

DISPERSION INELASTICA DE ELECTRONES POR ATOMOS DE HELIO

R.M. Méndez-Moreno

Facultad de Ciencias U.N.A.M.

Apartado Postal 70-646, México 04510, D.F.

(recibido diciembre 15, 1983; aceptado julio 18, 1984)

RESUMEN

En este trabajo se presenta el cálculo de secciones diferenciales de dispersión inelástica. Se discute el método de la serie de Born hasta segundo orden para evaluar las amplitudes de dispersión correspondientes a los términos directo y de intercambio. Para calcular los términos de segundo orden se emplea la segunda aproximación de Born simplificada, en la cual la energía de los estados intermedios se substituye por una energía promedio, permitiendo utilizar la relación de cerradura para efectuar la suma a todos los estados discretos y del continuo. Esta aproximación es mejorada incluyendo en forma exacta la suma a los niveles más bajos. Como aplicación de este método, se presentan resultados para la dispersión inelástica de electrones por helio, considerando el caso de la excitación del estado base al estado 2^1P . Se muestran los resultados algebraicos para este proceso hasta segundo orden en la serie de Born. Se hicieron también algunos cálculos numéricos considerando el término directo de la amplitud a primer orden más el término de intercambio en la aproximación de Ochkur.

ABSTRACT

We discuss the evaluation of inelastic differential cross sections. The method we use is the Born series through second order to calculate the direct and exchange terms of the scattering amplitudes. In the second order terms we applied the simplified second Born approximation, in which an average energy is introduced in order to employ a closure relation to sum to all the intermediate states. This approximation is improved including the exact form of the first terms in the sum. Algebraic results for inelastic scattering with helium are presented as an application of the method discussed. We consider the excitation of the 2^1P state. We also show some numerical results for this process.

1. INTRODUCCION

El estudio de la dispersión no relativista de electrones por átomos es uno de los problemas fundamentales en física atómica. En los últimos años ha habido un interés creciente en este tipo de eventos y se han llevado a cabo muchos experimentos que han arrojado un número considerable de datos experimentales⁽¹⁾. En cuanto a los métodos teóricos empleados para calcular las secciones totales de dispersión, existen varios de éstos en la literatura, los cuales son utilizados según las características del problema y las regiones de validez de los mismos⁽²⁾. Algunos de estos métodos teóricos han sido tomados de otras áreas de la física como son la física de altas energías y la física nuclear, como ejemplos tenemos la teoría de Glauber⁽³⁾, el método del potencial óptico⁽⁴⁾ y el de la serie de eikonal-Born⁽⁵⁾.

El propósito de este trabajo es discutir el método de la serie de Born y sus aplicaciones. Con este fin se discute el cálculo de las secciones diferenciales para la dispersión inelástica de electrones por átomos de helio. El cálculo algebraico es llevado hasta segundo orden y se discuten algunas aproximaciones utilizadas, así como dificultades encontradas. Los resultados presentados corresponden a la excitación del estado base del helio al estado 2^1P .

2. TEORIA

Se considera la dispersión inelástica no relativista de un elec-

trón incidente con energía E por un átomo neutro de número atómico Z . El núcleo atómico se coloca en el origen de nuestro sistema coordinado, la posición del electrón proyectil es indicada por \underline{r}_0 y se utilizan \underline{r}_i , con $i = 1, 2, \dots, Z$, para indicar las posiciones de los electrones del átomo. Los vectores de onda inicial y final del electrón incidente son \underline{k}_i y \underline{k}_f . Los efectos del principio de Pauli no se consideran en este momento, sin embargo más adelante se introducen las amplitudes debidas a efectos de intercambio. Se usarán unidades atómicas a lo largo de este de este trabajo.

El hamiltoniano de este sistema electrón-átomo está dado por

$$H = H_0 + V, \quad (2.1)$$

donde H_0 es el hamiltoniano del proyectil y el átomo libres y V es el potencial de interacción entre éstos, es decir,

$$V = \sum_{i=1}^Z \frac{1}{r_{i0}} - \frac{Z}{r_0}, \quad (2.2)$$

donde

$$r_{i0} = |\underline{r}_i - \underline{r}_0|$$

y H_0 puede escribirse como

$$H_0 = \frac{1}{2} \nabla_{\underline{r}_0}^2 + H_a \quad (2.3)$$

El primer término es la energía cinética del electrón incidente y H_a es el hamiltoniano del átomo blanco. Llamando $|n\rangle$ a los eigenestados del hamiltoniano H_a , tenemos $H_a |n\rangle = \omega_n |n\rangle$, en donde ω_n es la energía interna del átomo en el estado.

