Revista Mexicana de Física 30 No. 3 (1984) 567-584

BERTRAND RUSSELL Y LOS FUNDAMENTOS DE LA FISICA

ALGUNOS ASPECTOS DE LA INFLUENCIA DEL DESARROLLO DE LA TEORIA DE LOS NUMEROS TRANSFINITOS EN LA FILOSOFIA DE LA FISICA A PRINCIPIOS DE ESTE SIGLO

Alejandro R. Garciadiego Dantan

Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias, UNAM
04510 México, D. F.

RESUMEN

La finalidad de este artículo es analizar cuál fue el desarrollo histórico de las ideas que motivaron a Bertrand Russell a escribir su libro *Los principios de las matemáticas* (mayo 1903), en donde justifica su tesis logicista. Algunos de los lineamientos que señala Russell en este libro —especialmente sus conceptos sobre los fundamentos de la dinámica— indujeron a distintos miembros de la comunidad física a presentar sus propias ideas sobre los fundamentos de las ciencias físicas.

ABSTRACT

The goal of this article is to analize the historical development of some of the ideas that motivated Bertrand Russell to write his book *The Principles of Mathematics* (May 1903), where he explains his logicist thesis. Some of the lineaments that he points out in this book —especially those concepts on the foundations of dynamics— induced some members of the physical community to present their own ideas on the foundations of the physical sciences.

1. INTRODUCCION

Tal vez el lector conozca a Bertrand Russell como el ganador del Premio Nobel de Literatura en 1950; o quizás lo reconozca por su labor política, en particular su fuerte oposición y crítica a la guerra de Viet-Nam o por medio de su llamado a la paz junto con Albert Einstein. Tal vez, el lector haya leído algunos de sus muy sinceros escritos autobiográficos donde nos describe la evolución de su pensamiento científico y filosófico, así como muchos de sus secretos de alcoba. Quizás el lector haya tenido el placer de leer sus controversiales y escandalosas ideas sobre el matrimonio y educación infantil, las cuales no únicamente propuso y discutió, sino que las llevó a la práctica. Es probable que usted haya leído alguno de los setenta libros que escribió —aproximadamente—, cubriendo temas tan diversos como son: las ciencias sociales, los fundamentos de las matemáticas, filosofía, religión, ciencias morales, educación, pacifismo, ciencias naturales (incluyendo biología y física), lingüística, estadística, probabilidad, teoría económica, historia y política, entre otros. Además, Russell escribió varios cientos de artículos y realizó docenas de entrevistas por radio y televisión. También nos legó una gran cantidad de material sin publicar. Existe ahora el proyecto de editar sus obras inéditas que cubrirán veintiocho volúmenes más, incluyendo el índice. Posiblemente haya tenido usted la oportunidad de compenetrarse con algunos de sus libros donde intentaba popularizar resultados recientes de las ciencias físicas como *El ABC de la teoría de la relatividad*, publicado en 1925. Tal vez conozca también algunas de sus ideas filosóficas con respecto a los fundamentos de las mismas ciencias físicas expresadas, entre otros libros, en *Nuestro conocimiento del mundo exterior*, de 1914.

En relación con el tema de los fundamentos de las ciencias físicas, Russell había llegado, en 1903, a la conclusión de que las cuestiones más importantes relacionadas con los problemas de los fundamentos de la dinámica (como una ciencia *a priori*) no eran problemas que pertenecían a la física, sino a las matemáticas puras, y entonces, de acuerdo con su programa logicista, podían ser derivadas de constantes y definiciones lógicas. Siguiendo los lineamientos de este programa, Russell ex presó la noción de "ocupando un punto o un instante" en términos de relaciones. Los conceptos de "tiempo" y "espacio" fueron reemplazados por series de una y n-dimensiones respectivamente. La noción de "movimiento" la expresó en términos de series continuas. Según Russell, todos los argumentos de la dinámica eran capaces de ser traducidos al lenguaje de las matemáticas puras y, por lo tanto, al de la lógica simbólica también. Russell centralizó su postura en las siguientes palabras:

> Las verdades *a priori* envueltas en la dinámica son únicamente aquellas de la lógica: como un sistema de razonamiento deductivo, la dinámica no requiere de nada más, mientras que como una ciencia de lo que existe requiere de experimentación y observación.

