# CALCULO DE LAS FUNCIONES DE SEGUNDO ORDEN EN LA TEORIA DE DERIVA

V.P. Milantiev

Patrice Lumumba University. Moscow-302

y

J. Arturo Tar Ortíz P.*†

Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares

(recibido julio 19, 1984; aceptado agosto 6, 1984)

RESUMEN

En el presente trabajo, utilizando consecuentemente el método de promedio para sistemas con fase de rotación rápida, se investiga la teoría de deriva tomando en cuenta los miembros de segundo orden.

Dicho método permite eliminar ciertas carencias que se presentan en la teoría de deriva a segunda aproximación de T.G.Northrop y J.A.Rome.

ABSTRACT

In this paper with help of the consistent averaging method for the sistems with rapidly rotating phase the second order drift theory is presented.

The averaging method permits to construct more consequent theory than the well-know second order drift theory by T.G.Northrop and J.A.Rome.

---

* Becario del CONACYT.

† Dirección actual: Mockba B-117330. Mosfilm #39 house-2flat-8. URSS.

## INTRODUCCION

El conocimiento de la trayectoria de las partículas cargadas es fundamental en el planteamiento de una serie de problemas dentro de la física teórica, así como en la solución de diferentes problemas de la física de plasmas y de la astrofísica.

En el estudio del movimiento de las partículas en campos magnéticos de geometría complicada, generalmente no es posible la integración de la ecuación de movimiento. Por ello, en la mayoria de los casos el movimiento de las partículas se estudia mediante métodos de aproximación.

Así, por ejemplo, en la actualidad es ampliamente conocido el método de promedio que permite investigar el movimiento de las partículas en campos magnéticos, de geometría complicada, que varían débilmente. En base a este método se formuló la teoría de deriva a primera aproximación[1] que permite encontrar la trayectoria de las partículas en campos magnéticos toroidales[2].

Sin embargo, en el estudio del movimiento de las partículas cargadas en campos magnéticos toroidales es preciso tomar en cuenta los efectos debidos a la segunda aproximación[3,4].

Hasta el momento la teoría de deriva a segunda aproximación de T.G.Northrop y J.A.Rome tiene algunas carencias: en ella no se considera el campo eléctrico; además, sus resultados no son únicos, dependen de la arbitrariedad con la que se define el centro guía de la partícula.

De esta manera se planteó la necesidad de utilizar un método alternativo que permitiera eliminar las carencias antes mencionadas. Se determinó la utilización del método de promedio.

En la formulación de la teoría de deriva a segunda aproximación, basada en el método de promedio, la dificultad inicial radica en la necesidad de cálculos largos y tediosos aun en los casos más simples, para obtener las funciones de segundo orden. El presente trabajo contiene una deducción de todas las funciones de segundo orden en la teoría de deriva.

## TEORIA

El movimiento de las partículas cargadas en campos electromagnéticos que varían suficientemente débil está dado por la ecuación

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} + \omega_o[\vec{V}\,\vec{e}_1] \,, \tag{1}$$

donde $\vec{F} = \frac{1}{m}(e\vec{E} + \vec{f})$ es la fuerza por unidad de masa; $\omega_0 = \frac{eB}{mc}$ es la frecuencia de Larmor; $\vec{V}$ es el vector velocidad; $\vec{e}_1$ es el vector unitario en la dirección del campo magnético.

Con el objeto de poder utilizar el método de promedio se introduce el cambio de variable:

$$\vec{V} = V_\parallel\,\vec{e}_1 - \frac{V_\perp}{2}\left(\vec{e}_-\,e^{i\theta} + \vec{e}_+\,e^{-i\theta}\right), \tag{2}$$

donde $V_\parallel$ y $V_\perp$ son las componentes paralela y perpendicular al campo magnético del vector velocidad; $\theta$ es la fase de rotación ciclotrónica alrededor de $\vec{B}$; $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, son lo vectores unitarios del sistema de coordenadas local ortogonal curvilíneo; $\vec{e}_\mp$ es un vector complejo determinado por la igualdad $\vec{e}_\mp = \vec{e}_2 \mp i\vec{e}_3$.