La sección diferencial de dispersión inelástica está dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k_f}{k_i} |f|^2, \quad (2.4)$$

donde f es la amplitud de dispersión (término directo y de inter-

cambio) del proceso. Con el fin de evaluar esta última es necesario encontrar la solución a la ecuación de Schrödinger

$$H\psi = E\psi, \quad (2.5)$$

donde H está dado por la expresión (2.1).

Las funciones que resuelven (2.5) satisfacen las ecuaciones de Lippmann-Schwinger⁽⁶⁾:

$$\psi_i^+ = \phi_i + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V\psi_i^+, \quad (2.6a)$$

$$\psi_f^- = \phi_f + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{E - H_0 - i\epsilon} V\psi_f^-, \quad (2.6b)$$

donde $G_0^\pm = \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon}$ son los operadores de Green, y las ondas libres $\phi_{i,f}^\pm$ son eigenfunciones de H_0 .

Estas ecuaciones pueden resolverse por el método de iteración de Neumann⁽⁷⁾. Tomando como aproximación de orden cero a las ondas libres, la solución al hamiltoniano del problema de dispersión está dada por la expresión

$$\psi_{i,f}^\pm = \phi_{i,f}^\pm + G_0^\pm V\phi_{i,f}^\pm + G_0^\pm V G_0^\pm V\phi_{i,f}^\pm + \dots \quad (2.7)$$

La amplitud de dispersión, la cual se escribe en términos de estas soluciones, es decir,

$$f = - (2\pi)^2 \langle \phi_f | V | \psi_i \rangle \quad (2.8)$$

quedará expresada como una serie, conocida como la serie de Born. Sustituyendo la Ec. (2.7) en (2.8) obtenemos

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_{Bn}, \quad (2.9)$$

donde

$$\tilde{f}_{Bn} = -(2\pi)^2 \langle \phi_f | V G_0^+ V \dots G_0^+ V | \phi_i \rangle; \quad (2.10)$$

como puede verse, en el término de orden n de la serie de Born, Ec. (2.10), V aparece n veces y G_0^+ , $n-1$ veces.

Cuando la partícula incidente lleva una energía suficientemente alta, podemos evaluar amplitudes de dispersión con bastante exactitud utilizando únicamente el primer término de la serie de Born, esto es conocido como la aproximación de Born. La condición de validez para esta aproximación es $Va \ll \hbar v$, donde V es la intensidad del potencial de interacción entre el blanco y la partícula incidente y a es el alcance de dicho potencial, v es la velocidad del proyectil. Esta condición puede ser reescrita en la forma $Z \ll \hbar v/e^2$ donde Z es el número atómico del átomo blanco⁽⁸⁾. Entonces esta aproximación es válida si la velocidad del proyectil satisface $Zc/137 < v < c/2$, donde c es la velocidad de la luz.

Nuestro interés es calcular la amplitud de dispersión hasta segundo orden en la serie de Born, es decir,

$$f_{B2} = \tilde{f}_{B1} + \tilde{f}_{B2}. \quad (2.11)$$

Utilizando la Ec. (2.10), el primer término de la serie está dado por

$$\tilde{f}_{B1} = -(2\pi)^2 \langle \phi_f | V | \phi_i \rangle \quad (2.12)$$

donde los eigenestados $\phi_{i,f}$ del hamiltoniano libre serán denotados por $|n,q\rangle = |n\rangle |q\rangle$, donde $|n\rangle$ se refiere al estado del átomo blanco y q es el número de onda del proyectil. En la representación de coordenadas

$$|n,q\rangle = (2\pi)^{-3/2} e^{iq_0 \cdot r_0} \psi_n(X), \quad (2.13)$$

donde X son las coordenadas del átomo.