Es de fundamental importancia señalar que estas ideas de Russell fueron un producto de sus investigaciones filosóficas a principios del presente siglo y que fueron refinadas en 1914. No critiquemos injustamente a Russell argumentando que su postura pudiera estar equivocada de acuerdo con nuestros estándares actuales. De la misma manera que sería totalmente injusto criticar a Galileo porque desconocía la formulación newtoniana de la ley de la inercia. Obviamente, Russell desconocía los lineamientos que seguirían las ciencias físicas en el futuro. Las corrientes de investigación que cambiarían nuestra forma de pensar (como son la mecánica cuántica y la teoría de la relatividad, entre otras) se encontraban en el umbral de sus formulaciones y desarrollo. Repito, sería un grave error histórico el señalar que Russell se encontraba equivocado de acuerdo con las formulaciones y doctrinas más aceptadas actualmente de los fundamentos de la física. Subrayemos, por el momento, que la influencia de la filosofía russelliana es innegable —aunque ésta no necesariamente sea positiva y sea de manera indirecta— a través del positivismo lógico, es decir, a través de las ideas de Rudolf Carnap y Philip Frank, entre otros. Quisiera aclarar, primeramente, que no trataré de establecer un análisis epistemático de las ideas russellianas originalmente expuestas en sus escritos de 1903 y 1914. Es decir, no trataré de reconstruir lógicamente el armazón de su doctrina. Pienso que tal vez el lector conozca de hecho tales ideas; y, por otro lado, en el caso de desconocerlas, las fuentes necesarias para su entendimiento son fácil mente accesibles. En este artículo intentaré describir cómo fue que Russell *llegó* a sostener las ideas que expresa, en cuanto a los fundamentos de las ciencias físicas (en particular la dinámica), en su libro *Los principios de las matemáticas*, que alcanzaron su madurez intelectual en otro de sus libros antes mencionado: *Nuestro conocimiento del mundo exterior*. Es decir, trataré de reseñar cuál fue el desarrollo intelectual que motivó a Russell a sustentar dichos argumentos, usando manuscritos y correspondencia no publicados hasta la fecha. Para llevar a cabo dicha finalidad deberé, sin embargo, discutir brevemente algunos de los resultados de la teoría de números transfinitos que formaron la piedra angular de las ideas filosóficas de Russell a principios de este siglo.

2. LA TEORIA DE LOS NUMEROS TRANSFINITOS

El concepto de infinito ha jugado un papel excepcional en la filosofía de las matemáticas y de las ciencias físicas. El mismo Russell ha señalado, en el prefacio de uno de sus libros ya mencionados, que las especulaciones del pasado, en cuanto a la realidad o irrealidad del mundo físico, fueron obscurecidas por la ausencia de una satisfactoria teoría del infinito matemático. Ya algunos historiadores de las ciencias han señalado que la finalidad de la *Metafísica* de Aristóteles había sido la de responder a las objeciones que presentaba Zenón de Elea a la realidad física por medio de sus famosas paradojas. Tal vez la más conocida de ellas es la de Aquiles y la Tortuga. El argumento es como sigue: Aquiles sabe que él es un corredor más rápido que la tortuga, y concede darle una ventaja inicial en la carrera. Ahora, cuando el corredor griego llega a la posición que originalmente mantenía la tortuga (T_1), ésta deberá estar en algún punto más adelante (T_2). Cuando Aquiles alcanza esta nueva posición, la tortuga se encontrará necesariamente en algún otro punto más adelante (T_3), pues ésta no se encuentra inmóvil; y así, *ad infinitum*, en cada ocasión que Aquiles logre alcanzar la posición de la tortuga, ésta estará situada en una posición más adelante, y nunca será capaz de alcanzarla. Sin embargo, esto contradice nuestra experiencia diaria, que nos confirma que el corredor más veloz rebasa al más lento. Otro argumento igualmente paradójico de Zenón es el siguiente: una

$$\begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & T_1 & T_2 & T_3\ldots \\ A_1 & \text{movimiento} & A_2 & A_3 & A_4\ldots \end{array}$$

flecha que se mueve en un instante dado está en reposo o no está en reposo, es decir, se mueve. Si el instante es indivisible, la flecha no puede moverse, pues si lo hace el instante quedaría dividido inmediatamente. Pero el tiempo está constituido de instantes. Como la flecha no puede moverse en ningún instante, no podrá moverse en ningún momento. De aquí que siempre permanecerá en reposo. Sin embargo, nuestra experiencia diaria contradice dicho argumento. Russell ha señalado que ésta era una paradoja tan monstruosa, que otros filósofos pensaban que ni siquiera merecía ser discutida.