Sustituyendo (2) en (1) se obtiene un sistema de la forma:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = V_\parallel\,\vec{e}_1 - \frac{V_\perp}{2}\left(\vec{e}_- e^{i\theta} + \vec{e}_+ e^{-i\theta}\right) \equiv \vec{f}_r$$

$$\frac{dV_\parallel}{dt} = a_o + \{a_1 e^{i\theta} + a_2 e^{2i\theta} + c.c.\} \equiv f_u$$

$$\tag{3}$$

$$\frac{dV_\perp}{dt} = b_o + \{b_1 e^{i\theta} + b_2 e^{2i\theta} + c.c.\} \equiv f_\perp$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\omega_o + C_o + \{C_1 e^{i\theta} + C_2 e^{2i\theta} + c.c.\} \equiv -\omega_o + A$$

Los coeficientes del sistema (3) se dan en el Apéndice I.

La solución del sistema (3) se busca utilizando la técnica del desarrollo asintótico, en el que la expansión se hace en función del parámetro $\varepsilon$, que es la relación entre el radio ciclotrónico de la partícula y la distancia característica de la heterogeneidad del campo magnético:

$$
\begin{aligned}
X_k &= Z_k + \varepsilon g_{1k}(Z_i,t,\alpha) + \varepsilon^2 g_{2k}(Z_i,t,\alpha), \\
\theta &= \alpha + \varepsilon q_1(Z_i,t,\alpha) + \varepsilon^2 q_2(Z_i,t,\alpha),
\end{aligned}
\tag{4}
$$

donde $Z_k$, $\alpha$ son las nuevas variables, que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones(5):

$$\frac{dZ_i}{dt} = \Psi_{0k}(Z_i,t) + \varepsilon\Psi_{ik}(Z_i,t) + \varepsilon^2\Psi_{2k}(Z_i,t), \tag{5}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\omega(Z_i,t)}{\varepsilon} + \Omega_0(Z_i,t) + \varepsilon\Omega_1(Z_i,t) \tag{6}$$

y $g_{1k}\ldots g_{nk}$; $q_1\ldots q_n$; $\Psi_{0k}\ldots\Psi_{kn}$; $\Omega_0\ldots\Omega_n$ son funciones desconocidas. Para encontrarlas se sustituye (4) en el sistema (3) y se igualan las expresiones del mismo orden con respecto a $\varepsilon$, obteniendo las ecuaciones para las funciones desconocidas. Para la solución unívoca de estas ecuaciones se considera (I) que $g_{1k}\ldots g_{nk}$ ; $q_1\ldots q_n$ son funciones periódicas sin parte constante. Se supone, además, que cualquier función puede ser expresada de la siguiente forma:

$$f_k = \bar{f}_k + \tilde{f}_k, \tag{7}$$

donde

$$\bar{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_k\, d\theta \tag{8}$$

es la parte "constante" promediada en fase $\theta$; $\tilde{f}_k$ es la parte variable. Se introduce la definición[1]

$$\hat{f}_k = \widetilde{\int \tilde{f}_k \, d\theta}. \tag{9}$$

Las ecuaciones para las funciones desconocidas de primer orden son conocidas[5]. Las funciones de primer orden $g_{ik}, q_i, \Psi_{ik}, \Omega_i$, determinan las ecuaciones de deriva a primera aproximación y se dan en el Apéndice II.

CALCULO DE LAS FUNCIONES DE SEGUNDO ORDEN

Las ecuaciones para las funciones desconocidas de segundo orden se obtienen sustituyendo (4) en el sistema (3), e igualando las expresiones de segundo orden con respecto a $\varepsilon$. Estas ecuaciones tienen la forma:

$$\Psi_{iK} + \frac{\partial g_{1k}}{\partial Z_i} \Psi_{0i} + \frac{\partial g_{1k}}{\partial \alpha} \Omega_0 + \frac{\partial g_{1k}}{\partial t} + \frac{\partial g_{2k}}{\partial \alpha} \omega = \frac{\partial f_k}{\partial Z_i} g_{1i} + \frac{\partial f_k}{\partial \alpha} q_1^1, \tag{10}$$

$$\Psi_{2k} + \frac{\partial g_{1k}}{\partial Z_i} \Psi_{1i} + \frac{\partial g_{1k}}{\partial \alpha} \Omega_1 + \frac{\partial g_{2k}}{\partial Z_i} \Psi_{0i} + \frac{\partial g_{2k}}{\partial \alpha} \Omega_0 + \frac{\partial g_{2k}}{\partial t} = \frac{\partial f_k}{\partial Z_i} g_{2i} + \frac{\partial f_k}{\partial \alpha} q_2 . \tag{11}$$

