los valores de las diferentes magnitudes físicas de cada sistema del ensamble.

3. SOBRE PROBABILIDADES CONJUNTAS

Enfoquemos la teoría probabilista de la fase estacionaria de la mecánica cuántica en la siguiente forma: teniendo un espacio de Hilbert y una colección de operadores hermiteanos \hat{A}, \dots, \hat{Z} , definidos y con valores en ese espacio, que son importantes para cierto problema.

1° Consideremos el ensamble de sistemas cuánticos que se encuentran

en cierto instante en el estado $|a\rangle$, autovector normalizado de \hat{A} . Si \hat{X} es un operador de aquella colección y $\sum x_i \hat{X}_i$ es su desarrollo espectral, la probabilidad de los sistemas cuánticos del ensamble que tienen su \hat{X} igual a x_i está dada por $P_{|a\rangle}(x_i) = ||\hat{X}_i|a\rangle||^2$. Hasta aquí el enfoque estadístico tradicional desde Born.

- 2° Considérese, en contra de las concepciones de la corriente de Copenhagen y sus afluentes, por ejemplo, para citar sólo dos figuras, von Neumann⁽²⁾ y Landau⁽⁹⁾, que en cada instante un sistema cuántico tiene a la vez energía, momento, posición, etc., Einstein⁽³⁾, de la Peña y Cetto⁽⁴⁾, etc. En base a esta concepción, representemos cada sistema cuántico de los producidos en el ensamble anterior, como un vector con componentes reales y tantas como operadores consideremos en la colección anterior, i.e., representaremos un sistema cuántico por

$$(a, b_i, c_j, \dots, z_k) ,$$

donde a es el autovalor de \hat{A} asociado al autovector $|a\rangle$, b_i es un autovalor de \hat{B} ,... y z_k es un autovalor de \hat{Z} . A la totalidad de los sistemas posibles lo denotaremos por $\Omega_{|a\rangle}$ o simplemente por (a) . Y, por ejemplo, (a, x_i, y_j) denotará el conjunto de todos aquellos sistemas cuánticos que tengan el valor correspondiente a \hat{X} igual a x_i y que tengan el valor correspondiente a \hat{Y} igual a y_j pero que están en el estado $|a\rangle$, todo esto en el instante considerado. A veces, por brevedad, cuando no se preste a confusión, ese conjunto se representará por (x_i, y_j) . También diremos que estando los sistemas de (a, x_i, y_j) en el estado de $|a\rangle$ de \hat{A} , también están en el estado X_i de \hat{X} y en el estado Y_j de \hat{Y} , donde X_i es el autoespacio de \hat{X} correspondiente a su autovalor x_i y Y_j es el autoespacio de \hat{Y} correspondiente a su autovalor y_j .

La magnitud física X , asociada al operador \hat{X} , de un sistema cuántico será, entonces, el autovalor correspondiente a ese operador que tenga el sistema cuántico, i.e., $X(a, b_i, \dots, x_j, \dots, z_k) = x_j$, o sea que esa magnitud física es una función definida sobre el conjunto de todos los sistemas cuánticos (a) y con valores en el espectro de \hat{X} , $\sigma(\hat{X}) = \{x_1, x_2, \dots\}$.

En esta formulación, X señala una propiedad de un sistema cuántico, en qué estado de \hat{X} está éste y de ninguna manera es una medición perturbadora de las que considera, por ejemplo, von Neumann.

Habiendo hecho tal formulación, surge entonces de manera natural la pregunta de cuál es la probabilidad de un evento, digamos, de la forma $(X = x_i, Y = y_j) = (x_i, y_j)$ para el caso en que \hat{X} y \hat{Y} no conmuten, ya que la respuesta se tiene cuando conmutan. Notando que una probabilidad es originada por el F.M.U. de la M.C. cuando ella es de la forma $|\hat{P}_i \psi|^2 = (\hat{P}_i \psi, \psi)$, donde \hat{P}_i es una proyección y ψ un cierto vector normalizado, no hay que ir muy lejos por la respuesta: no existe un operador hermiteano que origine esa probabilidad conjunta⁽⁷⁾. Pero, sin embargo, hay recetas para construir tal tipo de probabilidades^(6,7); y son recetas en cuanto que, por lo dicho recientemente, el F.M.U. es incapaz de originarlas en forma natural y, menos aún, determinarlas.

