

## PROPAGACION DE PULSOS EN MEDIOS RESONANTES

Ljubomir Matulic\*, J.J. Sánchez-Mondragón\*\*,  
G.E. Torres-Cisneros y E. Chávez-Cortés.

Centro de Investigaciones en Optica , A.C.  
Apdo. Postal #948 León, Gto. 37000 México.

(recibido octubre 17, 1983; aceptado octubre 3, 1984)

### RESUMEN

Presentamos un estudio conciso y elemental de la teoría semi-clásica de la propagación de luz coherente en dieléctricos resonantes. Haciendo hincapié en los principios físicos, revisamos la problemática de este fenómeno no-lineal y no-estacionario, indicando los desarrollos analíticos disponibles y los métodos numéricos más comúnmente usados. Presentamos nuevos resultados obtenidos por medio del análisis espectral de la propagación de la luz y demostramos la posibilidad de efectuarlos en computadoras pequeñas (PDP 11/34).

### ABSTRACT

We present a concise while self-contained primer on the resonant

---

\* Dirección Permanente: St. John Fisher College, Rochester, N.Y. 14618

\*\* Comisionado por el Centro de Instrumentos, U.N.A.M.

coherent semiclassical theory of field propagation in dielectrics. We stress the physical grounds and review the problematic of such nonlinear and nonsteady phenomena, indicating the available analytical developments and the commonly used numerical procedure. We make inroads into current research by presenting a spectral analysis of propagation, while showing the ability of carrying them in small computers (PDP 11/34).

## 1. INTRODUCCION

El problema de la propagación de la luz en medios materiales es tan viejo como la óptica física misma. En las primeras décadas de este siglo los trabajos de Lorentz, Sommerfeld y Brioullin, entre otros, llevaron la teoría de esta interacción a un alto grado de perfección, de manera que parecía que poco quedaba por añadir en este dominio de la física. De hecho, la teoría de Lorentz, que trata a los electrones como osciladores armónicos, explicaba bastante bien todos los fenómenos en los cuales la frecuencia de la luz estaba lejos de las bandas de resonancia del medio en el cual se propagaban<sup>(1)</sup> y siempre que la intensidad del campo del haz luminoso fuera lo suficientemente débil como para poder considerar que la función de respuesta del medio era lineal.

Sin embargo, con el descubrimiento de fuentes luminosas intensas, proporcionadas por los láseres, la teoría lineal se mostró impotente para explicar un gran número de nuevos descubrimientos experimentales. El advenimiento del láser, junto con los grandes adelantos de la tecnología de materiales y de los métodos de detección, hicieron posible la observación de muchos fenómenos ni siquiera imaginados hasta entonces. La generación de armónicos de segundo y más altos órdenes, la rectificación óptica, las mezclas ópticas y la amplificación paramétrica, el auto-enfocamiento, la transparencia auto-inducida, la nutación óptica y los ecos de fotones, son ejemplos de los fenómenos que se descubrieron entonces y que condujeron a la aparición de la rama de la óptica denominada óptica no-lineal y que en las últimas dos décadas ha tomado un gran impulso en el ambiente científico y tecnológico.

A pesar de ello, el estudio en el dominio de frecuencias de tales fenómenos ha sido relegado por la complejidad que su tratamiento requiere. Dos razones fundamentales han sido los principales obstáculos. La primera de ellas es que no existe una definición única y conclusiva para el análisis

sis espectral en procesos no-estacionarios,<sup>(2,3)</sup> aunado al carácter no-lineal del proceso que no ofrece alternativas simplificantes. La segunda razón es que la naturaleza de los estudios, generalmente numéricos en el espacio y el tiempo, no permite una forma simple de procesar los resultados, pues a una distancia de penetración dada, aparecen como funciones de un único parámetro temporal, para todos sus valores relevantes.

En esta nota presentamos un enfoque alternativo, basado en el espectro físico, que ofrece un tratamiento espectral simple, sin ambigüedades y que es consistente con la realidad de la situación del experimento numérico o de laboratorio.

A manera introductoria de esta rama de la óptica, hemos dedicado la segunda sección de este trabajo al repaso de la teoría semi-clásica de la propagación y a la obtención de las ecuaciones de movimiento que gobiernan la interacción coherente de pulsos intensos de luz en medios resonantes o cuasi-resonantes. Además, en esa misma sección, detallamos algunos de los resultados fundamentales que se desprenden de tales ecuaciones y que poseen un gran significado físico.

En la tercera sección, presentamos nuestro estudio del análisis espectral de este fenómeno de la propagación, resaltando las diferencias con el tratamiento clásico. Este análisis es una aportación novedosa a la interpretación de la física del problema, como lo hacemos notar en la cuarta sección, en la que mostramos y comentamos ampliamente varios de los resultados que hemos obtenido de las simulaciones numéricas.

Por último, en la quinta sección, reportamos la forma en que hemos logrado manejar nuestros códigos, que requieren gran cantidad de espacio y memoria, con recursos computacionales modestos y dentro de límites de tiempo aceptables.

## 2. ELEMENTOS DE LA TEORIA DE LA INTERACCION DE LAS ONDAS ELECTROMAGNETICAS CON SISTEMAS MATERIALES

### 2.a) *La teoría semi-clásica de la interacción luz-átomo*

La interacción de un campo electromagnético con un sistema material constituido por átomos o moléculas se puede describir en muy diversas



formas, dependiendo del fenómeno particular que se desee analizar. Nosotros estudiaremos la propagación de haces luminosos intensos, como los de un láser, en medios resonantes absorbentes. Para ello utilizaremos una descripción semi-clásica, ya que por una parte la intensidad tan alta de los láseres, conteniendo una gran densidad de fotones, nos permite describir al campo electromagnético por medio de las ecuaciones de Maxwell. Por otra parte, la estructura esencialmente discreta de los niveles energéticos de los sistemas materiales nos fuerza a describirlos mediante las ecuaciones de Heisenberg. De esta forma, la teoría semiclassical, interpretada como un acoplamiento de las ecuaciones de Maxwell y Heisenberg, es suficiente para la descripción de nuestro estudio.

Como es sabido de la mecánica cuántica,<sup>(4)</sup> la ecuación de Heisenberg para un operador cualquiera  $\hat{Q}$ , es

$$i \hbar (d\hat{Q}/dt) = [\hat{Q}, \hat{H}] + i \hbar (\partial\hat{Q}/\partial t) \quad , \quad (1)$$

en donde  $\hat{H}$  es el hamiltoniano total del sistema y  $[\hat{Q}, \hat{H}] = \hat{Q}\hat{H} - \hat{H}\hat{Q}$  es el conmutador de  $\hat{Q}$  con  $\hat{H}$ . Cuando  $\hat{Q}$  no depende explícitamente del tiempo, el último término de esta ecuación se anula.

La mecánica cuántica también nos enseña<sup>(5)</sup> que un operador cualquiera  $\hat{Q}$ , puede ser escrito en la forma

$$\hat{Q} = \sum_m \sum_n \hat{\sigma}_{mn} \hat{Q}_{mn} \quad , \quad (2)$$

donde  $\hat{\sigma}_{ij} = |i\rangle\langle j|$  se denomina operador de proyección y  $|n\rangle$  es un conjunto completo de vectores ortonormales. Por su parte, los  $Q_{k\ell} = \langle k|\hat{Q}|l\rangle$  son llamados elementos de la matriz del operador  $\hat{Q}$  en la representación  $|n\rangle$ . Es fácil demostrar que

$$\langle \hat{\sigma}_{ij} \rangle = C_i^* C_j = \rho_{ji} \quad , \quad (3)$$

lo que significa que los promedios de los operadores de proyección corresponden a los elementos de la matriz densidad del sistema, por lo que los  $\hat{\sigma}_{ij}$  son tan aptos para describir el desarrollo dinámico del sistema como el mismo operador de densidad. De hecho, las derivadas con respecto al



tiempo de estos vectores de proyección son las que proporcionan las ecuaciones que gobiernan la evolución de los átomos debido a la influencia de la luz.

## 2.b) Dinámica del átomo de dos niveles

Debido a que nuestro interés primario está en el fenómeno de resonancia o cuasi-resonancia, podemos simplificar los sistemas atómicos, que en general contienen un gran número de estados energéticos discretos, a sistemas que poseen solamente unos cuantos niveles de energía: aquellos que están en resonancia o cuasi-resonancia con las frecuencias presentes en el haz del láser.