Utilizando (2.13) en la Ec. (2.12), el primer término de la amplitud está dado por

$$\tilde{f}_{B1} = -\frac{1}{2\pi} \int e^{i \frac{k}{\hbar} \cdot r_0} \langle f | V | i \rangle d^3 r_0, \quad (2.14)$$

donde $\underline{K} = \underline{k}_i - \underline{k}_f$ es el momento transferido, $|i\rangle$ y $|f\rangle$ son los estados inicial y final del blanco respectivamente y V es el potencial de interacción electrón-átomo blanco.

Cabe señalar que este término se comporta como k_i^{-1} para valores grandes k_i ⁽⁹⁾.

El segundo término en (2.11) es

$$\bar{f}_{B2} = 8\pi^2 \int d^3q \sum_n \frac{\langle f, \underline{k}_f | V | n, \underline{q} \rangle \langle n, \underline{q} | V | i, \underline{k}_i \rangle}{q^2 - k_1^2 + 2(\omega_n - \omega_i) - i\epsilon} \quad (\epsilon \rightarrow 0^+) \quad (2.15)$$

donde G_0 está dada en la representación de momento. La suma es a todos los estados intermedios discretos y del continuo y $\omega_n - \omega_i$ es la diferencia de energías entre el estado intermedio y el estado inicial del átomo blanco.

La integración a las partes de onda plana de los elementos de matriz en (2.15) puede hacerse en general, conduciendo a la siguiente expresión:

$$\bar{f}_{B2} = \frac{2}{\pi^2} \int d^3q \sum_n \frac{\langle f | \sum_{m=1}^Z (e^{-i\underline{k}_f \cdot \underline{r}_m} - 1) | n \rangle \langle n | \sum_{\mu=1}^Z (e^{i\underline{k}_i \cdot \underline{r}_\mu} - 1) | i \rangle}{K_i^2 K_f^2 [q^2 - k_i^2 + 2(\omega_n - \omega_i) - i\epsilon]} \quad (\epsilon \rightarrow 0^+) \quad (2.16)$$

donde $\underline{K} = \underline{k}_i - \underline{q}$ y $\underline{K}_f = \underline{k}_f - \underline{q}$, aquí se ha utilizado la integral de Bethe

$$\int \frac{e^{i\underline{K} \cdot \underline{r}'}}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d^3r' = \frac{4\pi}{K^2} e^{i\underline{K} \cdot \underline{r}} \quad (2.17)$$

de tal forma que

$$\int e^{-i\underline{k}_f \cdot \underline{r}_0} \left(\sum_{j=1}^Z \frac{1}{r_{j0}} - \frac{Z}{r_0} \right) e^{i\underline{q} \cdot \underline{r}_0} d^3r_0 = \frac{4\pi}{K_f^2} \sum_{j=1}^Z e^{-i\underline{k}_f \cdot \underline{r}_j} - \frac{4\pi Z}{K_f^2} \quad (2.18)$$

La evaluación de (2.16) involucra una suma a todos los estados intermedios, discretos y del continuo. Sin embargo esta expresión puede ser calculada fácilmente si hacemos una aproximación; ésta consiste en substituir la diferencia de energía $\omega_n - \omega_0$ por una diferencia promedio $\bar{\omega}$, de tal forma que se elimina la dependencia del denominador con n . De

esta forma podemos usar la propiedad de cerradura para hacer la suma a todos los estados. La expresión que resulta de esto se conoce en la literatura como la segunda aproximación de Born simplificada. Esta tiene la forma

$$\bar{F}_{SB2} = \frac{2}{\pi^2} \int d^3q \frac{\langle f | [\prod_{m=1}^Z (e^{-i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r}_m} - 1)] [\prod_{\mu=1}^Z (e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_\mu} - 1)] | i \rangle}{K_i^2 K_f^2 (q^2 - p_i^2 - i\epsilon)} \quad (\epsilon \rightarrow 0^+) \quad (2.19)$$

donde $p_i^2 = k_i^2 - 2\bar{\omega}$. Esta ecuación tiene una parte real y una imaginaria, el comportamiento asintótico de éstas (para valores grandes de K) va como k_i^{-1} y k_i^{-2} , respectivamente.