Se exhibirá la receta expuesta en la última de las referencias anteriores: conviniendo en denotar $p_i = P_{|a\rangle}(x_i)$ y $q_j = P_{|a\rangle}(y_j)$, donde las probabilidades en los segundos miembros están dadas de la manera dicha en 1° de esta sección, definamos

$$P(x_i, y_j) = p_i q_j / 2 + \ell([i] \cap [j]) \quad ,$$

donde

- a) $[i]$ denotará al intervalo cerrado por la izquierda y abierto por la derecha $[(1 + p_1 + \dots + p_{i-1})/2, (1 + p_1 + \dots + p_i)/2)$ y $[j]$ denotará al intervalo cerrado por la izquierda y abierto por la derecha $[(1 + q_1 + \dots + q_{j-1})/2, (1 + q_1 + \dots + q_j)/2)$.
- b) $\ell(\)$ denotará la longitud o medida de Lebesgue de lo que aparezca dentro del paréntesis.

Veamos que a partir de tal definición se puede construir una probabilidad a la Kolmogorov sobre el campo σ generado por los eventos de la forma (x_i, y_j) y que además es tal que:

$$i) \sum_i P(x_i, y_j) = P_{|a\rangle}(y_j) \quad \text{y} \quad \sum_j P(x_i, y_j) = P_{|a\rangle}(x_i) \quad ;$$

- ii) con esta probabilidad conjunta X y Y son dependientes en el sentido probabilista usual; en otras palabras: $P(x_i, y_j)$ no es la probabilidad trivial $P_{|a\rangle}(x_i) P_{|a\rangle}(y_j)$.

A. Es claro que a partir de su definición

$$0 \leq P(x_i, y_j) \leq 1$$

B. Veamos que $\sum_{i,j} P(x_i, y_j) = 1$:
Primero, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_j P(x_i, y_j) &= \sum_j (p_i q_j + \ell([i] \cap [j])) \\ &= p_i/2 + \sum_j \ell([i] \cap [j]) ; \end{aligned}$$

y como $[i] \cap [j]$ y $[i] \cap [j']$ son ajenos si $j \neq j'$, se tendrá, usando propiedades de la medida de Lebesgue, que

$$\begin{aligned} \sum_j \ell([i] \cap [j]) &= \ell(\sum_j [i] \cap [j]) = \ell([i] \cap \sum_j [j]), \\ \text{y como } \sum_j [j] &= [\frac{1}{2}, 1] \supset [i], \text{ obtendremos que} \end{aligned}$$

$$p_i/2 + \sum_j \ell([i] \cap [j]) = p_i/2 + \ell[i] = p_i/2 + p_i/2 = p_i .$$

Por lo tanto, $\sum_j P(x_i, y_j) = P_{|a>}(x_i)$. De manera similar se demuestra que $\sum_i P(x_i, y_j) = P_{|a>}(y_j)$. Y de todo esto es claro que $\sum_{i,j} P(x_i, y_j) = 1$.

C. Como todo el espacio $\Omega_{|a>}$ se puede expresar como la suma (unión de eventos ajenos) de todos los eventos de la forma (x_i, y_j) , el campo σ generado por ellos es aquel que consiste de las sumas a lo más numerables de eventos de este tipo; por lo cual la función P definida sobre la colección de eventos (x_i, y_j) se puede extender de manera única en tal forma que resulta ser me dida de probabilidad sobre ese campo σ .

D. Por último, nótese que $\ell([i] \cap [j])$ es cero o una de las diferencias posibles entre dos de los números que son extremos de los intervalos que intervienen, lo cual no puede ser de la forma $p_i q_j / 2$.