Promediando las Ecs. (10) y (11) de acuerdo con (8) y tomando en cuenta (7) y (9), se obtienen las fórmulas para la determinación de las funciones de segundo orden.

$$g_{2k} = \widehat{\frac{\partial f_k}{\partial Z_i} \frac{g_{1i}}{\omega}} + \widehat{\frac{\partial f_k}{\partial \alpha} \frac{q_1}{\omega}} - \widehat{\frac{1}{\omega} \frac{\partial g_{1k}}{\partial t}} - \widehat{\frac{\partial g_{1k}}{\partial \alpha} \frac{\Omega_0}{\omega}} - \widehat{\frac{\partial g_{1k}}{\partial Z_i} \frac{\Psi_{0i}}{\omega}} , \tag{12}$$

$$q_2 = \widehat{\frac{\partial \omega}{\partial Z_i} \frac{g_{2i}}{\omega}} + \widehat{\frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial Z_i \partial Z_j} \frac{g_{1i} g_{1j}}{\omega_j}} + \widehat{\frac{\partial A g_{1i}}{\partial Z_i \omega}} + \widehat{\frac{\partial A}{\partial \alpha} \frac{q_i}{\omega}} - \widehat{\frac{1 \partial q_i}{\omega \partial t}} - \widehat{\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \frac{\Omega_0}{\omega}} - \widehat{\frac{\partial q_1}{\partial Z_i} \frac{\Psi_{0i}}{\omega}} , \tag{13}$$

$$\Psi_{2k} = \overline{\frac{\partial f_k}{\partial Z_i} g_{2i}} + \overline{\frac{\partial f_k}{\partial \alpha} q_2} + \overline{\frac{\partial f_k}{2\partial Z_i \partial Z_j} g_{1i} g_{1j}} + \overline{\frac{\partial^2 f_k}{2\partial \alpha} q_1^2} - \overline{\frac{\partial f_k}{\partial Z_i \partial \alpha} g_{1i} q_1}. \qquad (14)$$

Utilizando la forma concreta del sistema (3) y a partir de las fórmulas (12), (13) y (14), se obtienen las funciones de segundo orden: $\overrightarrow{g_{2r}}$, $g_{2\parallel}$ , $g_{2\perp}$, $q_2$, $\overrightarrow{\Psi_{2r}}$, $\Psi_{2\parallel}$ , $\Psi_{2\perp}$ . La forma explícita de las funciones de segundo orden se da en el Apéndice III.

De esta manera se obtuvieron todas las funciones de segundo orden, en base a las cuales, es posible la formulación de la teoría de deriva a segunda aproximación. Además de una manera análoga como se hizo a primera aproximación (2,5) se puede investigar la conservación de las invariantes adiabáticas, el impulso canónico y la energía, así como el movimiento de las partículas en sistemas toroidales.

## DERIVA DE POLARIZACION

Las funciones de segundo orden nos permiten calcular las velocidades de deriva a segunda aproximación. Aquí, por simplicidad, y con el objeto de subrayar que en los cálculos realizados se ha considerado el campo eléctrico, se tomarán en cuenta sólo aquellos miembros que permiten conocer los efectos que el campo eléctrico produce a segunda aproximación:

$$\vec{\Psi}_{2r} = \frac{\vec{e}_+ G_1^\perp}{2} + \frac{V_\perp \vec{e}_+}{2i} Q_1 - \frac{V_\perp \vec{e}_+}{2} q_1^{1*} q_1^2 - \frac{\vec{e}_1 b_1^*}{2\omega} q_1^2 - \frac{\vec{e}_+ b_2}{4\omega} q_1^{1*} + \text{c.c.} \qquad (15)$$