Aristóteles, en su intento por solucionar dichas paradojas, señalaba que Zenón estaba haciendo uso confuso de cantidades discretas y continuas, y que además estaba confundiendo el uso de un infinito actual (un infinito ya dado en su totalidad) con un infinito potencial (uno que está en potencia de serlo, pero que nunca de hecho lo es). Para entender dichos conceptos, veamos el siguiente ejemplo: supongamos que tenemos una lista de *todos* los números naturales, la cual constituye un conjunto infinito dado en su totalidad. Es decir, tenemos un conjunto infinito actual. Supongamos ahora que queremos obtener una lista de los números primos a partir de esta sucesión. Siguiendo el método descrito por Eratóstenes, nosotros podríamos ir eliminando de nuestra sucesión todos aquellos números que puedan expresarse como el producto de cualesquiera dos números, excluyendo el número uno y él mismo. Así, empezaríamos por eliminar todos los números pares con la excepción del número dos; después todos aquellos números que pueden ser descritos como el producto de cualquier número (con la excepción del uno) y el número tres, y así en adelante. Sabemos, por un resultado de Euclides, que el conjunto de los números primos es infinito, pues dado cualquier número primo siempre es posible construir otro mayor. Pero, siguiendo el método de Eratóstenes (que envuelve un proceso finito), nunca podremos eliminar de nuestra lista o sucesión todos aquellos números que no sean primos, por lo que nosotros únicamente podríamos establecer que, siguiendo nuestro procedimiento, los números primos son infinitos en *potencia*.

Sin embargo, la solución aristotélica no fue definitiva. Se carecía en su tiempo de una precisa definición de magnitud continua y se rechazaba el posible uso de entes o conceptos que fueran infinitos en su totalidad. En numerosas ocasiones encontramos a eminentes filósofos y "científicos" del pasado discutiendo cuestiones concernientes al concepto de infinito. Entre otros, podríamos mencionar a Santo Tomás, quien en su *Suma teológica* discute la imposibilidad de la existencia de una idea que sea infinita en su totalidad, con la única excepción de Dios. Más tarde, encontramos a Galileo explicando en su *Dos nuevas ciencias* lo absurdo que resulta ser el tratar de discutir las relaciones de igualdad y desigualdad (mayor y menor que) entre "conjuntos" infinitos. Es más, Galileo sentencia que es un concepto que en su opinión nunca se podrá comprender. Como un ejemplo señala el hecho de que se puede hacer corresponder a cada elemento del conjunto de *todos* los números naturales (un ente infinito en su totalidad) con uno y solamente uno del conjunto de todos los números cuadrados (otro ente infinito en su totalidad) que sólo son una parte de los anteriores. Es decir, que teniendo las dos sucesiones infinitas de todos los números naturales y la de todos sus cuadrados nos es posible asignarle a cada número su cuadrado, y a cada cuadrado su raíz. Esto parece contradictorio, ya que

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 1 & 4 & 9 & 16 & \dots & n^2 & \dots \end{array}$$

nos parece obvio que una de las dos sucesiones (la de todos los números naturales) contiene muchísimos más elementos que la otra; y, sin embargo, no es así. Posteriormente, René Descartes también dedicó parte de su tiempo a la discusión del infinito. El también negaba la existencia del infinito actual, señalando que por nuestra propia naturaleza finita nos es imposible comprender el infinito. Leibniz también discutió dichos problemas. Y su posición es, tal vez, la más ambigua de todas. En algunas ocasiones parece aceptar el infinito actual y en otras negarlo. Por ejemplo, Leibniz se preguntó: ¿Qué hay más, números naturales (1,2,3,..., n,...) o números pares (2,4,6,...,2n,...)? Y concluyó: el número de todos los números encierra una contradicción.

No fue sino hasta finales del siglo XIX cuando se clarificaron dichas cuestiones. Fue Georg Cantor quien logró dominar el concepto de infinito. No obstante es importante señalar que Cantor no se había propuesto tratar de resolver estas dificultades originalmente. Su finalidad inicial había sido la de tratar de solucionar un problema *eminentemente* matemático. Tomando en cuenta que algunos físicos han acusado a los matemáticos de tener poca imaginación para la creación de nuevos problemas, tal vez al oir la expresión "problema eminentemente matemático" haya el lector adivinado a qué tipo de problemas me refiero: aquéllos de *unicidad*. La pregunta que originalmente intentaba solucionar Cantor era la siguiente: si una función arbitraria podía ser representada por una serie trigonométrica, ¿era esta representación única? Los resultados parciales que fue encontrando Cantor lo fueron motivando o forzando poco a poco a examinar conjuntos especiales de puntos. Esto lo condujo eventualmente, casi trece años después de haber iniciado sus estudios, a tomar un paso más allá o a extender el concepto de número hasta donde nadie lo había hecho explícitamente con anterioridad. Su larga apología —con la cual inicia uno de sus artículos de 1883— no era injustificada. Cantor estaba conciente de la reacción negativa que provocarían sus nuevas ideas. En este artículo Cantor discute con detalle la necesidad de hacer la distinción entre el infinito actual y el potencial, y la de tomar como válido el primero en matemáticas. ¿Cuáles son algunas de las consecuencias de haber tomado dicha decisión? Para empezar, Cantor fue capaz de desarrollar una aritmética de números transfinitos cardinales y ordinales logrando mostrar, entre otros, los siguientes resultados: Primero, que para números cardinales transfinitos las leyes de la aritmética tradicional (suma, producto y exponenciación) son válidas; sin embargo, dichas leyes no se cumplen para los números ordinales. Algunos resultados concretos fueron:

$$\aleph_0 + n = \aleph_0 \qquad (\aleph_0 = \text{menor de los números cardinales transfinitos, } n = \text{cardinal finito})$$
$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$
$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$
$$\omega + 1 \neq 1 + \omega = \omega \qquad (\omega = \text{menor de los números ordinales transfinitos})$$
$$\omega = 2 \cdot \omega \neq \omega \cdot 2$$

Segundo, que *no* todos los conjuntos infinitos son iguales, sino que hay unos mayores que otros. Por ejemplo, el conjunto de todos los números reales es mayor que el conjunto de todos los números naturales. Tercero, que no necesariamente el todo es mayor que cualquiera de sus partes. En particular, el conjunto de todos los números naturales tiene el mismo número de elementos que el conjunto de todos los números pares y, sin embargo, éstos son un subconjunto propio de los primeros. Cuarto, que un segmento de recta (por pequeño que sea) contiene tantos puntos como la recta entera pensada en su totalidad; que ésta a su vez contiene el mismo número de puntos que el plano euclideano; y, que éste a su vez contiene el mismo número de puntos que el espacio tridimensional; o, aún más sorprendente, que éste a su vez contiene el mismo número de puntos que cualquier espacio de dimensión '*n*'finito. Quinto, y quizás uno de los resultados más trascendentales de sus estudios, fue el de mostrar que dado cualquier conjunto infinito siempre es posible argumentar la existencia de otro mayor.

Mucho se ha escrito, y poco fundamentado, de las polémicas que causó el trabajo de Cantor. También se ha hablado mucho de que Cantor había perdido la razón y que éste se encontraba internado en una clínica para enfermos mentales. Los matemáticos e historiadores, en general, han ayudado a mistificar el personaje como sucede con casi todo personaje y evento matemático. Algunos de los matemáticos contemporáneos rechazaron la teoría cantoriana; la mayor parte de ellos influenciados por su propio malentendimiento de las ideas del matemático alemán. Bertrand Russell fue uno de ellos, pero más tarde su meticuloso estudio lo hizo cambiar de opinión. En lo que resta del artículo trataré de explicar: primero, por qué fue que Russell rechazó originalmente las nuevas ideas; en segundo lugar, cómo es que llegó a convencerse de que Cantor estaba en lo correcto; y, finalmente, cómo es que dichas ideas influenciaron su entendimiento de los fundamentos de la física.

3. BERTRAND RUSSELL. SUS PRIMEROS AÑOS

Bertrand Russell nació en Inglaterra en 1872 y fue educado, al faltar sus padres y siguiendo las tradiciones de la época, en casa de sus abuelos paternos por institutrices y tutores. El mismo nos ha señalado en sus escritos autobiográficos que su infancia y juventud fueron muy solitarias, teniendo como único contacto social personas mayores que no tenían ninguna capacidad para entender a los jóvenes. No fue sino hasta 1890, a la edad de dieciocho años, cuando tuvo oportunidad de medir y comparar su potencial intelectual con otros jóvenes de su misma edad. En la Universidad de Cambridge, Russell estudió matemáticas y física por tres años, y un cuarto año lo dedicó al estudio exclusivo de la filosofía. Este cambio de intereses se debió esencialmente a su disgusto y decepción de cómo eran enseñadas las matemáticas en Cambridge en esos días. El sistema educativo estaba diseñado en base a una gran competencia entre los alumnos, la cual era medida, en general, por exámenes. Las clases eran muy aburridas, pues se dedicaba la mayor parte de su tiempo a la resolución de problemas, y los pocos argumentos de los profesores eran generalmente falsos. Como resultado de este cambio de intereses, Russell se puso en contacto con la crema y nata del ambiente filosófico de la Universidad, quienes, en su gran mayoría, seguían los lineamientos de una escuela neo-hegeliana dirigida intelectualmente por las ideas de Francis H. Bradley. Es lógico suponer que Russell no tardó mucho tiempo en caer influenciado por dicha doctrina. Para empezar, la mayoría de sus maestros eran seguidores de este sistema. En segundo lugar, Russell pensó que ésta sería una buena manera de mantener vivas algunas de sus creencias religiosas, que más tarde abandonaría por completo. Por otro lado, todos los otros sistemas filosóficos que había estudiado con anterioridad —principalmente el de John S. Mill— habían sido incapaces de explicar la naturaleza de las proposiciones matemáticas. Por último, parece ser que la causa inmediata de su adopción del neo-hegelianismo fue su aceptación del argumento ontológico como una prueba del *absoluto*. Russel también leyó algunas de las obras de Kant durante su cuarto año en Cambridge. El entonces joven inglés —hay que recordar que Russell vivió casi noventa y ocho años y que para ese entonces tenía veintidos años aproximadamente— tomó algunas ideas de ambas corrientes. Algunas de las consecuencias más importantes de la aceptación de estas ideas de los neo-hegelianos y kantianos fueron: i) Ambas doctrinas rechazaron la idea de la existencia del infinito actual; ii) los neo-hegelianos estaban fuertemente opuestos a lo que ellos llamaban "lógica equacional", la cual se transformó en la lógica matemática a través de los trabajos de Hamilton, Boole, de Morgan y Peano, entre otros; iii) de acuerdo con algunos de los filósofos neo-hegelianos, el papel de la lógica —como una disciplina filosófica— era el de dar una descripción más precisa del razonar en general; iv) los neo-hegelianos consideraban que todas las ciencias —incluyendo las matemáticas y la física— eran inherentemente defectuosas, es decir, que cada una de las ciencias era inconsistente en sí misma. Por ejemplo, Russell consideraba a la geometría y a la dinámica bajo este esquema, pensando que aquellas contradicciones sin solución serían conquistadas dialécticamente por otras ciencias. Al final se debería llegar a una síntesis donde todas las contradicciones habrían sido ya resueltas; a esta síntesis le llamó " la dialéctica de las ciencias".