La amplitud de dispersión a segundo orden de la serie de Born no está completa si no se incluye la amplitud de intercambio⁽¹⁰⁾. El término a primer orden está dado por

$$\bar{g}_{B1} = -\frac{1}{2\pi} \int e^{-i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r}_1} \psi_f^*(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_Z) \left(\prod_{j \neq 1}^Z \frac{1}{r_{j0}} - \frac{Z}{r_0} \right) e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_0} \psi_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_Z) d^3r_0 d^3r_2, \dots, d^3r_Z \quad (2.20)$$

Es interesante señalar que la contribución importante a \bar{g}_{B1} proviene del término $1/r_{10}$, ya que éste se comporta como k_i^{-2} para valores grandes de k_i ; por otra parte la contribución de $1/r_0$ se comporta como k_i^{-6} y los términos restantes caen como k_i^{-10} para valores grandes del número de onda incidente. Por lo tanto es razonable quedarse con el término dominante. Transformando la Ec. (2.20) al espacio de momento y reteniendo sólo la contribución principal en el desarrollo en términos de k_i , obtenemos la aproximación de Ochkur:⁽¹¹⁾

$$g_{och} = -\frac{2}{k_i^2} \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \psi_f^*(\mathbf{r}) \psi_i(\mathbf{r}) d^3r \quad (2.21)$$

3. DISPERSION INELASTICA DE ELECTRONES POR HELIO EN EL ESTADO BASE

Se van a aplicar los resultados anteriores al problema de excitación del helio al estado 2^1P , por impacto de electrones. Se considerarán

energías intermedias es decir $50 \text{ eV} \leq E \leq 500 \text{ eV}$ para el electrón incidente. Como función de onda del estado base se usará la siguiente⁽¹²⁾:

$$\Psi_{1'S}(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = \Psi_0(\underline{r}_1) \Psi_0(\underline{r}_2), \quad (3.1a)$$

donde

$$\Psi_0(\underline{r}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{i=1}^2 A_i e^{-Z_i r}. \quad (3.1b)$$

Los valores de las constantes en esta ecuación son $A_1 = 2.60505$, $A_2 = 2.08144$, $Z_1 = 1.41$ y $Z_2 = 2.61$.

Por otra parte, para el estado 2^1P se escogió la función⁽¹³⁾

$$U_{1m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [r_1 e^{-Z_a r_1/2} e^{-Z_1 r_2} y_{1m}(\Omega_1) + r_2 e^{-Z_a r_2/2} e^{-Z_1 r_1} y_{1m}(\Omega_2)], \quad (3.2)$$

en donde $Z_1 = 2$ y $Z_a = 0.97$, el índice m se refiere a los subniveles magnéticos

Utilizando (2.14) y (2.2), el primer término de la amplitud está dado por

$$\bar{f}_{B1} = -\frac{1}{\pi} \int \frac{e^{i\mathbf{K} \cdot \underline{r}_0}}{r_{01}} \Psi_{2^1P}^*(\underline{r}_1, \underline{r}_2) \Psi_{1'S}(\underline{r}_1, \underline{r}_2) d^3r_0 d^3r_1 d^3r_2. \quad (3.3)$$

Después de un poco de álgebra esta expresión queda como

$$\begin{aligned} \bar{f}_{B1} = & -\frac{64\sqrt{8\pi}}{K^2} i \vec{K} \left\{ \frac{Z_1 + \frac{Z_a}{2}}{[(Z_1 + \frac{Z_a}{2})^2 + K^2]^3} \left[\frac{A_1^2}{(Z_1 + Z_1)^3} + \frac{A_1 A_2}{(Z_2 + Z_1)^3} \right] \right. \\ & \left. + \frac{Z_2 + \frac{Z_a}{2}}{[(Z_2 + \frac{Z_a}{2})^2 + K^2]^3} \left[\frac{A_1 A_2}{(Z_1 + Z_1)^3} + \frac{A_2^2}{(Z_2 + Z_1)^3} \right] \right\} \quad (3.4) \end{aligned}$$