Tomando en cuenta las expresiones concretas de los miembros de la fórmula (15), que describen los efectos del campo eléctrico y transformándolos de tal manera que en ellos sólo figuren cantidades conocidas $\vec{B}$ y $\vec{F}$ y no figuren los vectores $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ (5), obtenemos:

$$\vec{\Psi}_{2r} = -\frac{[\vec{e}_1[\vec{e}_1\vec{F}]]}{\omega^2} + \frac{V_\parallel}{4\omega^2}\nabla\cdot\vec{e}_1\,[\vec{e}_1[\vec{e}_1\vec{F}]] + \frac{V_\parallel \vec{e}_1\cdot\text{rot}}{2\omega^2}\vec{e}_1[\vec{e}_1\vec{F}] - \qquad (16)$$
$$- \frac{3V_\parallel}{8\omega^2}[\vec{e}_1[\vec{e}_1\vec{F}]\cdot\nabla\vec{e}_1] - \frac{3V_\parallel}{8\omega^2}[\vec{e}_1[\vec{e}_1\vec{F}_\perp\cdot\nabla\vec{e}_1]],$$

donde $\vec{F} = \frac{e\vec{E}}{m}$ y $\vec{F}_{\perp} = \vec{F} - \vec{e}_1 F_{\parallel}$.

El primer miembro de la fórmula (16) describe la deriva de polarización. La interpretación de los demás términos es difícil. Sin embargo, es fácil de observar que todos ellos están relacionados con la heterogeneidad y curvatura del campo magnético.

## UNICIDAD DE LOS RESULTADOS

El problema de la unicidad de los resultados, relacionado con la arbitrariedad con que se define el centro guía de la partícula, en la formulación de la teoría de deriva, en abase al método de promedio, se resuelve exigiendo que el centro guía de la partícula caracterize el movimiento total promedio.

Las funciones $g_{1k}\ldots g_{nk}$, $q_1\ldots q_n$, en el desarrollo asintótico (4), en general, no están univaluadas. Siempre es posible pasar a un nuevo desarrollo asintótico, por medio de un cambio de variable de la forma:

$$Z_k = Z_k + \varepsilon f_{1k} + \varepsilon^2 f_{2k} \tag{17}$$

$$\alpha_k = A_k + \varepsilon \ell_1 + \varepsilon^2 \ell_2 \tag{18}$$

La unicidad de las funciones $g_{ij}$, $q_i$ requiere de alguna condición adicional, por ejemplo que el sistema (5), (6) fuera canónico[1]. Sin embargo generalmente se exige que las funciones $g_{ij}$ , $q_i$ sean funciones periódicas sin parte constante[1]. Esta condición significa que $Z_k$ y $\alpha_k$ caracterizan el movimiento total promedio, mientras que las funciones $g_{1k}\ldots g_{nk}$, $q_1\ldots q_n$, caracterizan la parte oscilatoria del movimiento.

## CONCLUSIONES

En este trabajo se desarrolla la teoría de deriva a segunda aproximación, utilizando consecuentemente el método de promedio. Se muestra que el efecto del campo eléctrico a segunda aproximación conduce al surgimiento de la deriva de polarización. Se señalan las ventajas del método de promedio en relación con el método de órbitas.

APENDICE-I

$$a_0 = F_\parallel + \frac{V_\perp^2}{4} (\vec{e}_+\vec{e}_- + \vec{e}_-\vec{e}_+):\nabla\vec{e}_1$$

$$a_1 = \frac{V_\perp}{2} \vec{e}_-\cdot\vec{e}_1^{\,1}$$

$$a_2 = \frac{V_\perp^2}{4} (\vec{e}_-\vec{e}_-:\nabla\vec{e}_1)$$

$$b_0 = \frac{V_\parallel V_\perp}{4} (\vec{e}_-\vec{e}_+ + \vec{e}_+\vec{e}_-):\nabla\vec{e}_1$$

$$b_1 = \frac{\vec{F}\cdot\vec{e}_1}{2} - \frac{V_\parallel}{2} \vec{e}_1^{\,1}\cdot\vec{e}_-$$