Un día, mientras Russell tomaba un paseo en Berlín en 1895, a la edad de 23 años, decidió escribir dos series de libros: una iría de matemáticas a fisiología, y la otra discutiría cuestiones sociales siguiendo los principios de las doctrinas neo-hegelianas. Con base en dicho esquema, las contradicciones que dejara sin resolver cada una de las ciencias serían resueltas en otra ciencia subsecuente. Russell inició su programa escribiendo su tesis de licenciatura sobre los fundamentos de la geometría. La finalidad de dicho estudio era la de mostrar cuál era el conocimiento geométrico necesario para la posibilidad de la experiencia. El esquema general del libro fue dividido en cinco partes: la primera sirviendo de introducción estableciendo el problema —esencialmente motivado por el reciente desarrollo de las geometrías no-euclideanas y el cómo afectaban las ideas de Kant; la segunda parte describía el origen y desarrollo de estas geometrías; la tercera sección del libro estaba dedicada a un exa--

men crítico de otras teorías de la filosofía de la geometría; la cuarta sección discutía la nueva filosofía que proponía Russell; y, por último, en la quinta sección se presentaba un análisis de las consecuencias filosóficas de la propia teoría de Russell.

Como señalé con anterioridad, Russell seguía los lineamientos generales de las ideas de Bradley. Bajo estas condiciones, una de las premisas consistía en considerar como inconsistente el estado final de cada ciencia. En este libro (publicado en 1897) Russell argumentaba que la noción de "punto" (elemento espacial) y la de "espacio vacio" eran contradictorias en sí mismas: y, en función de resolver dichas inconsistencias era necesario introducir el concepto de "materia". Es decir, que en orden de solucionar o superar ciertos defectos de los fundamentos de la geometría era necesario introducirnos dentro del marco filosófico de la dinámica y, por consiguiente, de la física. Russell pensó, por aquel momento, que ya había sido capaz de resolver todas las dificultades de los fundamentos de la geometría y que ahora era necesario hacer lo mismo con aquéllas de las ciencias físicas.

Una vez que Russell acabó su libro sobre los fundamentos de la geometría procedió a escribir un ensayo similar sobre los fundamentos de la dinámica. La estructura general del libro iba a ser, a grandes rasgos, similar a aquélla de su libro previo. En los archivos de Bertrand Russell que se encuentran en la Universidad de McMaster en Canadá se conservan algunos folios que muestran las entonces futuras actividades de Russell. En particular, se conservan diversas tablas de contenido que muestran que el libro estaría dividido en dos partes esenciales. La primera sería un análisis crítico de la historia de la dinámica, y la segunda consistiría en una teoría constructiva de la misma. Durante los dos siguientes años (1896 a 1898), Russell leyó los trabajos de investigación más recientes, incluyendo las obras de Thompson, Maxwell, Clifford y Nortop, entre otros. No únicamente intentó escribir dicho ensayo como lo demuestran manuscritos que se conservan de esa época, sino que también llevó a cabo investigación de frontera en los Laboratorios Cavendish. Sin embargo, su proyecto no cristalizó. Russell relata que él comprendió que la dinámica no es una ciencia *a priori*, sino que casi todas sus cuestiones son esencialmente empíricas. Entonces, Russell decidió concentrar su actividad intelec--

tual en los fundamentos de la aritmética, una cuestión que había estado siguiendo con anterioridad —como lo demuestran otros manuscritos de la época— pero a la que no le había dedicado la debida atención. Este nuevo cambio de intereses, por otro lado, no implica el necesario abandono de sus investigaciones sobre los fundamentos de las ciencias físicas como lo mostraré más adelante.