A continuación, desarrollaremos las ecuaciones que rigen la interacción de un láser con frecuencia portadora  $\omega_L$  con átomos que tienen una sola frecuencia de transición  $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$  cercana a la frecuencia portadora del láser. En otras palabras, vamos a idealizar al átomo considerando como un sistema que tiene únicamente dos estados energéticos: el estado excitado  $|2\rangle$  de energía  $E_2$  y el estado base  $|1\rangle$  de energía  $E_1$ . A pesar de esta idealización, el tratamiento expuesto fácilmente puede generalizarse a átomos de más de dos niveles.<sup>(6)</sup>

Para el caso en que sólo dos niveles atómicos sean los relevantes, tres operadores de proyección deben considerarse:  $\hat{\sigma}_{11}$ ,  $\hat{\sigma}_{22}$  y  $\hat{\sigma}_{21} = \hat{\sigma}_{12}^*$ . Dado que estos operadores no dependen explícitamente del tiempo, podemos escribir sus ecuaciones de Heisenberg en la forma

$$i \hbar (d\hat{\sigma}_{ij}/dt) = [\hat{\sigma}_{ij}, \hat{H}] \quad . \quad (4)$$

El hamiltoniano del sistema  $\hat{H}$ , se puede separar en dos partes:  $\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}'$ . La primera parte representa la energía del átomo aislado y la segunda representa la energía de interacción del átomo con el láser. El hamiltoniano atómico es tal que

$$\hat{H}_A |n\rangle = \hbar \omega_n |n\rangle \quad \text{para } n = 1, 2 \quad , \quad (5)$$

siendo  $(\hat{H}_A)_{ij} = \hbar \omega_i \delta_{ij}$  los elementos de su matriz.

Para la energía de interacción  $H'$ , basta considerar la energía debida a la interacción del dipolo eléctrico del átomo con el vector del campo eléctrico de la luz del láser. Esto es<sup>(7)</sup>

$$\hat{H}' = -\hat{\vec{d}} \cdot \hat{\vec{E}} \quad , \quad (6)$$

donde  $\hat{\vec{d}}$  es el operador del dipolo atómico. Los elementos de la matriz de  $H'$  son:  $(\hat{H}')_{ij} = -\hat{d}_{ij} \cdot \hat{\vec{E}} (1 - \delta_{ij})$ , pues suponemos que el átomo no posee ningún dipolo permanente.

De acuerdo con (2), el hamiltoniano total  $\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}'$  se puede escribir en la forma

$$\hat{H} = \hbar \omega_1 \hat{\sigma}_{11} + \hbar \omega_2 \hat{\sigma}_{22} - (\hat{d}_{12} \hat{\sigma}_{12} + \hat{d}_{21} \hat{\sigma}_{21}) \cdot \hat{\vec{E}} \quad . \quad (7)$$

Al sustituir la Ec. (7) en (4), obtenemos las tres ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento del átomo, considerando solamente su interacción coherente con el campo eléctrico. Estas ecuaciones son:

$$(d\hat{\sigma}_{11}/dt) = (i/\hbar) (\hat{d}_{12} \hat{\sigma}_{12} - \hat{d}_{21} \hat{\sigma}_{21}) \cdot \hat{\vec{E}} \quad , \quad (8.a)$$

$$(d\hat{\sigma}_{22}/dt) = (i/\hbar) (\hat{d}_{21} \hat{\sigma}_{21} - \hat{d}_{12} \hat{\sigma}_{12}) \cdot \hat{\vec{E}} \quad , \quad (8.b)$$

$$(d\hat{\sigma}_{12}/dt) = -i\omega_{21} \hat{\sigma}_{12} + (i/\hbar) \hat{d}_{21} (\hat{\sigma}_{11} - \hat{\sigma}_{22}) \cdot \hat{\vec{E}} \quad , \quad (8.c)$$

en donde  $\omega_{21} = \omega_2 - \omega_1$ .

Las cantidades  $\hat{\sigma}_{11}$  y  $\hat{\sigma}_{22}$  están relacionadas con las poblaciones de los niveles energéticos  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$  respectivamente, esto es, con la probabilidad de encontrar el átomo en su estado base o en su estado excitado, mientras que  $\hat{\sigma}_{12}$  está relacionada con el momento del dipolo atómico.

Cabe enfatizar que las Ecs. (8) se han idealizado, en el sentido de que no se han considerado ninguno de los mecanismos de decaimiento que pueden aparecer en un experimento real. Si se desea incorporar estos decaimientos se puede recurrir a la teoría cuántica, pero en la práctica es costumbre introducir sus efectos en las Ecs. (8) en una forma fenomenológica<sup>(8)</sup>. Nosotros seguiremos un desarrollo que no considera ningún tipo

de decaimiento, lo que implica que se conservará la población del sistema en el transcurso del tiempo. Esto último se puede comprobar fácilmente su mando las Ecs. (8.a) y (8.b) para obtener  $d(\hat{\sigma}_{11} + \hat{\sigma}_{22})/dt = 0$ .

Por otra parte, en un laboratorio realmente no se mide un operador que represente una cantidad física determinada, sino su valor promedio. Por esta razón, resulta conveniente introducir tres nuevas variables  $r_{ij}$ , definidas de la siguiente manera:

$$\langle \hat{\sigma}_{ii}(t,z) \rangle = r_{ii}(t,z) \quad (\text{para } i=1,2) \quad (9.a)$$

y

$$\langle \hat{\sigma}_{12}(t,z) \rangle = r_{12}(t,z) \exp[-i(\omega_L t - kz)] . \quad (9.b)$$

Aquí,  $\omega_L$  es la frecuencia del campo eléctrico del láser, al cual escribiremos como

$$\vec{E}(t,z) = \underline{e} E(t,z) \exp[i(\omega_L t - kz)] + \text{c.c.} , \quad (10)$$

donde  $\underline{e}$  es el vector unitario de polarización de la onda electromagnética (por ejemplo, si la luz está linealmente polarizada en la dirección  $x$ ,  $\underline{e} = \underline{x}$ , y si esta circularmente polarizada  $\underline{e} = (\underline{x} + i\underline{y})/\sqrt{2}$ ). La cantidad  $E(t,z)$  es la envolvente compleja del campo eléctrico que podemos escribir como  $E(t,z) = |E(t,z)| \exp[i\phi(t,z)]$ , mientras que  $k = \omega_L/c$  es el número de onda y  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío. Por último, c.c. representa el complejo conjugado del término precedente.

La frecuencia  $\omega_L$  es una frecuencia óptica, es decir muy alta (del orden de  $10^{15}$  Hertz), mientras que la duración de los pulsos más cortos que se han producido hasta ahora es del orden de  $10^{-13}$  segundos. Esto significa que aun estos pulsos ultra-cortos contienen cientos de períodos ópticos bajo sus envolventes. Por esta razón, podemos considerar que las cantidades  $E(t,z)$ ,  $\phi(t,z)$  y  $r_{ij}(t,z)$  varían lentamente en  $t$  y en  $z$ , en comparación con la variación del factor  $\exp[i(\omega_L t - kz)]$ .

Sustituyendo las Ecs. (9) y (10) en (8), se obtienen las ecuaciones diferenciales para las nuevas variables  $r_{ij}$  que describen el comportamiento de nuestros átomos. En ellas encontramos términos que varían len-



tamente y otros que oscilan a frecuencias ópticas, los cuales están completamente fuera de resonancia y se les puede despreciar, ya que su contribución al efecto resonante o cuasi-resonante es mínima. Esta aproximación se llama, según la tradición proveniente del estudio de resonancia magnética, aproximación del sistema rotante con la onda (RWA). Además, en estas mismas ecuaciones encontramos expresiones del tipo  $\mathbf{e} \cdot \vec{\mathbf{d}}_{12} E / \hbar$ , con dimensiones de frecuencia, las cuales redefiniremos en base a la cantidad compleja

$$\Omega_{12} = (2/\hbar) (\mathbf{e} \cdot \vec{\mathbf{d}}_{12} E) = KE \quad , \quad (11)$$

a la que por razones históricas llamaremos frecuencia de Rabi compleja<sup>(6,7)</sup>. Nótese que  $\Omega_{12} = \Omega_{21}^*$ .

Con estas consideraciones, las ecuaciones diferenciales para las variables atómicas  $r_{ij}$  se pueden escribir de la forma:

$$(dr_{11}/dt) = (i/2) (\Omega_{12}r_{12} - \Omega_{21}r_{21}) \quad , \quad (12.a)$$

$$(dr_{22}/dt) = (i/2) (\Omega_{21}r_{21} - \Omega_{12}r_{12}) \quad , \quad (12.b)$$

$$(dr_{12}/dt) = -i\Delta r_{12} - (i/2)\Omega_{21}(r_{22} - r_{11}) \quad , \quad (12.c)$$

en donde la cantidad

$$\Delta = \omega_{21} - \omega_L \quad (13)$$

se conoce como la desafinación de la frecuencia de transición de un átomo particular, con respecto a la frecuencia portadora del láser.