$$b_2 = -\frac{V_\parallel V_\perp}{4} (\vec{e}_-\vec{e}_-:\nabla\vec{e}_1)$$

$$c_0 = \frac{1}{4i} (\vec{e}_+^{\,1}\cdot\vec{e}_- - \vec{e}_-^{\,1}\cdot\vec{e}_+) + \frac{V_\parallel}{4i} (\vec{e}_-\vec{e}_+ - \vec{e}_+\vec{e}_-):\nabla\vec{e}_1$$

$$c_1 = -\frac{1}{2iV_\perp} \vec{F}\cdot\vec{e}_- + \frac{1}{2i} \frac{V_\parallel}{V_\perp} \vec{e}_1^{\,1}\cdot\vec{e}_- + \frac{V_\perp}{4i} (\vec{e}_-\vec{e}_-:\nabla\vec{e}_+)$$

$$c_2 = \frac{V_\parallel}{4i} (\vec{e}_-\vec{e}_-:\nabla\vec{e}_1),$$

donde

$$(\quad)' = \frac{\partial}{\partial t} + V_\parallel (\vec{e}_1\cdot\nabla)$$

$$F_\parallel = \vec{F}\cdot\vec{e}_1$$

$:_{-}$ Significa el doble producto escalar de sus respectivas diadas.

APENDICE-II

$$\vec{\Psi}_{0r} = V_\parallel \vec{e}_1$$

$$\Psi_{0\parallel} = \frac{F_\parallel}{2} + \frac{V_\perp^2}{4}(\vec{e}_+\vec{e}_-:\nabla\vec{e}_1) + c.c.$$

$$\Psi_{0\perp} = -\frac{V_\parallel V_\perp}{4}(\vec{e}_-\vec{e}_+:\nabla\vec{e}_1) + c.c.$$

$$\vec{g}_{1r} = \frac{V_\perp}{2i\omega}\left\langle \vec{e}_- e^{i\alpha} - \vec{e}_+ e^{-i\alpha}\right\rangle$$

$$g_{1\parallel} = \left\langle \frac{a_1}{i\omega}e^{i\alpha} + \frac{a_2}{2i\omega}e^{2i\alpha} + c.c.\right\rangle$$

$$g_{1\perp} = \left\langle \frac{b_1}{i\omega}e^{i\alpha} + \frac{b_2}{2i\omega}e^{2i\alpha} + c.c.\right\rangle$$

$$\Omega_0 = \left\langle \frac{V_\parallel}{4i}(\vec{e}_-\vec{e}_+:\nabla\vec{e}_1) + \frac{1}{4i}(\vec{e}_+^{\,1}\cdot\vec{e}_-) + c.c.\right\rangle$$

$$q_1^1 = \frac{C_1}{i\omega} - \frac{V_\perp}{2\omega^2}\vec{e}_-\cdot\nabla\omega$$

$$q_1^2 = \frac{C_2}{2i\omega}$$

$$q_1 = q_1^1 e^{i\alpha} + q_1^2 e^{2i\alpha} + c.c.$$

$$\vec{\Psi}_{1r} = \left\langle \frac{\vec{e}_+ b_1}{2i\omega} + \frac{V_\perp^2(\vec{e}_-\cdot\nabla)\vec{e}_+}{4i\omega} + \frac{V_\perp}{2i}\left[\frac{\vec{e}_- C_1^*}{i\omega} - \frac{V_\perp\vec{e}_-}{2\omega^2}(\vec{e}_+\cdot\nabla\omega)\right] + c.c.\right\rangle.$$

$$\Psi_{1\parallel} = \left\langle \frac{a_1^* b_1}{V_\perp i\omega} + \frac{V_\perp}{2i\omega}\vec{e}_-\cdot\nabla a_1^* + i a_1(q_1^{1*}) + c.c.\right\rangle$$

$$\Psi_{1\perp} = \left\langle \frac{V_\perp}{2i\omega}(\vec{e}_-\cdot\nabla)b_1^* + i b_1(q_1^{1*}) + c.c.\right\rangle ,$$