4. PRIMERA REACCION DE RUSSELL A LAS IDEAS DE CANTOR

En 1896, mientras Russell trabajaba en los laboratorios Cavendish, se puso en contacto por primera ocasión con las ideas de Cantor al hacer la reseña de un libro por un filósofo francés apellidado Hannequin. En este libro, Russell encontró una revisión negativa de los resultados de Cantor y consideró dicha crítica justa y correcta. En la reseña publicada en la revista británica *Mind*, Russell no discutió en detalle las razones por las cuales rechazaba las ideas de Cantor. Aunque es lógico suponer que esta negación era total, pues Russell no aceptaba el principio que le permitía a Cantor establecer la existencia de la segunda clase de números (aquellos que no eran finitos). De acuerdo con Russell, si la sucesión de todos los números naturales,

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n,\ \ldots,$$

era ilimitada, entonces era imposible para alguien hablar del primer número que seguía a todos estos números. Su conclusión fue simple y directa: aun el más humilde de los filósofos debería estar indignado ante el menor de los números transfinitos de Cantor. En los archivos de Bertrand Russell se conserva un pequeño ensayo inédito donde él expone sus razones en mayor detalle. La principal objeción seguía siendo el carácter ontológico de $\aleph_0$ (el más pequeño de los números cardinales transfinitos). ¿Cómo se podía aceptar la existencia de $\aleph_0$, si no existía un último o previo elemento en la sucesión de los números finitos? Al poco tiempo, el editor de la misma revista *Mind* solicitó a Russell examinar otro libro sobre los fundamentos de la aritmética. Este libro había sido escrito por el filósofo francés Louis Couturat. Al contrario del texto anterior, Russell encontró aquí una exposición positiva de las ideas de Cantor. Sin embargo, los argumentos en pro de la teoría de los números transfinitos no fueron lo suficientemente fuertes o convincentes como para hacer cambiar a Russell de opinión. La obra de Couturat (*El infinito matemático* (1896)) sirvió para reforzar la creencia de Russell que uno de los problemas fundamentales de la filosofía de las matemáticas era el de explicar las relaciones entre las categorías de número y cantidad.

A principios de 1898, aún bajo la influencia de las doctrinas neo-hegelianas, Russell decidió escribir un libro sobre los fundamentos de la aritmética. Como material antecedente había leído las obras de Alfred N. Whitehead —su ex-maestro en Cambridge— sobre los fundamentos del álgebra y de Richard Dedekind sobre los principios de la aritmética. El manuscrito de Russell, llamado *Un análisis del razonamiento matemático*, refleja la aún creencia de que las matemáticas eran una ciencia inconsistente, es decir, que era posible encontrar antinomias o contradicciones en ellas. Parece ser que lo que decidió a Russell a abandonar su postura neo-hegeliana fue el hipercrítico análisis que le hiciera su amigo G.E. Moore — quien para estos días era ya un ex-neohegeliano. Como consecuencia de la nueva influencia de Moore, ahora Russel creía en todo lo que los neohegelianos negaban y, viceversa, negaba todo lo que los neo-hegelianos apoyaban. Los conceptos de "número", "espacio", "tiempo" y "materia" perdieron su carácter contradictorio y fueron transformados en entes reales.

Ahora, como él mismo nos dice, se

> imaginó todos los números sentados en una fila en un cielo platónico (...) y pensó que los puntos del espacio y los instantes de tiempo eran entidades existentes de hecho.