Desde el punto de vista computacional, las ecuaciones complejas (12) son difíciles de manejar, por lo que es conveniente transformarlas a ecuaciones reales. Esto se puede hacer por medio de las siguientes transformaciones:<sup>(6)</sup>

$$\Omega_{12} = R + iU \quad (14.a)$$

y

$$r_{12} = (1/2) (u + iv) \quad , \quad (14.b)$$

en donde  $R$ ,  $U$ ,  $u$  y  $v$  son reales. El resultado de sustituir estas nuevas variables en las Ecs. (12) es:

$$du/dt = -\Delta v - U w \quad , \quad (15.a)$$

$$dv/dt = \Delta u + R w \quad , \quad (15.b)$$

$$dw/dt = -Rv + U u \quad , \quad (15.c)$$

en donde

$$w = r_{22} - r_{11} \quad (16)$$

representa la diferencia de probabilidades de encontrar el átomo en su estado excitado o en su estado base y, por tanto, se conoce como inversión atómica, la cual representa también la energía del átomo en unidades de  $\hbar\omega_{21}/2$ .

Para recalcar el significado físico de las Ecs. (15), multipliquemos la Ec. (15.a) por  $u$ , la (15.b) por  $v$  y la (15.c) por  $w$ . Al sumar estas tres ecuaciones modificadas se obtiene la relación

$$u(du/dt) + v(dv/dt) + w(dw/dt) = 0 \quad , \quad (17)$$

que al integrar con respecto al tiempo queda en la forma

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1 \quad . \quad (18)$$

La constante de integración se ha puesto igual a uno como consecuencia de la normalización de la función de onda que describe al átomo. Esta ecuación es una importante ley de conservación del sistema e indica que el estado dinámico del átomo se puede representar, bajo la ausencia total de decaimientos, mediante un punto sobre la superficie de una esfera de radio unitario o por el vector correspondiente, como se indica en la Fig. 1. A esta esfera se le llama esfera de Bloch y al vector  $\vec{OP}$ , vector de Bloch. Esta representación geométrica es muy útil, ya que nos permite, con sólo seguir el movimiento del vector de Bloch, tener una idea intuitiva

bastante clara de lo que sucede con el átomo bajo la influencia de la luz. Nótese, en particular, que cuando el átomo está en su estado base  $u=0$ ,  $v=0$ ,  $w=-1$  y el vector de Bloch apunta exactamente hacia el polo sur de la esfera, mientras que cuando está en su estado excitado  $u=v=0$ ,  $w=1$  y el vector de Bloch está dirigido hacia el polo norte de la esfera. Cualquier otra posición del vector de Bloch representará al átomo en una superposición general de estados cuánticos.

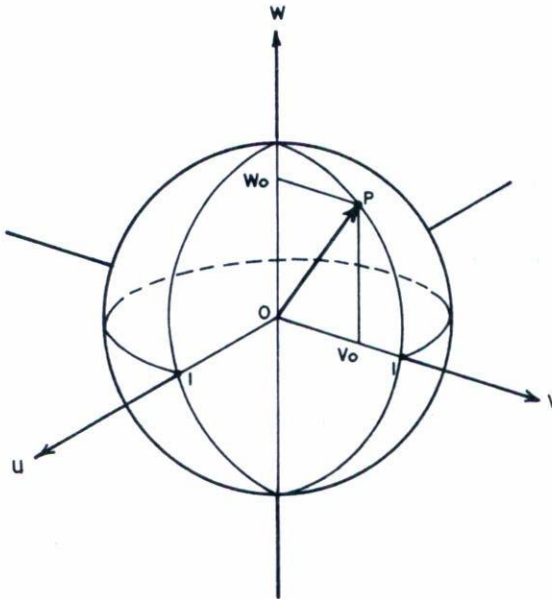


Fig. 1. Esfera de Bloch, mostrando el vector de Bloch para el caso arbitrario  $(0, v_0, w_0)$ .

### 2.c) Las ecuaciones reducidas de Maxwell

Hasta este punto nos hemos ocupado solamente de la dinámica del átomo y ahora analizaremos el comportamiento que sigue la luz del láser en su paso a través del medio material. Es costumbre, en trabajos de esta índole, representar al haz del láser como una onda de frecuencia portadora  $\omega_L$ , con número de onda  $k = \omega_L/c$  y con una envolvente compleja  $E(t,z)$ , tal y como lo hemos hecho en la Ec. (10). El campo eléctrico del haz debe satisfacer la ecuación de Maxwell:



$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \quad , \quad (19)$$

en donde  $\vec{P}(t,z)$  es la polarización debida a los átomos activos a través de los cuales la luz se propaga y, por lo mismo, se le denomina polarización resonante. Así, mientras que las ecuaciones de Bloch (15) indican cómo los átomos reaccionan a la excitación de la luz, la ecuación de Maxwell (19) indica la forma en que el haz de luz se modifica por la radiación coherente de los átomos.

Según la Ec. (2), el momento dipolar promedio de un átomo se puede expresar como

$$\langle \hat{d} \rangle = \vec{d}_{12} \langle \hat{\sigma}_{12} \rangle + \vec{d}_{21} \langle \hat{\sigma}_{21} \rangle \quad , \quad (20)$$

en donde  $\langle \hat{\sigma}_{ij} \rangle$  representa el valor esperado del operador  $\hat{\sigma}_{ij}$ . En general, este valor promedio no será el mismo para todos los átomos del medio, en virtud de que cada átomo en particular puede tener una frecuencia de transición efectiva diferente a la de los demás, debido tanto a impurezas del medio como a efectos del movimiento atómico. Para considerar esta idea, supondremos que las frecuencias de transición atómicas  $\omega_{21}$  están distribuidas inhomogéneamente alrededor de la frecuencia del láser  $\omega_L$ , según la función  $g(\omega_{21} - \omega_L) = g(\Delta)$ , normalizada en la forma  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(\Delta) d\Delta = 1$ , y a la que se le denomina distribución atómica de frecuencias. Entonces, si el medio contiene  $N$  átomos activos por unidad de volumen, la polarización macroscópica estará dada por la Ec. (20), promediada sobre todos los valores  $\Delta = \omega_{21} - \omega_L$ . Esto es,

$$\vec{P}(t,z) = N \int_{-\infty}^{+\infty} [\vec{d}_{12} \langle \hat{\sigma}_{12} \rangle + \vec{d}_{21} \langle \hat{\sigma}_{21} \rangle] g(\Delta) d\Delta \quad , \quad (21)$$

Cuando se introducen las expresiones (10) y (21) en la ecuación de Maxwell y se efectúan las aproximaciones correspondientes al hecho de que la envolvente y la fase varían lentamente, además de que los términos oscilantes a frecuencias ópticas deben de ser descartados, se obtiene una ecuación diferencial parcial para la envolvente compleja  $E(t,y)$ , la cual puede escribirse también en términos de la frecuencia de Rabi  $\Omega_{12}$ . Final-

mente, si descomponemos la frecuencia de Rabi en sus partes real e imaginaria, la ecuación de onda se reduce a las dos ecuaciones siguientes, que generalmente se conocen con el nombre de ecuaciones reducidas de Maxwell:

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) R = B \langle v \rangle \quad (22.a)$$

y

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) U = -B \langle u \rangle \quad , \quad (22.b)$$

en donde la cantidad  $B = 2\pi N \omega_L d_{12}^2 / \hbar c$  tiene dimensiones de  $\text{cm}^{-1} \text{seg}^{-1}$  y los paréntesis angulares representan el promedio de las variables con respecto a la función  $g(\Delta)$ . Esto es,

$$\langle v \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t, z, \Delta) g(\Delta) d\Delta \quad .$$

Por último, una transformación simple de las variables independientes  $t$  y  $z$  en  $t' = t - z/c$  y  $z' = z$ , respectivamente, simplifica las Ecs. (24), dándoles la forma

$$\frac{\partial R}{\partial z'} = B \langle v \rangle \quad , \quad (23.a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z'} = -B \langle u \rangle \quad . \quad (24.b)$$

Estas ecuaciones, unidas a las Ecs. (15), forman el conjunto de ecuaciones integro-diferenciales que rigen la evolución dinámica de la interacción del láser con el sistema material y constituyen la base de nuestro análisis. Sin embargo, a pesar de su estructura aparentemente simple, su solución es muy difícil, principalmente por ser ecuaciones no lineales fuertemente acopladas y por el hecho de que las funciones desconocidas  $u$  y  $v$  aparecen dentro de integrales en las Ecs. (23) cuando los átomos no poseen idénticas frecuencias de transición. De hecho, ni en los casos más sencillos se conocen soluciones analíticas de este sistema, razón por la cual son de gran importancia sus soluciones numéricas.

### 2.d) Pulsos estacionarios

En todos los problemas de propagación resulta de gran importancia preguntarse por la existencia de soluciones que después de un intervalo largo de tiempo permanezcan estables. En nuestro caso, entenderemos por soluciones estables aquellas soluciones de las Ecs. (15) y (22), que después de un tiempo más o menos largo evolucionan hacia un pulso, cuya envolvente no varía al seguirse propagando con una velocidad constante  $V < c$ , como si el medio fuese transparente. En tales casos, un observador que se moviera con la velocidad  $V$ , vería estática la envolvente del pulso. Por esta razón, esos pulsos estables son llamados pulsos estacionarios.