donde $\omega = -\omega_0$

* y c.c.- significan el complejo conjugado

$$\vec{g}_{2r} = \vec{G}_1^r e^{i\alpha} + \vec{G}_2^r e^{2i\alpha} + c.c.$$

$$g_{2\parallel} = G_1^\parallel e^{i\alpha} + G_2^\parallel e^{2i\alpha} + G_3^\parallel e^{3i\alpha} + c.c.$$

$$g_{2\perp} = G_1^\perp e^{i\alpha} + G_2^\perp e^{2i\alpha} + G_3^\perp e^{3i\alpha} + G_4^\perp e^{4i\alpha} + c.c.$$

$$q_2 = Q_1 e^{i\alpha} + Q_2 e^{2i\alpha} + Q_3 e^{3i\alpha} + Q_4 e^{4i\alpha} + c.c.$$

APENDICE-III

$$\vec{G}_1^{r} = -\frac{1}{2\omega^2}\left\langle\left\{ V_\parallel V_\perp \nabla_- \vec{e}_1 + 2\vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_+ b_2 - \nabla_\perp \omega \left(\frac{\vec{e}_-}{\omega}\right)^1 - \vec{e}_-(b_0 + iV_\perp C_0)\right\}\right\rangle$$

$$\vec{G}_2^{r} = -\frac{1}{4\omega^2}\left\langle\left\{ \frac{V_\perp^2}{2} \nabla_- \vec{e}_- + \vec{e}_1 a_2 + \vec{e}_- b_1 - V_\perp \omega \vec{e}_- q_1^1 \right\}\right\rangle$$

$$G_1^{\parallel} = \left\langle\left\{ L_1(a_0) - L_1^*(a_2) + H(a_1^*) + \frac{1}{\omega} D\left(\frac{a_1}{\omega}\right) + \frac{2a_2}{\omega} q_1^{1*} - \frac{a_1^* C_2}{2i\omega^2} - \frac{a_1 C_0}{i\omega^2} \right\}\right\rangle$$

$$G_2^{\parallel} = \frac{1}{2}\left\langle\left\{ L_1(a_1) + H(a_0) + \frac{1}{\omega} D\left(\frac{a_2}{2\omega}\right) + \frac{a_1 q_1^1}{\omega} - \frac{a_2 C_0}{i\omega^2} \right\}\right\rangle$$

$$G_3^{\parallel} = \frac{1}{3}\left\langle\left\{ L_1(a_2) + H(a_1) + \frac{a_1 C_2}{2i\omega^2} + \frac{2a_2}{\omega} q_1^1 \right\}\right\rangle$$

$$G_1^{\perp} = \left\langle\left\{ L_1(b_0) - L_1^*(b_2) + H(b_1^*) + \frac{1}{\omega} D\left(\frac{b_1}{\omega}\right) + \frac{2b_2}{\omega} q_1^{1*} - \frac{b_1^* C_2}{2i\omega^2} - \frac{b_1 C_0}{i\omega^2} \right\}\right\rangle$$

$$G_2^{\perp} = \frac{1}{2}\left\langle\left\{ L_1(b_1) + H(b_0) + \frac{1}{\omega} D\left(\frac{b_2}{2\omega}\right) + \frac{b_1}{\omega} q_1^1 - \frac{b_2 C_0}{i\omega^2} \right\}\right\rangle$$

$$G_3^{\perp} = \frac{1}{3}\left\langle\left\{ L_1(b_2) + H(b_1) + \frac{b_1 C_2}{2i\omega^2} + \frac{2b_2}{\omega} q_1^1 \right\}\right\rangle$$

$$G_4^{\perp} = \frac{1}{4}\left\langle\left\{ H(b_2) + \frac{b_2 C_2}{i\omega^2} \right\}\right\rangle$$

$$Q_1 = L_1(C_0) - L_1^*(C_2) + H(C_1^*) - \frac{1}{i\omega} D(q_1^1) + \frac{2C_2 q_1^{1*}}{\omega} - \frac{C_1^* q_1^2}{\omega}$$