Obviamente, como consecuencia de la dura crítica de Moore, Russell abandonó el libro que se encontraba escribiendo. Aproximadamente un año después, en mayo de 1899, encontramos a Russell intentando escribir un libro similar sobre los principios de las matemáticas. Aunque este nuevo manuscrito fue titulado *Las ideas y axiomas fundamentales de las matemáticas*, en este otro manuscrito localizamos las primeras referencias explícitas a la escuela weierstrassiana de matemáticas, que tenía como finalidad de la aritmetización del análisis. Es decir, que Weierstrass y sus seguidores (incluyendo a Dedekind y Cantor) pretendían demostrar que se debe observar que todas las matemáticas puras tratan exclusivamente con números. Sin embargo, Russell seguía considerando algunas antinomias o contradicciones estrechamente relacionadas con el concepto de infinito. Russell reconocía tres distintas maneras de introducir dichas contradicciones dentro del ámbito matemático. La primera era a través de la idea de todos los números — la cual más tarde originaría lo que ahora llamamos la paradoja de Cantor y otra similar de Burali-Forti; la segunda se generaba al hablar de la idea del más grande de todos los números; y la tercera instancia germinaba al considerar el último número. Como decía Couturat, la mayoría de estas antinomias surgían pues estábamos pensando erróneamente que todos los infinitos eran iguales y que existía un último número en la sucesión de todos los números naturales. Es muy importante hacer hincapié en que hasta este momento Russell no había leído los artículos originales de Cantor en alemán. Russell había estudiado las abreviadas traducciones francesas, las cuales omitían, en particular, la importante distinción entre los dos tipos diferentes de infinito: el actual y el potencial, y no había sido convencido de la importancia que tenían para sus proyectos las implicaciones de los resultados de Cantor.

En 1899, Russell tuvo por fin la oportunidad de leer las contribuciones originales de Cantor. Como consecuencia de la nueva y profunda influencia de Cantor, Russell empezó a redactar un tercer intento por explicar los fundamentos de la aritmética. Este nuevo manuscrito, escrito probablemente entre los meses de julio de 1899 y junio de 1900 fue titulado *Principios de matemática*. Y aunque Russell seguía poniendo en tela de juicio algunas de las ideas de Cantor empezó a adaptar otras. Para estas fechas, Russell seguía cuestionando el carácter ontológico del primer número cardinal transfinito. Como mencioné con anterioridad, este nuevo intento por escribir un libro sobre los fundamentos de las matemáticas fue probablemente acabado en junio de 1900; un mes antes del Primer Congreso Internacional de Filosofía que se celebró en París. Fue en este congreso donde Russell sufrió un cambio dramático en su carrera intelectual, como él lo afirma en sus escritos autobiográficos. Russell tuvo oportunidad de oir argumentar al matemático italiano Giuseppe Peano durante las discusiones que siguieron a varias de las ponencias. Según Russell, Peano ganó todas las discusiones y polémicas en las que se vio envuelto. El entonces joven inglés pensó que la superioridad de Peano se debía esencialmente a su manera de argumentar y, muy especialmente, a su lógica matemática; Russell tomó de Peano varios de los elementos de su trabajo. En primer lugar, el lenguaje simbólico que hoy en día utilizamos en matemáticas ($\exists$=existe; $\subset$=contención; $\in$=pertenencia) es en gran parte creación del matemático italiano. También, Peano subrayó la importancia de la distinción entre un conjunto con un sólo elemento y el elemento mismo. Otra contribución importante consistió en clarificar la diferencia entre las relaciones de pertenencia y contención. El impacto de la obra de Peano en Russell fue impresionante. Ahora el matemático inglés estaba completamente convencido de la importancia de la lógica matemática; la cual, por medio de su lenguaje simbólico, podía expresar el contenido de las ciencias matemáticas sin ambigüedad alguna, en particular, la obra de Cantor. Peano suponía implícitamente la consistencia global de las matemáticas. Por lo que las antinomias con respecto al infinito tenían que ser superadas.

Peano utilizaba su notación simbólica únicamente como un medio o instrumento que libraría a las matemáticas y, después a todas las ciencias en general, de sus problemas semánticos. Pero Russell convirtió a la lógica matemática en el eje central de la filosofía. Ahora, Russell también creía en la consistencia de cada una de las ciencias como una consecuencia de su total repudio a las filosofías neo-hegelianas que había seguido con anterioridad. En adelante, Russell intentaría demostrar la total consistencia de las matemáticas, incluyendo las cuestiones relacionadas con el concepto de infinito. Tenemos que tomar en cuenta que la influencia de Weierstrass y sus seguidores había convencido a Russell que la matemática pura debía ser derivada exclusivamente de la idea de número. Cantor, en particular, había logrado mostrar que la idea de número podía ser deducida del concepto de conjunto. Y, Russell, a su vez, pensó que las ideas de Cantor podían ser deducidas a partir de principios lógicos aún más elementales. Es decir, Russell llevó hasta el extremo las concepciones de sus dos nuevos maestros (Peano y Cantor) en el ambiente matemático. Como una consecuencia de su extremismo, Russell llegó a postular que las matemáticas no eran más que una parte o una rama de la nueva lógica.