La expresión (3.4) da una amplitud vectorial; de aquí, la amplitud de excitación a cada subnivel magnético está dada por

$$\bar{f}_{B1}^{2^1P\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} [(\bar{f}_{B1}^{2^1P})_x \pm i \cdot (\bar{f}_{B1}^{2^1P})_y], \quad (3.5a)$$

$$\bar{F}_{B1}^{2'P_0} = (\bar{F}_{B1}^{2'P})_Z. \quad (3.5b)$$

Utilizando la expresión (2.19) para la segunda aproximación de Born, del término directo de la amplitud de dispersión, obtenemos

$$\bar{F}_{SB2} = \frac{2}{\pi^2} \int d^3q \frac{\langle 2'P | 2e^{iK_i \cdot r_1} - 4e^{iK_f \cdot r_1} - 4e^{iK_i \cdot r_1} + 2e^{-iK_f \cdot r_1} e^{iK_i \cdot r_2} | 1'S \rangle}{K_i^2 K_f^2 (q^2 - p_i^2 - i\epsilon)} \quad (3.6)$$

Si llamamos $\alpha = Z_1 + Z_a/2$, $\beta = Z_2 + Z_a/2$, $\gamma = Z_1 + Z_i$, $\delta = Z_2 + Z_i$,

$$B = \left[\frac{A_1^2}{(Z_1 + Z_i)^3} + \frac{A_1 A_2}{(Z_2 + Z_i)^3} \right] \quad \text{y} \quad D = \left[\frac{A_1 A_2}{(Z_1 + Z_i)^3} + \frac{A_2^2}{(Z_2 + Z_i)^3} \right], \quad \text{se obtiene,}$$

después de evaluar el elemento de matriz entre los estados inicial y final,

$$\begin{aligned} \bar{F}_{SB2} = & 128 \sqrt{2\pi} \quad i \quad K Y_{im}(\Omega_K) \left\{ \frac{\alpha B}{(\alpha^2 + K^2)^3} + \frac{\beta D}{(\beta^2 + K^2)^3} \right\} I_{\infty} \\ & + \frac{256 \sqrt{2\pi}}{\pi^2} \quad i \quad \int d^3q \left\{ \frac{Y_{im}(\Omega_{Kf})}{(q^2 - p^2 - i\epsilon) K_i^2 K_f^2} \left[\frac{\alpha B}{(\alpha^2 + K_f^2)^3} - \frac{\beta D}{(\beta^2 + K_f^2)^3} \right] - \right. \\ & \left. \frac{Y_{im}(\Omega_{Ki})}{(q^2 - p_i^2 - i\epsilon) K_f^2 K_i^2} \left[\frac{\alpha B}{(\alpha^2 + K_i^2)^3} + \frac{\beta D}{(\beta^2 + K_i^2)^3} \right] \right\} + \\ & \frac{128 \sqrt{2\pi}}{\pi^2} \quad i \quad \int d^3q \left\{ \frac{Y_{im}^*(\Omega_{Ki})}{(q^2 - p_i^2 - i\epsilon) K_f^2 K_i^2} \left[\frac{A_1^2 \alpha \gamma}{(\alpha^2 + K_i^2)^3 (\gamma^2 + K_f^2)^2} + \frac{A_1 A_2 \alpha \delta}{(\alpha^2 + K_i^2)^3 (\delta^2 + K_f^2)^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{A_1 A_2 \gamma \beta}{(\beta^2 + K_i^2)^3 (\gamma^2 + K_f^2)^2} + \frac{A^2 \beta \delta}{(\beta^2 + K_i^2)^3 (\delta^2 + K_f^2)^2} \right] - \frac{Y_{im}(\Omega_{Kf})}{(q^2 - p_i^2 - i\epsilon) K_i^2 K_f^2} \left[\frac{A_1^2 \alpha \gamma}{(\alpha^2 + K_f^2)^3 (\gamma^2 + K_i^2)^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{A_1 A_2 \alpha \delta}{(\alpha^2 + K_f^2)^3 (\delta^2 + K_i^2)^2} + \frac{A_1 A_2 \gamma \beta}{(\beta^2 + K_f^2)^3 (\gamma^2 + K_i^2)^2} + \frac{A_2 \beta \delta}{(\beta^2 + K_f^2)^3 (\delta^2 + K_i^2)^2} \right] \right\} \quad (3.7) \end{aligned}$$