En el caso de pulsos estacionarios, las variables independientes  $t$  y  $z$  de las Ecs. (15) y (22) se relacionan mediante la variable  $\zeta$ , el tiempo local del observador en movimiento, a través de la ecuación

$$\zeta = t - z/V \quad . \quad (24)$$

Este cambio de variable en las Ecs. (15) y (22) reduce el sistema original al siguiente sistema de ecuaciones integro-diferenciales ordinarias:

$$\dot{u} = -\Delta u - U w \quad , \quad (25.a)$$

$$\dot{v} = \Delta v + R w \quad , \quad (25.b)$$

$$\dot{w} = -R v + U u \quad , \quad (25.c)$$

$$\dot{R} = -\omega_c^2 \langle v \rangle \quad , \quad (25.d)$$

$$\dot{U} = \omega_c^2 \langle u \rangle \quad , \quad (25.c)$$

en donde la constante  $\omega_c^2 = B/\delta$  tiene dimensiones de frecuencia al cuadrado y la cantidad  $\delta = 1/V - 1/c$  representa el retraso del pulso por unidad de distancia penetrada en el medio.



El sistema (25) ha sido resuelto analíticamente bajo ciertas condiciones y se han obtenido resultados de gran importancia física.<sup>(9)</sup> El caso más importante y más conocido es el que se obtiene suponiendo que la envolvente del campo es puramente real y que todos los átomos están inicialmente en su estado base. La solución representa entonces un pulso único, un *solitón* óptico, que se propaga sin deformación y sin pérdida de energía. Este resultado fue obtenido originalmente por McCall y Hahn y ha sido verificado experimentalmente.<sup>(10)</sup> Para referencia futura, damos a continuación la solución completa para este caso específico:

$$u(\zeta, \Delta) = 2 \Delta \tau F(\Delta) \operatorname{sech}(\zeta/\tau) \quad , \quad (26.a)$$

$$v(\zeta, \Delta) = 2 F(\Delta) \tanh(\zeta/\tau) \operatorname{sech}(\zeta/\tau) \quad , \quad (26.b)$$

$$w(\zeta, \Delta) = -1 + 2 F(\Delta) \operatorname{sech}^2(\zeta/\tau) \quad , \quad (26.c)$$

$$R(\zeta) = \Omega_0 \operatorname{sech}(\zeta/\tau) \quad , \quad (26.d)$$

en donde  $F(\Delta) = (1 + \Delta^2 \tau^2)^{-1}$ ,  $\Omega_0 = 2/\tau$  y  $\tau$  se define como la anchura del pulso. La Fig. 2.a muestra una solución numérica que reproduce el resultado teórico de la Ec. (26.d), para el caso específico en que  $\tau = 2$ . La Fig. 2.b muestra las soluciones numéricas correspondientes para  $v$  y  $w$  en resonancia.

Es importante señalar que la componente en cuadratura del dipolo atómico  $v(\zeta, \Delta)$ , aparece como el producto de una función de  $\zeta$  por una función de  $\Delta$ . Esto es,  $v(\zeta, \Delta)$  es factorizable en la forma

$$v(\zeta, \Delta) = F(\Delta) V(\zeta) \quad . \quad (27)$$

En realidad, la solución (26) es solamente una solución particular del sistema (25), en el cual se ha supuesto que  $v(\zeta, \Delta)$  se factoriza en el sentido de la Ec. (27). Hasta ahora, no se conoce ningún otro tipo de solución que no cumpla tal requerimiento de factorización. Sin embargo, la existencia de los pulsos estacionarios en la interacción de luz intensa con medios materiales resonantes es un hecho trascendental, ya que según la teoría clásica

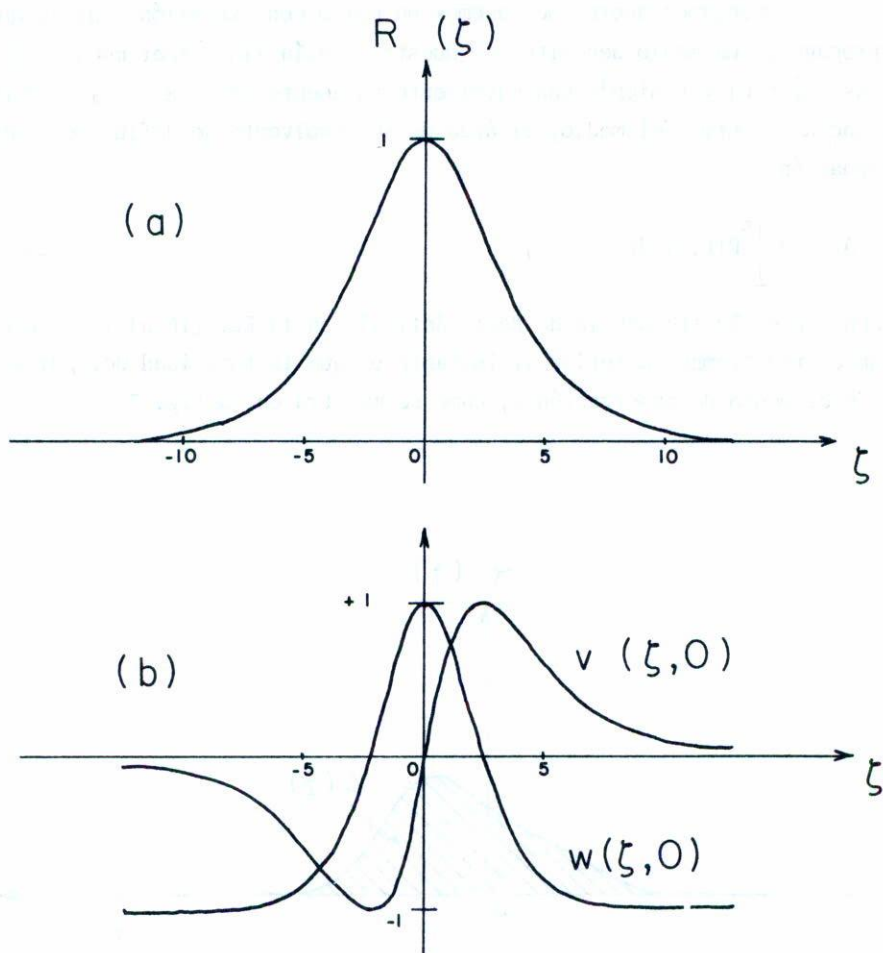


Fig. 2. (a) La envolvente lenta de un *solitón* óptico de anchura  $\tau = 2$ , visto por un observador moviéndose a la velocidad del pulso. (b) Las correspondientes soluciones en resonancia para la inversión atómica  $w(\zeta, 0)$  y para la componente dispersiva del dipolo atómico  $v(\zeta, 0)$ .

ca sólo los pulsos estrictamente monocromáticos podían propagarse sin deformación y sin pérdida de energía. Estos nuevos fenómenos son consecuencia de las no-linealidades en la interacción luz-átomo.

## 2.e) El teorema del área

Supongamos ahora que tenemos un pulso con extensión finita, que se propaga en un medio descrito por nuestra teoría sin poseer modulación en su fase ( $\dot{\phi} = 0$ ) y teniendo una envolvente puramente real ( $R = \Omega_{12}$ ). A una distancia  $z$  dentro del medio, el área de su envolvente se define mediante la ecuación

$$A(z) = \int_{-\infty}^{\bar{t}} R(t, z) dt \quad , \quad (28)$$

en donde  $R$  es la frecuencia de Rabi, definida en la Ec. (16.a), y  $\bar{t}$  representa un cierto tiempo posterior al instante en que la totalidad del pulso ha pasado el punto de observación  $z$ , como se muestra en la Fig. 3.

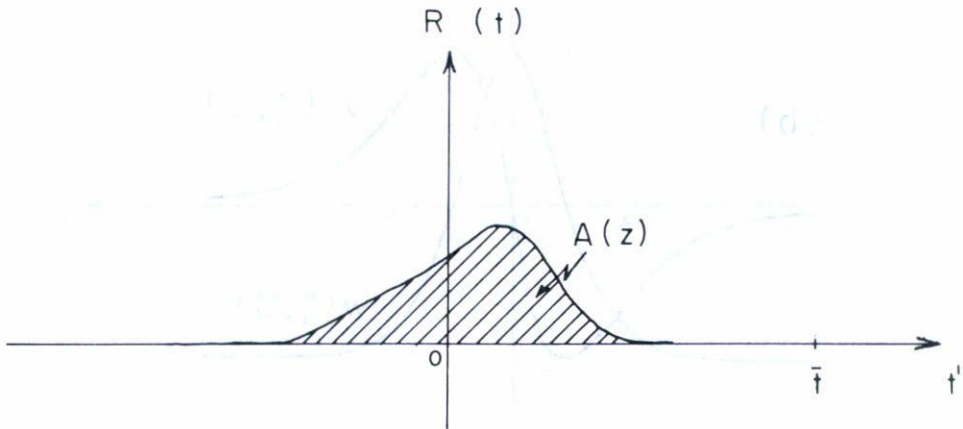


Fig. 3. El área de un pulso (área sombreada) a una distancia de penetración dada. Nótese que es independiente del tiempo para cualquier tiempo mayor que la duración del pulso.