Bajo esta nueva doctrina, todo concepto y teorema matemático podía ser definido y deducido a partir de definiciones y teoremas lógicos. De acuerdo con Russell, todas las matemáticas puras (incluyendo aritmética, análisis, geometría, dinámica racional y otras) podían ser deducidas a partir de diez principios de deducción y otras diez premisas de carácter lógico. Algunas de aquellas nociones de la lógica que permanecían indefinidas eran la de "implicación " y "variable". En contraposición con sus maestros, Russell sostenía que se necesitaba de un solo grupo de nociones indefinibles para todas las distintas ramas de las matemáticas puras, incluyendo la dinámica racional. En la primera parte del libro, Russell enumeró y explicó esos principios indefinibles de la lógica; y, en seguida, en la segunda parte, mostró cómo se podía definir el concepto de número a partir de los principios lógicos. Russell superó problemas que había venido atacando desde hacía varios años. Definió el concepto de número a partir del concepto de clase (conjunto) y explicó cómo se podía entender una relación uno-a-uno — la cual nos permitía comparar conjuntos infinitos — sin que dependiera del concepto de número uno. Esta nueva definición de número no requería de una distinción entre los finitos y los infinitos. Cuando se definieron las operaciones de adición y multiplicación de números cardinales tampoco fue necesario recurrir a una distinción entre lo finito y lo infinito.

Esta nueva doctrina de Russell fue expuesta en detalle en su libro *Los principios de las matemáticas* publicado en mayo de 1903. Una vez demostrado que la aritmética podía ser deducida de esos principios lógicos, Russell procedió a hacer lo mismo con las otras ramas de las matemáticas puras. En particular, discute la deducción puramente lógica de la dinámica racional. En esta sección Russell explica el concepto de materia y movimiento, entre otros, a partir de constantes lógicas. Russell afirma :

> Ahora podemos intentar una formación lógica abstracta de lo que la dinámica racional exige que sea su materia. En primer lugar, el tiempo y el espacio pueden reemplazarse respectivamente por una serie unidimensional y *n*-dimensional. Luego, es claro que la única función importante de un punto material es la de establecer una correla--

ción entre todos los momentos del tiempo y algunos puntos del espacio, y que esta correlación es pluriunívoca. Tan pronto como se da la correlación, el punto material real deja de tener importancia. De modo que podemos reemplazar el punto material por una relación pluriunívoca, cuyo dominio es una cierta serie unidimensional y cuyo dominio recíproco se haya contenido en una cierta serie tridimensional. Para obtener un universo material hasta el punto que alcanzan las consideraciones cinemáticas sólo tenemos que considerar una clase de tales relaciones, sujeta a la condición de que el producto lógico de dos relaciones cualesquiera de la clase debe ser nulo. Esta condición asegura la impenetrabilidad. Si añadimos que la serie unidimensional y la tridimensional deben ser ambas continuas y que cualquier relación pluriunívoca debe definir una función continua, tendremos todas las condiciones cinemáticas para un sistema de partículas materiales, generalizado y expresado en función de constantes lógicas.

Russell intentaría llevar a cabo su programa en detalle en los *Principia Mathematica*; trabajo —inconcluso— que requirió los siguientes diez años de su investigación. Unicamente, un año después, Russell publicaría en forma más detallada la derivación o deducción de la dinámica racional a partir se sus principios lógicos, expuestos con anterioridad. Por último, señalaré que el programa de Russell no fue universalmente aceptado —tanto por filósofos, como por matemáticos y físicos— porque aún en su formulación original presentaba graves problemas que el mismo Russell no había sido capaz de resolver en ese momento.

Algunos de esos defectos coadyuvaron en la exigencia de una reexaminación de los fundamentos de las matemáticas. Sin embargo, varios aspectos del programa russelliano han dejado profunda huella en las nuevas formulaciones.

A través de este artículo hemos visto cómo fue que la teoría de los números transfinitos influenció la formulación russelliana de los principios de la física. En el caso de Russell fue su total aceptación de las ideas de Cantor y Peano lo que le permitió elaborar dicho programa. Ha habido otro tipo de reacciones a las ideas de Cantor por parte de la comunidad de físicos, pero es otro punto que podría ser discutido en una ocasión futura.

AGRADECIMIENTOS

Ante todo, quisiera agradecer de la manera más profunda la invitación que me extendió la Sociedad Mexicana de Física por medio de su presidente, Dr. Ramón Peralta-Fabi, para dirigirme a ustedes en ocasión del XXVI Congreso Nacional de Investigación en Física y del IX Congreso Nacional de Enseñanza de la Física. También quisiera agradecer al Dr. Luis Vicente H. sus valiosos comentarios y críticas. Al mismo tiempo, desearía señalar que decidí suprimir las notas y referencias para permitir una lectura continua del ensayo y para evitar una falsa impresión de academicismo.