Las integrales con respecto a la variable q pueden ser reducidas por la técnica de parametrización de Feynman a una integral sobre un parámetro. Factorizando los denominadores, la segunda amplitud de Born simplificada se reduce a evaluar treinta y seis términos, cada uno de la forma

$$\tilde{I}_{n,m}^{f-i}(\eta, \chi) = \tilde{I}_{n,m}^f(\eta, \chi) - \tilde{I}_{m,n}^i(\chi, \eta) ;$$

es decir,

$$\begin{aligned} \bar{f}_{SB2} = & i 128 \sqrt{2\pi} \{ K C_1 I_{00}(\alpha, \beta) + C_2 \tilde{I}_{1,1}^{f-i}(0,0) + C_3 \tilde{I}_{1,1}^{f-i}(0,\alpha) + C_4 \tilde{I}_{1,1}^{f-i}(0,\beta) + \\ & + C_5 \tilde{I}_{1,2}^{f-i}(0,\alpha) + C_6 \tilde{I}_{1,2}^{f-i}(0,\beta) + C_7 \tilde{I}_{1,3}^{f-i}(0,\alpha) + C_8 \tilde{I}_{1,3}^{f-i}(0,\beta) + C_9 \tilde{I}_{1,1}^{f-i}(\gamma,0) \\ & + C_{10} \tilde{I}_{2,1}^{f-i}(\gamma,0) + C_{11} \tilde{I}_{1,1}^{f-i}(\delta,0) + C_{12} \tilde{I}_{2,1}^{f-i}(\delta,0) + C_{13} \tilde{I}_{1,1}^{f-i}(\gamma,\alpha) + \\ & + C_{14} \tilde{I}_{1,1}^{f-i}(\delta,\alpha) + C_{15} \tilde{I}_{1,1}^{f-i}(\gamma,\beta) + C_{16} \tilde{I}_{1,1}^{f-i}(\delta,\beta) + C_{17} \tilde{I}_{1,2}^{f-i}(\gamma,\alpha) + C_{18} \tilde{I}_{1,2}^{f-i}(\delta,\alpha) + \\ & + C_{19} \tilde{I}_{1,2}^{f-i}(\gamma,\beta) + C_{20} \tilde{I}_{1,2}^{f-i}(\delta,\beta) + C_{21} \tilde{I}_{2,1}^{f-i}(\gamma,\alpha) + C_{22} \tilde{I}_{2,1}^{f-i}(\delta,\alpha) + C_{23} \tilde{I}_{2,1}^{f-i}(\gamma,\beta) + \\ & + C_{24} \tilde{I}_{2,1}^{f-i}(\delta,\beta) + C_{25} \tilde{I}_{2,2}^{f-i}(\gamma,\alpha) + C_{26} \tilde{I}_{2,2}^{f-i}(\delta,\alpha) + C_{27} \tilde{I}_{2,2}^{f-i}(\gamma,\beta) + C_{28} \tilde{I}_{2,2}^{f-i}(\delta,\beta) + \\ & + C_{29} \tilde{I}_{1,3}^{f-i}(\gamma,\alpha) + C_{30} \tilde{I}_{1,3}^{f-i}(\delta,\alpha) + C_{31} \tilde{I}_{1,3}^{f-i}(\gamma,\beta) + C_{32} \tilde{I}_{1,3}^{f-i}(\delta,\beta) + C_{33} \tilde{I}_{2,3}^{f-i}(\gamma,\alpha) + \\ & + C_{34} \tilde{I}_{2,3}^{f-i}(\delta,\alpha) + C_{35} \tilde{I}_{2,3}^{f-i}(\gamma,\beta) + C_{36} \tilde{I}_{2,3}^{f-i}(\delta,\beta) \}. \end{aligned}$$

donde cada una de las integrales vectoriales

$$\tilde{I}_{n,m}^{i,f}(\alpha,\beta) = \frac{1}{\pi^2} \int \frac{\vec{K}_{i,f} d^3q}{(q^2-p^2-i\epsilon) (K_i^2+\alpha^2)^n (K_f^2+\beta^2)^m}, \quad (3.9)$$

puede ser expresada en términos de las integrales $I_{n,m}(\alpha,\beta)$,

$$I_{n,m}(\alpha,\beta) = \frac{1}{\pi^2} \int \frac{d^3q}{(q^2-p^2-i\epsilon) (K_i^2+\alpha^2)^n (K_f^2+\beta^2)^m}, \quad (3.10)$$

las cuales, como ya se indicó, pueden resolverse por las técnicas de Feynman⁽¹⁴⁾

El término de intercambio es fácilmente evaluado usando las funciones (3.1) y (3.2). De hecho

$$g_{\text{Och}} = \frac{K^2}{2k_i^2} \bar{F}_{B1}. \quad (3.11)$$

Con estos resultados la sección diferencial de dispersión es igual a

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k_f}{k_i} |f - g|^2, \quad (3.12)$$

donde f es el término directo de la amplitud en la segunda aproximación de Born, y g es el de intercambio en la aproximación de Ochkur. Se observa que calculando el término $f - g$ en la aproximación mencionada, se obtiene una amplitud de dispersión que contiene todos los términos hasta orden k_i^{-1} para valores grandes de k_i .