Una consecuencia sorprendente de la interacción no-lineal entre el campo eléctrico y los átomos resonantes está dada por el teorema cuántico del área, descubierto por Mc.Hall y Hahn en 1967<sup>(9.a)</sup> y nombrado así por analogía con el teorema del área derivado en la teoría clásica de Lorentz.



Lo sorprendente del teorema cuántico radica en el hecho de que proporciona una alternativa a nuestros conceptos clásicos de propagación y de absorción, pues mientras el teorema clásico del área predice que el área de un pulso decrecerá invariablemente al propagarse, siguiendo la ley exponencial de Beer, el teorema cuántico establece que el área de un pulso se puede mantener invariante, crecer, decrecer o anularse, dependiendo del valor del área con el que entra al medio.

El enunciado del teorema del área se obtiene integrando en el tiempo la Ec. (22.a) desde  $t = -\infty$  hasta  $t = \bar{t}$ . Al realizar esta operación, notamos que el segundo término del lado izquierdo se anula, en base a que el pulso es finito y tanto  $R(-\infty)$  como  $R(\bar{t})$  son cero. Los términos restantes quedan en la forma

$$\frac{\partial A(z)}{\partial z} = B \left\langle \int_{-\infty}^{\bar{t}} v(t, z) dt \right\rangle \quad . \quad (29)$$

Mc.Hall y Hahn demostraron, bajo la suposición de que la función  $g(\Delta)$  es ancha, además de otras suposiciones, que la doble integral del lado derecho de esta última ecuación se podía escribir en términos del área de la envolvente del pulso como

$$\left\langle \int_{-\infty}^{\bar{t}} v(t, z, \Delta) dt \right\rangle = -\pi g(0) \text{ sen } A(z) \quad , \quad (30)$$

que al sustituirla en la Ec. (29), da la expresión

$$\frac{\partial A(z)}{\partial z} = -(1/2)\alpha \text{ sen } A(z) \quad , \quad (31)$$

que se conoce como el teorema cuántico del área, en virtud de que rige la evolución espacial del área encerrada por la envolvente del pulso (que en lo subsecuente llamaremos simplemente el área del pulso) conforme se realiza la propagación. Aquí,  $\alpha$  representa al coeficiente de absorción de Beer en resonancia y está definido por

$$\alpha = 2\pi B g(0) \quad . \quad (32)$$

La solución a la Ec. (31) es

$$\tan [A(z)/2] = \tan [A(z_0)/2] \exp[-(\frac{1}{2}) \alpha (z - z_0)] \quad , \quad (33)$$

en donde  $z_0 < z$  denota un punto en el que es conocida el área del pulso. Nótese que en el límite clásico de intensidades débiles, el área es pequeña y  $\tan x \approx x$ , por lo que la Ec. (33) contiene el resultado de Beer<sup>(11)</sup>:

$$A(z) = A(z_0) \exp[-(\frac{1}{2}) \alpha (z - z_0)] \quad . \quad (34)$$

Algunas de las ramas de la solución general (33) son graficadas en la Fig. 4, en la que se incluyen tanto las soluciones teóricas representadas por la línea continua, como las que hemos obtenido numéricamente, indicadas por el símbolo ( $\bullet$ ), notándose una gran correlación entre ambas. De esta figura se pueden visualizar claramente algunas de las implicaciones más importantes del teorema cuántico del área.

Primeramente, de la Ec. (31) se desprende que un pulso que encierre un área igual a  $2n\pi$  ( $n=1,2,\dots$ ) no mostrará atenuación en el transcurso de su propagación, ya que  $(\partial A(z)/\partial z) = 0$ . Además, si el valor del área del pulso está en el intervalo  $((2n-1)\pi, (2n+1)\pi)$ , el valor del área tenderá hacia  $2n\pi$  conforme se realice la propagación. Así, por ejemplo, un pulso que entre en el medio con un área de  $1.3\pi$  evolucionará hasta que ésta alcance el valor de  $2\pi$ , mientras que uno con un área de  $0.8\pi$  irá decreciendo el valor de su área hasta que se anule completamente.

Por otra parte, las Ecs. (31) y (33) son totalmente generales, en el sentido de que no hacen referencia a la forma particular de la envolvente en el tiempo. De hecho, el que un pulso  $2\pi$  se propague sin perder ni ganar área no significa que no cambie de forma. El único pulso que se ha observado estable en su forma y en su área es el *solitón* óptico de la Ec. (26.d), que posee un área de  $2\pi$ . Incluso se ha observado que pulsos con un área igual a  $2n\pi$  ( $n=2,3,\dots$ ) se rompen en  $n$  *solitones* ópticos. Sin embargo, en la simulación numérica de la propagación, se ha observado que el pulso necesita propagarse más en el medio para que su envolvente adquiera el perfil estable, que la distancia de propagación requerida para que su área adquiera el valor predicho por la Ec. (33). Esto origina que

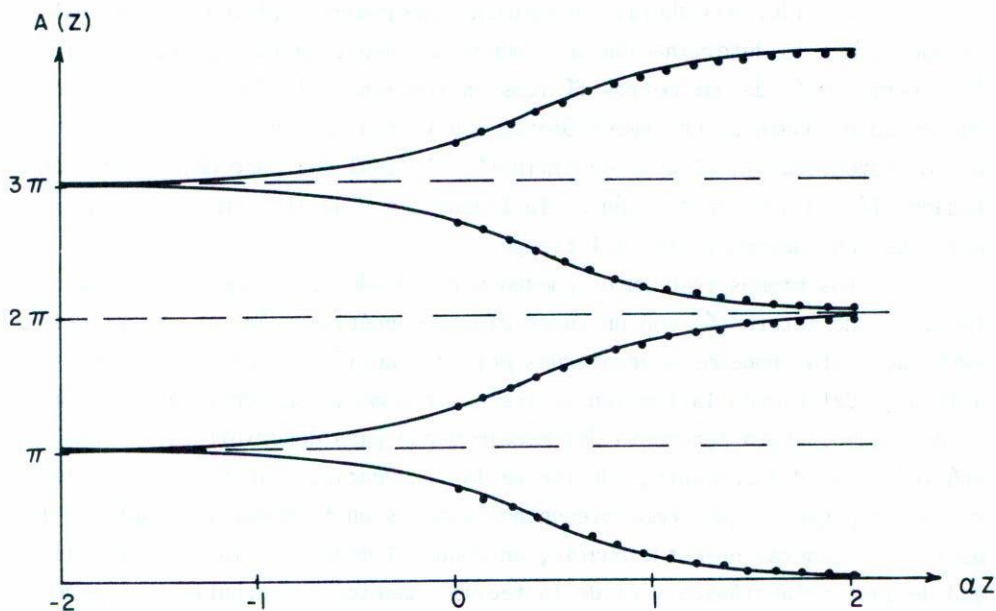


Fig. 4. Algunas ramas de la solución del teorema del área. La línea continua representa la solución teórica y los puntos (•) las soluciones numéricas obtenidas.

la lectura de la forma de la envolvente del pulso sea ambigua y que frecuentemente produzca inseguridad en la interpretación de lo que realmente está sucediendo en la propagación. Por esta razón, hemos desarrollado el estudio espectral como un medio más preciso y eficaz de analizar e interpretar las simulaciones numéricas de la propagación de la luz en medios resonantes. A continuación, presentamos el análisis espectral correspondiente y hacemos hincapié en su importancia al aplicarlos a varios experimentos numéricos que hemos efectuado.



## 3. TEORIA MACROSCOPICA DE LA PROPAGACION

## 3.a) Análisis espectral de pulsos

Consideremos ahora no la situación experimental típica, en la cual es poco común la determinación del comportamiento temporal del pulso, sino la determinación de parámetros físicos en función de la frecuencia. Coloquemos en el punto  $z_0$  un espectrómetro que filtra la señal a ser medida por un fotodetector, el cual determinará, al final del paso del pulso, cantidades físicas que son función de la frecuencia y de la misma posición  $z_0$ , pero que son independientes del tiempo.