4. SOBRE PROBABILIDADES CONDICIONALES

Habiendo podido definir probabilidades conjuntas, podemos construir probabilidades condicionales como se hace normalmente; aunque tampoco éstas están determinadas unívocamente, denotaremos por $P_{|a\rangle}(x_i|y_j)$ al cociente $P(x_i, y_j)/P_{|a\rangle}(y_j)$, y será la probabilidad de la colección de sistemas cuánticos que estando en el estado y_j de \hat{Y} estén también en el estado x_i de \hat{X} del ensamble de sistemas cuánticos en el estado $|a\rangle$.

Y tomando un operador \hat{Y} para el cual $\hat{Y}_j|a\rangle \neq 0$, para cualquier proyección \hat{Y}_j del desarrollo espectral de \hat{Y} , podemos construir los subsambles diferentes $((a, y_j), P_{|a\rangle}(|y_j\rangle))$, para $j = 1, 2, \dots$, cuya mezcla nos da el ensamble original $((a), P_{|a\rangle})$, en los términos siguientes:

- i) $(a) = \sum_j (a, y_j)$ con $(a, y_i) \cap (a, y_k) = \emptyset$, $j \neq k$; i.e., la colección de todos los sistemas posibles de los subsambles es igual a la colección de todos los sistemas posibles del ensamble original.
- ii) la probabilidad del ensamble original, dada por el F.M.U., es una combinación lineal convexa de las probabilidades de los subsambles, o sea

$$P_{|a\rangle} = \sum_j P_{|a\rangle}(|y_j\rangle) P_{|a\rangle}(y_j),$$

en la cual: 1º, como funciones $P_{|a\rangle}(|y_j\rangle)$ y $P_{|a\rangle}(|y_k\rangle)$, $j \neq k$, son diferentes; 2º las $P_{|a\rangle}(y_j)$ son positivas suman uno y son independientes del evento a quien se aplique la probabilidad del ensamble, von Neumann⁽²⁾.

Por lo cual, concluimos, el ensamble $((a), P_{|a\rangle})$ es impuro.

La contradicción con lo demostrado en la sección 2 es sólo aparente: en su demostración, von Neumann pide implícitamente que las probabilidades $P'_{|a\rangle}$ y $P''_{|a\rangle}$ sean originadas por su operador estadístico, lo que equivale a que ellas sean originadas por el F.M.U., como aquí se hizo; él está usando una hipótesis más de las que enuncia; el teorema debe ser enunciado así:

El ensamble generado por un vector de estado es puro respecto a las probabilidades dadas por el formalismo matemático usual de la mecánica cuántica .

Entonces, lo que hemos demostrado en esta parte es que si quita mos la restricción de cómo deben ser esas probabilidades condicionales, si no las restringimos a que sean originadas por ese formalismo matemático, entonces los ensambles son impuros.

Para redondear esta parte verifiquemos que cada $P_{|a\rangle}(|y_j\rangle)$ no es originada por el F.M.U. de la M.C.: supongamos que lo sea, esto es, que esa probabilidad condicional está dada a través de cierta proyección, i.e., que $P_{|a\rangle}(x_i|y_j) = |\hat{X}'_i|a\rangle|^2$; obtenemos entonces que $P(x_i, y_j) = |\hat{X}'_i|a\rangle|^2 |\hat{Y}_j|a\rangle|^2$ y como $P_{|a\rangle}(x_i) = \sum_j P(x_i, y_j)$ obtenemos que $P_{|a\rangle}(x_i) = |\hat{X}'_i|a\rangle|^2$, de lo cual se tiene que $|\hat{X}_i|a\rangle|^2 = |\hat{X}'_i|a\rangle|^2$; de esto obtenemos que $\hat{X}_i = \hat{X}'_i$ y por lo tanto $P(x_i, y_j) = |\hat{X}_i|a\rangle|^2 |\hat{Y}_j|a\rangle|^2$. Pero $P(x_i, y_j)$ no fue escogida así; por lo tanto cada $P_{|a\rangle}(|y_j\rangle)$ no está dada por ese formalismo.