$$- \frac{C_0 q_1^1}{\omega} + \frac{(\vec{G}_1^r \cdot \nabla)\omega}{i\omega}$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} \left\langle L(C_1) + H(C_0) - \frac{1}{i\omega} D(q_1^2) + \frac{C_1 q_1^1}{\omega} - \frac{2C_0 q_1^2}{\omega} - \frac{V_\perp^2}{8i\omega^3} \right.$$

$$\left. \vec{e}_- \vec{e}_- : \nabla\nabla\omega + \frac{(\vec{G}_2^r \cdot \nabla\omega)}{i\omega} \right\rangle$$

$$Q_3 = \frac{1}{3} \left\langle L_1(C_2) + H(C_1) + \frac{2C_2 q_1^1}{\omega} + \frac{C_1 q_1^2}{\omega} \right\rangle$$

$$Q_4 = \frac{1}{4} \left\langle H(C_2) + \frac{2C_2 q_1^2}{\omega} \right\rangle$$

donde: $(\vec{e}_{\mp} \cdot \nabla) \equiv \nabla_{\mp}$

$$Ln \equiv - \frac{a_n}{n\omega^2} \frac{\partial}{\partial V_\parallel} - \frac{b_n}{n\omega^2} \frac{\partial}{\partial V_\perp} - \frac{V_\perp}{2\omega^2} \nabla$$

$$H \equiv L_2 + \frac{V_\perp}{2\omega^2} \nabla .$$

$$D \equiv (\ )' + a_0 \frac{\partial}{\partial V_\parallel} + b_0 \frac{\partial}{\partial V_\perp}$$

$$\vec{\Psi}_{2r} = \frac{\vec{e}_+ G_1^\perp}{2} + \frac{V_\perp}{2} (\vec{G}_1^r \cdot \nabla)\vec{e}_+ + \frac{V_\perp}{2i} \vec{e}_+ Q_1 + \frac{V_\parallel V_\perp}{8\omega^2} (\vec{e}_+ \vec{e}_- : \nabla\nabla) \vec{e}_1 +$$
$$+ \frac{V_\perp}{4\omega^2} a_1 \nabla_+ \vec{e}_1 + \frac{3b_2}{16\omega^2} \nabla_+ \vec{e}_+ - \frac{\vec{e}_+ b_2}{2\omega} q_1^{1*} + \frac{\vec{e}_+ b_1^*}{2\omega} q_1^2 + \text{c.c.}$$

$$\Psi_{2\parallel} = \frac{\partial a_1}{\partial V_\parallel} G_1^{\parallel *} + \frac{\partial a_1}{\partial V_\perp} G_1^{\perp *} + \frac{\partial a_2}{\partial V_\perp} G_2^{\perp *} + (\vec{G}_1^{r*} \cdot \nabla) a_1^* + (\vec{G}_2^{r*} \cdot \nabla) a_2^* + i a_1 Q_1^* +$$
$$+ 2i a_2 Q_2^* + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a_0}{\partial V_\perp^2} \left( \frac{b_1 b_1^*}{\omega^2} + \frac{b_2 b_2^*}{4\omega^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a_2}{\partial V_\perp^2} \frac{b_1^* b_1^*}{\omega^2} + \frac{V_\perp^2}{8\omega^2} (\vec{e}_- \vec{e}_+ : \nabla\nabla) a_0^-$$

$$- \frac{V_\perp}{8\omega^2} (\vec{e}_-\vec{e}_-:\nabla\nabla) a_2^* + \frac{V_\perp}{4\omega^2} a_2^* \nabla_- \frac{\partial a_1}{\partial V_\parallel} + \frac{V_\perp b_1}{2\omega^2} \left\{ \nabla_+ \frac{\partial a_0^*}{\partial V_\perp} - \nabla_- \frac{\partial a_2^*}{\partial V_\perp} \right\} -$$

$$- a_1 q_1^1 q_1^{2*} + \frac{V_\perp b_2}{4\omega^2} \nabla + \frac{\partial a_1}{\partial V_\perp} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial V_\parallel \partial V_\perp} \left\{ \frac{a_1 b_2^*}{2\omega^2} + \frac{a_2^* b_1}{2\omega^2} \right\} - 2 a_2 q_1^{1*} q_1^{1*} +$$