Los átomos resonantes pueden ser considerados como un medio dieléctrico que interactúa con un campo electromagnético clásico. Desde este punto de vista, podemos preguntarnos por la reacción del medio al campo aplicado, definiendo la función de respuesta como la susceptibilidad atómica del medio. Esta dependerá del modelo usado para describir el sistema atómico y es, naturalmente, función de la frecuencia. Sin embargo, la teoría de propagación que hemos presentado aquí es un fenómeno resonante no-lineal, y en general no-estacionario, en donde el modelo de la susceptibilidad de la teoría clásica y el de la teoría cuántica perturbativa no tienen validez.

En realidad, el análisis espectral de procesos no-estacionarios es un problema matemático aún no resuelto en forma general, pero existen definiciones funcionales como es el caso del llamado espectro físico<sup>(2)</sup>, basado en nuestra habilidad de integrar con un detector la señal en estudio. En nuestro análisis nos limitaremos a tratar pulsos aislados no-periódicos, en los cuales la definición de espectro físico es válida y se aproxima a la dada por la definición de espectro estacionario. Supondremos además, que la fineza del detector es muy pequeña y podemos evitar su consideración. En estas condiciones, la transformada de Fourier del pulso y su distribución espectral detectada corresponden o están estrechamente relacionadas.

Podemos definir, para cada  $z = z_0$ , representaciones formales del campo eléctrico y de la polarización resonante en términos de la frecuencia  $\nu$ , la variable de Fourier conjugada al tiempo  $t'$ . Esto es,

$$E(t', z_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\nu) \exp[i 2\pi\nu t'] d\nu \quad (35.a)$$

y

$$P(t', z_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{P}(\nu) \exp[i 2\pi\nu t'] d\nu \quad , \quad (35.b)$$

siendo  $t'$  el tiempo local, dado por  $t' = t - z/c$ . Por su parte, la susceptibilidad atómica  $\tilde{\chi}(\nu, z_0)$ , definida por la ecuación

$$\tilde{P}(\nu, z_0) = \tilde{\chi}(\nu, z_0) \tilde{E}(\nu, z_0) \quad , \quad (36)$$

es una cantidad compleja que refleja las propiedades del medio. Se asocia con el índice de refracción  $\tilde{\eta}(\nu, z_0)$  y con el coeficiente de extinción  $\tilde{\gamma}(\nu, z_0)$ , variables fácilmente accesibles al experimentador mediante la relación

$$[\tilde{\eta}(\nu, z_0) + i\tilde{\gamma}(\nu, z_0)] = i + \tilde{\chi}(\nu, z_0) \quad , \quad (37)$$

que puede ser escrita en términos de las cantidades reales  $\tilde{\chi}_r(\nu, z_0)$  y  $\tilde{\chi}_i(\nu, z_0)$ , la parte real e imaginaria de la susceptibilidad respectivamente, por medio de las relaciones

$$\tilde{\eta} = \frac{[(1 + \tilde{\chi}_r)^2 + \tilde{\chi}_i^2]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \left[ 1 + \left[ 1 + \left( \frac{\tilde{\chi}_i}{1 + \tilde{\chi}_r} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (38.a)$$

y

$$\tilde{\gamma} = \frac{\tilde{\chi}_i}{2\tilde{\eta}} \quad . \quad (38.b)$$

Ahora, mostraremos que la información sobre el área del pulso, en el sentido de la sección (2e), puede ser encontrada fácilmente a partir de su análisis espectral. Para tal fin, tomamos la definición del campo eléctrico dada en la Ec. (10) y la sustituimos en la (35.a):

$$E(t', z_0) \exp[i\omega_2 t'] = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\nu, z_0) \exp[i2\pi \nu t'] d\nu \quad .$$

Pasando la función exponencial del lado izquierdo al lado derecho, notamos que el análisis de Fourier del pulso se reduce al de su envolvente lenta,

$$E(t', z_0) = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\omega - \omega_L, z_0) \exp[i(\omega - \omega_L)t'] d\omega \quad , \quad (39)$$

y que el argumento  $2\pi\nu$  naturalmente representa la frecuencia circular del detector en términos del desajuste de frecuencias  $\Delta_D = \omega - \omega_L$ . Integremos ahora esta última ecuación con respecto al tiempo local  $t'$  e intercambiamos el orden de integración. En el lado derecho, la primera integral es simplemente  $\delta(\omega - \omega_L)$ , por lo que la segunda integral puede realizarse, dando el resultado

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E(t', z_0) dt' = \tilde{E}(0, z_0) \quad , \quad (40)$$

que implica que el área del pulso en  $z = z_0$  está dada por el valor de su transformada evaluada en resonancia con la frecuencia portadora del campo eléctrico. Idéntico resultado se obtiene para el área encerrada por la envolvente lenta de la polarización resonante.

### 3.b) La susceptibilidad atómica resonante

Definamos ahora, en forma análoga al campo eléctrico complejo de la Ec. (10), una polarización compleja

$$P(\zeta, z_0) = NK[\langle u(\zeta, z_0, \Delta) \rangle + i\langle v(\zeta, z_0, \Delta) \rangle] \exp [i(\omega_L \zeta - k'z)] \quad , \quad (41)$$

cuya parte real corresponde a la polarización física definida en la Ec. (22). En la definición anterior,  $\zeta$ , el tiempo local, está definido por

$$\zeta = t - z_0/V \quad , \quad (42)$$



siendo  $V$  la velocidad del pulso en el medio. Además,  $k' = k - \omega_L/V$ ,  $N$  es el número de átomos activos por  $\text{cm}^3$ ,  $K = 2d_{12}/\hbar$ , como en la Ec. (11) y las cantidades entre paréntesis angulares deben ser promediadas con respecto a la función  $g(\Delta)$ .

Entonces, definiremos la respuesta del medio, dada por la susceptibilidad atómica resonante, mediante

$$P(\zeta, z_0) = \int \chi(\zeta - \zeta', z_0) \frac{\Omega_{12}(\zeta', z_0)}{K} \exp[i(\omega_L \zeta' - k', z_0)] d\zeta' \quad , \quad (43)$$

en donde los límites de integración exceden la anchura del pulso. Por comparación de esta ecuación con la (41) se obtiene la expresión

$$\langle u(\zeta, z_0, \Delta) \rangle + i \langle v(\zeta, z_0, \Delta) \rangle = \int \Omega_{12}(\zeta', z_0) \left[ \frac{\chi(\zeta - \zeta', z_0) \exp[-i\omega_L(\zeta - \zeta')]}{N K^2} \right] d\zeta' \quad ,$$

que relaciona las envolventes lentas del campo eléctrico y de la polarización. El lado derecho de esta ecuación es la convolución de la cantidad entre paréntesis cuadrados y de  $\Omega_{12}(\zeta', z_0)$ . Al tomar la transformada de Fourier de esta ecuación, el problema se reduce a la relación entre las transformadas de Fourier de las envolventes del pulso y del dipolo complejo:

$$\tilde{\Omega}_{12}(\Delta_D, z_0) \frac{\tilde{\chi}(\Delta_D + \omega_L, z_0)}{N K^2} = \langle \tilde{u}(\Delta_D, z_0, \Delta) \rangle + i \langle \tilde{v}(\Delta_D, z_0, \Delta) \rangle \quad , \quad (44)$$

que es análoga a la Ec. (35), pero explícitamente en términos de las variables lentas. Las transformadas de las envolventes del campo y de la polarización fueron puestas como funciones de  $\Delta_D$ , puesto que de antemano, en la Ec. (39), sabíamos que sus transformadas de Fourier están centradas en  $\omega_L$ .

Podemos remarcar el significado de la Ec. (44) aplicando este resultado a la propagación de los pulsos estacionarios vistos en la sección 2d y que se rigen por las Ecs. (25). Tomando la transformada de Fourier a las Ecs. (25.d) y (25.e) se obtiene la expresión

$$\langle \tilde{u}(\Delta_D, z_0, \Delta) \rangle + i \langle \tilde{v}(\Delta_D, z_0, \Delta) \rangle = \Delta_D \omega_c^{-2} \tilde{\Omega}_{12}(\Delta_D, z_0) \quad , \quad (45)$$

que al compararla con la Ec. (43) nos da el valor de la susceptibilidad,

$$\tilde{\chi}(\Delta_D + \omega_L, z_0) = N K^2 \omega_c^{-2} \Delta_D \quad , \quad (46)$$

que es puramente real, lo que conduce a un índice de refracción

$$\tilde{n}(\Delta_D + \omega_L, z_0) = [1 + N K^2 \omega_L^{-2} \Delta_D]^{\frac{1}{2}} \quad , \quad (47)$$

y sorprendentemente a un coeficiente de extinción nulo, por lo que el medio aparece transparente a la propagación del pulso. Como caso concreto, considérese la solución no-periódica en transparencia auto-inducida dada por las Ecs.(26). De ellas se desprende que<sup>(9.a)</sup>