4. RESULTADOS Y DISCUSION

A continuación se presentan resultados numéricos para dispersión inelástica electrón-helio. Consideramos la excitación del helio al estado 2'P. Las amplitudes directa y de intercambio de este proceso fueron calculadas.

ladas algebraicamente hasta 2° orden de la serie de Born, en la sección anterior. Los resultados numéricos presentados a continuación corresponden al término directo a 1^{er} orden en la serie mencionada y al término de intercambio en la aproximación de Ochkur.

En la Fig. 1 se grafican amplitudes directas en la 1^a aproximación de Born, para distintos valores de la energía del electrón incidente. En la Fig. 2 se grafican las amplitudes de intercambio para los mismos valores de la energía, como en la Fig. 1. Por último, en la Fig. 3 se presentan secciones diferenciales de dispersión en la 1^a aproximación de Born y se comparan con resultados experimentales⁽¹⁵⁾. En esta última figura puede verse comparando los resultados a 200 y 500 ev que la concordancia de los resultados teóricos y los experimentales aumenta con la energía; por otra parte se observa que a ángulos pequeños la primera aproximación es bastante buena. Para lograr concordancia a ángulos mayores es necesario incluir los términos a segundo orden en la aproximación de Born para la parte directa de la amplitud de dispersión, y el término de Ochkur de la amplitud de intercambio.

Por otra parte como ya se indicó en la sección anterior, si se quiere un desarrollo consistente con todos los términos hasta orden k_i^{-1} es necesario incluir en la amplitud en la primera aproximación de Born, la parte real del término directo en la 2^a aproximación de Born, la cual es de orden k_i^{-1} . Por otra parte si se desea un resultado hasta orden k_i^{-2} , la amplitud directa debe contener aparte de la primera y segunda aproximación de Born, la parte real del término de orden 3, es decir Ref_{B3} , el cual tiene este comportamiento.

Existen formas de conseguir un desarrollo consistente hasta un orden dado en k_i^{-2} , las cuales evitan el cálculo de f_{B3} ; entre éstos se encuentran el método de la serie eikonal-Born⁽¹⁶⁾ y el de la serie de Glauber modificada⁽¹⁷⁾ los cuales son discutidos ampliamente en la literatura.

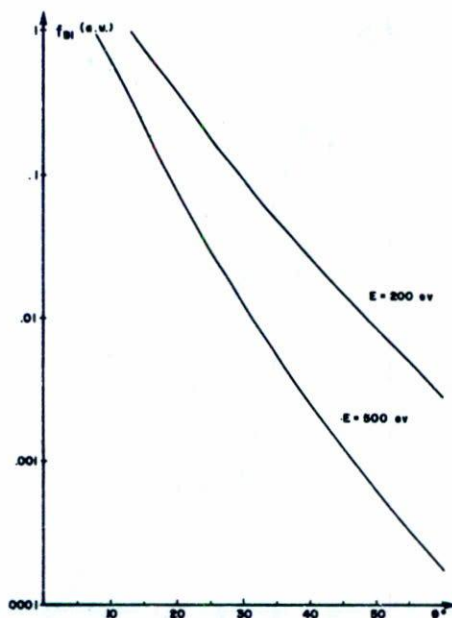


Fig. 1 Se grafican las amplitudes directas para la excitación al subnivel magnético $m=0$ del estado 2^1P . Estas se calcularon en la primera aproximación de Born. Presentamos resultados para dos valores de la energía del electrón incidente. Se utilizan unidades atómicas.