$$+ \frac{\partial a_1}{\partial V_\parallel} \left\{ \frac{a_1 q_1^{2*}}{\omega} - \frac{a_2^* q_1^1}{2\omega} \right\} + \frac{\partial a_1}{\partial V_\perp} \left\{ \frac{b_1 q_1^{2*}}{\omega} - \frac{b_2^* q_1^1}{2\omega} \right\} - 2 \frac{\partial a_2}{\partial V_\perp} \frac{b_1^* q_1^{1*}}{\omega} +$$

$$+ \frac{V_\perp}{\omega} q_1^1 \nabla_- a_2^* + \text{c.c.}$$

$$\Psi_{2\perp} = \frac{\partial b_1}{\partial V_\parallel} G_1^{\parallel *} + \frac{\partial b_2}{\partial V_\parallel} G_2^{\parallel *} + \frac{\partial b_2}{\partial V_\perp} G_2^{\perp *} + (\vec{G}_1^r \cdot \nabla) b_1^* + (\vec{G}_2^r \cdot \nabla) b_2^* + i b_1 Q_1^* +$$

$$+ 2 i b_2 Q_2^* - + \frac{a_1 a_2^*}{2\omega^2} \frac{\partial^2 b_1}{\partial V_\parallel{}^2} + \frac{V_\perp^2}{8\omega^2} \vec{e}_-\vec{e}_+ : \nabla\nabla b_0^- \frac{V_\perp^2}{8\omega^2} \vec{e}_-\vec{e}_+ : \nabla\nabla b_2^* + \frac{V_\perp a_2}{4\omega^2}$$

$$\nabla_+ \frac{\partial b_1^*}{\partial V_\parallel} - b_1 q_1^1 q_1^{2*} + \frac{V_\perp a_1}{2\omega^2} \left\{ \nabla_+ \frac{\partial b_0^*}{\partial V_\parallel} - \nabla_- \frac{\partial b_2^*}{\partial V_\parallel} \right\} + \frac{V_\perp b_1}{2\omega^2} \left\{ \nabla_+ \frac{\partial b_0}{\partial V_\perp} - \right.$$

$$\left. \nabla_- \frac{\partial b_2^*}{\partial V_\perp} \right\} + \frac{\partial^2 b_0}{\partial V_\parallel \partial V_\perp} \left\{ \frac{a_1 b_1^*}{\omega^2} + \frac{a_2 b_2^*}{4\omega^2} \right\} - \frac{\partial^2 b_2}{\partial V_\parallel \partial V_\perp} \frac{a_1^* b_1^*}{\omega^2} - 2 b_2 q_1^{1*} q_1^{1*} +$$

$$+ \frac{\partial b_1}{\partial V_\parallel} \left\{ \frac{a_1 q_1^{2*}}{\omega} - \frac{a_2^* q_1^1}{2\omega} \right\} - \frac{2 a_1^*}{\omega} q_1^{1*} \frac{\partial b_2}{\partial V_\parallel} - \frac{2 b_1^*}{\omega} q_1^{1*} \frac{\partial b_2}{\partial V_\perp} + \frac{V_\perp}{2\omega} q_1^2 \nabla_+$$

$$+ b_1^* - \frac{V_\perp}{\omega} q_1^1 \nabla_- b_2^* \text{ c.c.}$$

REFERENCIAS

1. N.N. Bogoliubov, Yu. A. Mitropolski, *Métodos asintóticos en la teoría de las oscilaciones no lineales*, Moscú Gostekhisdat (1958) (en ruso).
2. L.S. Solovév, V.D. Shafranov, "Voprosy teorii Plazmy", edited by M.A. Leontovich, *Atomizdat, Moscow.* 5 (1967)3 (en ruso).

3. T.G. Northrop, J.A. Rome, *Physics of Fluids* 21 (1978) 384.
4. V.P. Milantiev, T.P. Ortiz, *Plasma Physics* 24 (1982) 1491.
5. A.I. Morozov, L.S. Solovev, *In Reviews of Plasma Physics*, edited by M.A. Leontovich. (Plenum, New York) Vol. 2 (1966) 201.