$$R(\zeta) = (2/\tau) \operatorname{sech}(\zeta/\tau) \quad , \quad (48.a)$$

$$\langle u(\zeta, \Delta) \rangle = 2\tau \operatorname{sech}(\zeta/\tau) \langle \Delta F(\Delta) \rangle = 0 \quad (48.b)$$

y

$$\langle v(\zeta, \Delta) \rangle = 2 \operatorname{sech}(\zeta/\tau) \tanh(\zeta/\tau) \langle F(\Delta) \rangle \quad , \quad (48.c)$$

en donde  $F(\Delta) = (1 + \Delta^2 \tau^2)^{-1}$  y  $\langle F(\Delta) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\Delta) g(\Delta) d\Delta$ . Tomemos ahora la transformada de Fourier de estas ecuaciones:

$$\tilde{R}(\Delta_D) = 2\pi \operatorname{sech}(\pi\tau\Delta_D/2) \quad , \quad (49.a)$$

$$\langle \tilde{u}(\Delta_D, \Delta) \rangle = 0 \quad , \quad (49.b)$$

y

$$\langle \tilde{v}(\Delta_D, \Delta) \rangle = -i 2\pi\tau^2 \langle F(\Delta) \rangle \Delta_D \operatorname{sech}(\pi\tau\Delta_D/2) \quad , \quad (49.c)$$

que sustituidas en la Ec. (43) dan el valor resultante para la susceptibilidad atómica resonante

$$\tilde{\chi}(\Delta_D + \omega_L, z_0) = N K^2 \langle F(\Delta) \rangle \tau^2 \Delta_D \quad , \quad (50)$$

dándonos un índice de refracción

$$\tilde{n}(\Delta_D + \omega_L, z_0) = [1 + N K^2 \langle F(\Delta) \rangle \tau^2 \Delta_D]^{\frac{1}{2}} \quad , \quad (51)$$

y un coeficiente de extinción cero.

La información del área del pulso y de la polarización puede ser obtenida también, evaluando sus respectivas transformadas en  $\Delta_D = 0$ . El área del pulso es de  $2\pi$ , como debe ser, pues el pulso es un *solitón* y el área de la polarización es cero, como corresponde a un pulso estacionario.

Por último, es prudente señalar la relación de los resultados obtenidos en esta sección con trabajos anteriores. El análisis espectral del pulso propagado se ha efectuado numéricamente en algunos casos. Sin embargo, el estudio de la susceptibilidad ha sido especialmente complejo. Sargent *et al.*,<sup>(12)</sup> efectuaron un primer estudio integrando formalmente las Ecs. (15.a) y (15.b), obteniendo el resultado

$$u(t, z, \Delta) + i v(t, z, \Delta) = \int \Omega_{12}(t', z) w(t', z, \Delta) \exp[i\Delta(t - t')] dt' \quad (52)$$

Por comparación con las Ecs. (41) y (42), vemos que ellos han definido la susceptibilidad en la forma

$$\chi_S(z, t - t', t') = \langle w(t', z, \Delta) \exp[i\Delta(t - t')] \rangle, \quad (53)$$

que es una función de dos tiempos, por lo que, a pesar de ser formalmente correcta, no es de uso práctico y es innecesariamente compleja para el análisis espectral experimental, porque los datos de salida son las variables atómicas y de campo, para todos sus valores relevantes, a una distancia especificada de penetración en el medio. La doble dependencia temporal de la Ec. (53) dificulta enormemente su interpretación física y su relación directa con las mediciones del espectrómetro.

La diferencia esencial entre su tratamiento y el aquí presentado radica en que la Ec. (53) no es una convolución como lo es la ecuación previa a la (43), por lo que su análisis espectral no puede ser simplificado, mientras que la Ec. (43) constituye la definición usual para la susceptibilidad.

#### 4. EXPERIMENTOS NUMERICOS EN PROPAGACION

Debido a que las Ecs. (15) y (23) en general no admiten solucio-



nes analíticas, presentamos en esta sección algunos de los más típicos resultados de este fenómeno de propagación no-lineal, obtenidos a partir de simulaciones numéricas y en los cuales el efecto de la radiación coherente de luz, emitida por las transiciones de los dipolos atómicos, es claro y marca notables alternaciones a los conceptos clásicos de la propagación. (1.a,13)

Los resultados son presentados en forma gráfica en la Fig. 5 para cuatro diferentes distancias de penetración en el medio, tanto en el dominio del tiempo como en el de frecuencias, denotando con (a) hasta (f) las diferentes variables significativas de la simulación. En las gráficas marcadas (a) hemos graficado el módulo de la envolvente del pulso, mientras que en las marcadas (b) se presenta la inversión atómica a través de las poblaciones en los niveles 1 y 2, una vez que han sido promediadas con respecto a la distribución atómica de frecuencias. En el dominio de las frecuencias, presentamos en (c) el módulo de la transformada de Fourier de la envolvente del pulso. La parte real e imaginaria de la susceptibilidad son mostradas en (d), mientras que el índice de refracción y la ganancia (que si es negativa se le denomina coeficiente de absorción) son graficados en (e). Finalmente, el módulo de la transformada de Fourier de la polarización es mostrada en (f). Debe notarse, que como la susceptibilidad atómica es calculada numéricamente a partir de la Ec. (44), para evitar oscilaciones ficticias surgidas por imprecisión numérica es definida como cero cuando el espectro de la envolvente del pulso toma valores menores que una tolerancia previamente determinada. Esto explicará los abruptos saltos en las gráficas (d) y (e) de las simulaciones numéricas que en seguida presentamos.

#### 4.a) Absorción

En la Fig. 5 mostramos la propagación numérica de un pulso positivo de forma gaussiana y cuya envolvente encierra un área de  $0.6\pi$ . Tal vez, éste sea el fenómeno en el cual el efecto de la no-linealidad de la interacción sea más claro de distinción, puesto que clásicamente esperaríamos que el área y el pulso fueran absorbidos de acuerdo a la ley exponencial de Beer, como lo indica la Ec. (34). Sin embargo, gráficamente se observa que

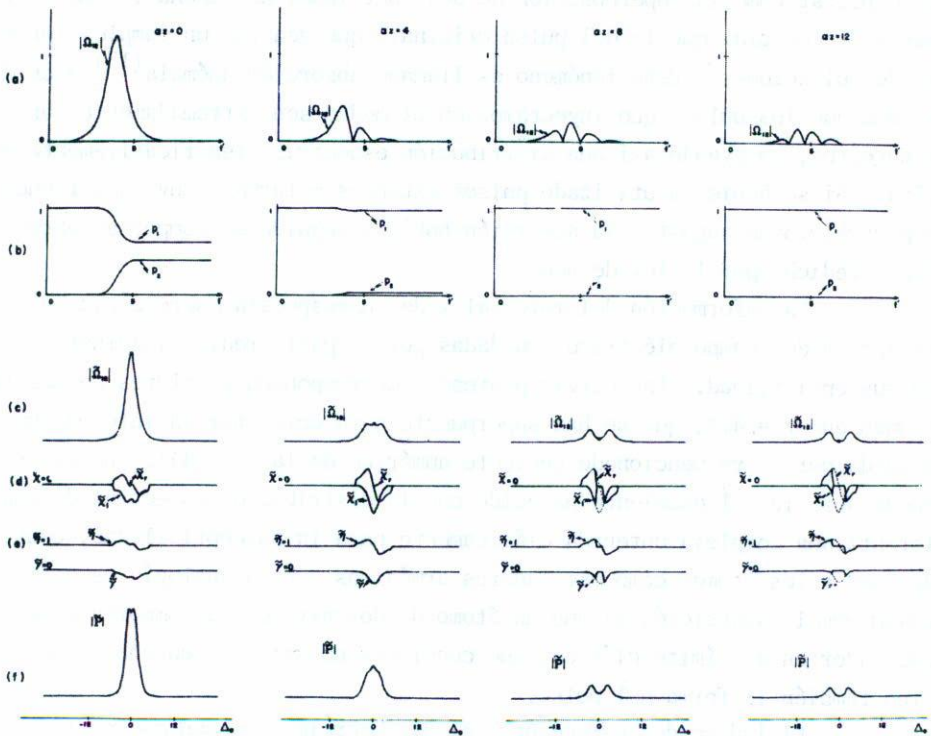


Fig. 5. Simulación numérica que muestra la absorción de un pulso gaussiano con un área inicial de  $0.6\pi$ . Las líneas punteadas en las gráficas (d) y (e) corresponden a los valores respectivos en  $\alpha Z = 4$ , mientras que el punto en la gráfica (c) representa el valor del área del pulso.

el pulso muestra una absorción que difiere de la forma esperada clásicamente, llegando incluso a generarse componentes negativas que semejan oscilaciones, mientras que las poblaciones de los átomos, y por tanto su energía, pronto dejan de ser afectadas por el pulso.