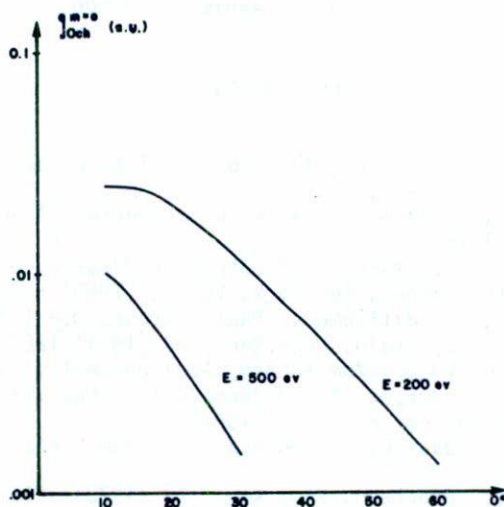


Fig. 2 Se grafican las amplitudes de intercambio en la aproximación de Ochkur, para la excitación al subnivel magnético $m=0$ del estado 2^1P .

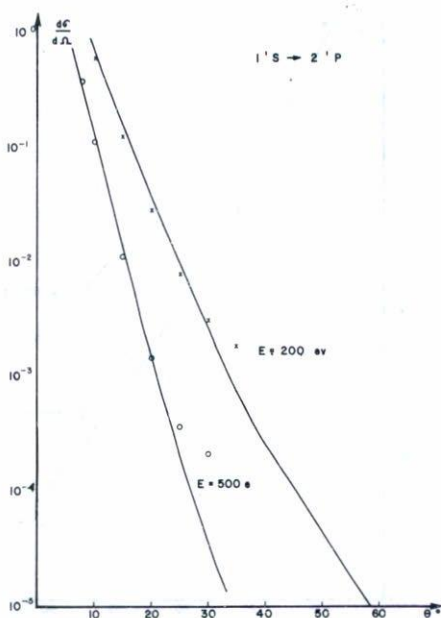


Fig. 3. Sección diferencial de dispersión inelástica para diferentes valores de la energía, en la primera aproximación de Born. Se compara con los resultados experimentales de M.A.Dillon y E.N.Lassetre, x resultados a 200 ev, o resultados a 500 ev.

REFERENCIAS

1. E.Kesley, *Phys. Rev.*, A (1976) 56; G.Dalba, et al, *J.Phys.B: Atom. Molec.Phys.*, 10 (1977) 3741.
2. C.J.Joachain, *Quantum Collision Theory*, North Holland Publ. Cy., Amsterdam, (1975).
3. R.J.Glauber, en *Lectures in Theoretical Physics*, editado por W.E. Brittin, Interscience, New York, Vol. I (1959) p.315.
4. C.J.Joachain, M.H.Mittleman, *Phys. Letters*, 36A (1971) 209.
5. F.W.Byron, C.J.Joachain, *Phys.Rev.*, A8 (1973) 1267.
6. P.Roman, *Advanced Quantum Theory*, Addison-Wesley Publ. Cy., Inc (1965)
7. H.Margenau, G.M.Murphy, *The Mathematics of Physics and Chemistry*, D. Van Nostrand Company, Inc. (1961).
8. H.A.Bethe, R.W.Jackiw, *Intermediate Quantum Mechanics*, W.A.Benjamin, Inc. (1968).
9. F.W.Byron, C.J.Joachain, *Phys.Rev.*, A8 (1973) 3266
10. F.W.Byron, C.J.Joachain, *J.Phys.B: Atom.Molec.Phys.*, 10 (1977) 207.
11. V.I.Ochkur, *Soviet Phys. JETP*, 18 (1964) 503.
12. R.M.Méndez-Moreno, *Rev.Mex.Fis.*, 4 (1981) 517.
13. H.A.Bethe, E.E.Salpeter, *Quantum Mechanics of One and Two Electron*

- Atoms*, Plenum Publishing Corporation, New York (1977).
14. R.P.Feynman *Phys.Rev.*, 76 (1949) 769.
 15. M.A.Dillon, E.N.Lassetre, *J.Chem.Phys.* 62 (1975) 2373.
 16. C.J.Joachain, K.H.Winters, L.Cartiaux, R.M.Méndez-Moreno, *J.Phys.B: Atom.Molec.Phys.*, 10 (1977) 1277.
 17. T.T.Gien, *Phys.Rev.*, A16 (1977) 123; *Phys.Rev.*, A16 (1977) 1736.