Y en cuanto a una magnitud física X , asociada al operador \hat{X} , se tiene que en cada subensamble su distribución de probabilidad está dada por $P_{|a\rangle}(X = x_i | y_j) = P_{|a\rangle}(x_i | y_j)$; además

a) si \hat{X} y \hat{Y} no tienen algún autovector en común, existen valores de X , x_i y x_k para los cuales $P_{|a\rangle}(x_i | y_j)$ y $P_{|a\rangle}(x_k | y_j)$ son positivas y diferentes, resultando así que hay algunos subensambles donde X es dispersiva. Aunque Y no es dispersiva sobre cada uno de esos subensambles.

b) La distribución de probabilidad de X en el ensamble, dada por el F.M.U. está dada también promediando la variable aleatoria

$P_{|a\rangle}(x_i | Y)$, i.e., por

$$P_{|a\rangle}(x_i) = \sum_j P_{|a\rangle}(x_i | y_j) P_{|a\rangle}(y_j) .$$

En fin con esta reformulación ¿cómo quedan entonces los asuntos del indeterminismo esencial y el de la inexistencia de variables ocultas?

A. Podemos decir que al suprimir la condición de que las probabilidades condicionales deban estar dadas por el formalismo matemático usual de la mecánica cuántica, y obtener así que los ensambles generados por un vector de estado son impuros, estamos excluyendo la condición suficiente, que impone von Neumann, para la inexistencia

cia de la causalidad. Por lo cual, planteadas así las cosas, hasta aquí, no se puede afirmar que la teoría sea causal; tampoco se puede afirmar que sea indeterminista esencialmente. Y lo mismo se puede decir respecto a las variables ocultas: si bien hasta este punto no se puede afirmar que existan, tampoco se puede afirmar que no existen.

- B. Además, debe notarse que la variable aleatoria $P_{|a\rangle}(x_i|Y)$ cumple formalmente con las características que se suele pedir a las variables ocultas. Y aún más, esa variable aleatoria es dispersiva ya que toma los diferentes valores $P_{|a\rangle}(x_i|y_j)$ ($j = 1, 2, \dots$) con probabilidades positivas $P_{|a\rangle}(y_j)$ ($j = 1, 2, \dots$), corroborando así, al menos formalmente, las predicciones de Brody⁽¹⁰⁾ y Feyerabend⁽¹¹⁾.

AGRADECIMIENTOS

El autor desea expresar su agradecimiento a los maestros Ana María Cetto, Tomás Brody y Luis de la Peña su siempre cordial ayuda. También quiero agradecer al prof. Fco. Soto sus sugerencias, las cuales me hicieron profundizar más en este tema.

REFERENCIAS

1. P. Février, Déterminisme et Indéterminisme, Presses Universitaires de France, Paris (1955).
2. J. von Neumann, Matematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer, Berlin (1932).
3. A. Einstein, Dialectica 2 (1948) 320.
4. L. de la Peña y A. M. Cetto, Found. Phys. 12 (1982) 1017.
5. E. Wigner, Perspectives in Quantum Theory edited by W. Yourgrau and A. van der Merwe, Dover, N.Y. (1971).
6. L. Cohen and Y.I. Zaporovanny, J. Math. Phys. 21(4), April 1980.
7. A. Nieva, Comunicaciones Internas del Depto. de Matemáticas No. 4. Facultad de Ciencias de la U.N.A.M., México (1981)
8. F. Riesz and B. SZ-Nagy, Functional Analysis, Ungar, N.Y. (1972).
9. L. Landau y E. Lifshitz, Curso Abreviado de Física Teórica, Mecánica Cuántica, Edit. MIR, Moscú (1974).
10. T. Brody, Preimpreso IFUNAM-08, México (1980).
11. P.K. Feyerabend, Z. Physik, 145 (1956) 421.