El análisis espectral del proceso aclara este comportamiento aparentemente extraño. El módulo de la transformada de la envolvente del campo eléctrico nos indica una rápida absorción en las frecuencias cercanas a la de resonancia, mostrando así que el área del pulso sigue el comportamiento predicho por el teorema del área. Además, cuando el área del pulso es prácticamente cero, aún quedan dos contribuciones simétricamente fuera de la resonancia con el láser, más delgadas que la distribución original, que son absorbidas más lentamente. En el dominio del tiempo, esto lo podemos interpretar como la superposición de dos contribuciones anchas, a menor y mayor frecuencias que la del pulso original, que generan un complejo proceso de pulsaciones. Este fenómeno es llamado absorción anómala<sup>(13)</sup> y es debido a que los pulsos que inyectamos en el medio son extremadamente cortos o angostos, poseyendo así una distribución espectral significativamente amplia. Si se hubiesen utilizado pulsos extensos o largos, cuya distribución espectral fuese angosta, la absorción hubiera seguido el comportamiento clásico predicho por la ley de Beer.

La información del material y de su respuesta macroscópica a la presencia del campo eléctrico son dadas por la parte real e imaginaria de la susceptibilidad. Las curvas punteadas corresponden a valores de las funciones en  $\alpha z = 4.0$ , que se han superpuesto para completar la información perdida por el ya mencionado cociente numérico de la Ec. (44). En ellas se puede apreciar el excelente parecido con la distribución espectral de una lorentziana compleja obtenida clásicamente para la susceptibilidad, considerando a los átomos como osciladores armónicos. Esta analogía es correcta y confirma la suposición de que un átomo de dos niveles se comporta como un oscilador en el límite clásico, que considera no sólo la pequeña intensidad sino también la forma del pulso.

El índice de refracción y el de absorción son aún más explícitos. La opacidad, indicada por el coeficiente de absorción, muestra un agudo máximo en la resonancia, indicándonos que en esas frecuencias el medio es un excelente absorbedor de la luz del láser. De la curva superpuesta se pue-



de apreciar que su forma es estable, lo que explica la absorción más lenta de las componentes fuera de resonancia y su permanencia como una batiente superposición de dos pulsos anchos a mayores y menores frecuencias de la de resonancia.

Por su parte, el índice de refracción, en forma análoga al tratamiento clásico,<sup>(14)</sup> es de la forma anómala, puesto que, en la vecindad de  $\tilde{\eta} = 1$ , a un incremento en la frecuencia corresponde un decremento en el índice de refracción y un incremento en la velocidad de fase. El comportamiento normal en absorción como el que muestran la mayoría de los materiales transparentes en la región óptica y que se caracteriza por incrementar el índice de refracción al aumentar la frecuencia, está también presente en las frecuencias lejanas a la de resonancia.

El módulo de la distribución espectral de la polarización nos ofrece la información faltante acerca del medio. En ella notamos claramente que la radiación dipolar a frecuencias fuera de resonancia es el origen de las desviaciones que este fenómeno presenta con respecto a la absorción clásica.

Finalmente, este estudio espectral nos permite aclarar la terminología anteriormente usada. El término anómalo, usado tanto para el índice de refracción<sup>(14)</sup> como para el proceso de absorción, tiene un origen muy distinto en cada uno de los casos. El primero tiene un origen convencional, surgido del hecho de que los materiales clásicamente transparentes corresponden a cristales con resonancias en el ultravioleta, mientras que el segundo se adoptó al descubrirse desviaciones de la ley de Beer en medios ópticos resonantes.<sup>(13)</sup>

Esto es fácilmente explicable si notamos que los pulsos clásicos, además de encerrar un área pequeña, son sobreentendidos como pulsos anchos con respecto a su máxima amplitud. Ya Sommerfeld<sup>(15)</sup> había notado que estos pulsos tienen una distribución espectral aguda, cuya anchura es inversamente proporcional a la duración del pulso. Sin embargo, la teoría clásica de la absorción y la ley de Beer son perfectamente aplicables en este caso, a pesar de que la primera considera trenes de duración infinita y funciones de respuesta cuyas singularidades son suavizadas artificialmente por la convolución con el filtro del aparato detector.

La posibilidad de crear pulsos agudos con distribución espectral

ancha, traída por la invención del láser, ha causado paradójicamente con fusión al respecto. Absorción anómala es un resultado de la anchura espectral y de la forma del coeficiente de absorción. Este es más agudo en las frecuencias cercanas a la resonancia, siendo máxima en ésta, la cual corresponde al valor del área del pulso y que sigue el comportamiento de la ley de Beer. Los remanentes de la distribución espectral son el origen de la desviación de esta ley, es decir, del aparente batimiento de pulsos que surge después de algunas longitudes de Beer. De los resultados numéricos podemos observar que, aun cuando el proceso de absorción presentado aquí no es estacionario, sus funciones de respuesta sí lo son, por lo que a medida que la propagación se realiza, los remanentes del pulso son también absorbidos progresivamente a frecuencias fuera de la resonancia y, por ende, se vuelven más incoherentes. Esto descarta la sugerencia<sup>(9.e,13)</sup> de que estos remanentes puedan ser el origen de pulsos estables de área  $0\pi$  (*kinks*) y al proceso de absorción anómala como un mecanismo para crearlos.

La anchura finita del pulso resonante se manifiesta, así mismo, en la anchura de las funciones de respuesta. El estudio de estos efectos y del modelo atómico serán dejados para una nota posterior.

#### 4.b) *Transparencia auto-inducida*

Como indicamos en la sección 2.e, el descubrimiento de soluciones estacionarias, diferentes de las ondas monocromáticas encontradas en la teoría clásica, constituye uno de los más notables logros de la teoría moderna de propagación de luz intensa en dieléctricos. En la Fig. 6 mostramos la propagación numérica de un pulso cuya envolvente posee la forma dada en la Ec. (26.d), que es solución de las ecuaciones de movimiento para pulsos estacionarios. Desde luego, el área de este pulso es de  $2\pi$ . En el dominio del tiempo, resulta evidente la invariancia del pulso durante la propagación. Así, el pulso encuentra transparente al medio, viajando con una velocidad constante y menor que la de la luz en el medio. Este último hecho es el responsable del atraso que va sufriendo el pulso conforme se adentra en el medio y que también es observable en la gráfica. Las poblaciones atómicas muestran el mismo comportamiento estable. Durante la primera mitad del pulso, los átomos adquieren energía del campo eléctrico

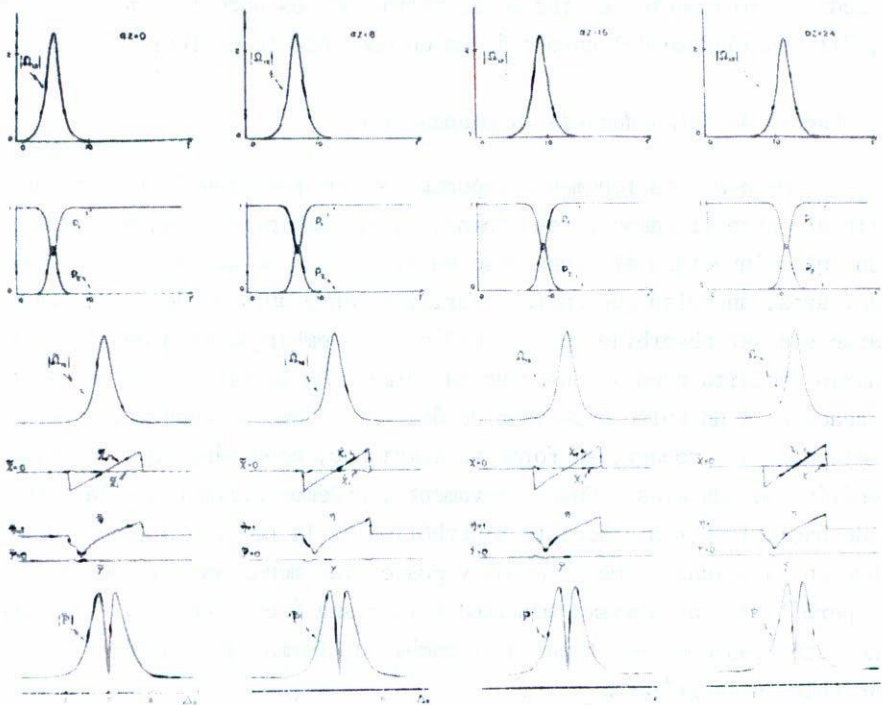


Fig. 6. Simulación numérica que muestra la propagación sin deformación de un solitón óptico con un área de  $2\pi$ .



hasta quedar completamente excitados, para radiarla coherentemente al campo durante la segunda mitad y quedar nuevamente en su estado base.

En las características espectrales de la propagación, la amplitud de la transformada de la envolvente es estacionaria conforme a nuestra concepción usual del espectro para procesos estacionarios. De ello se desprende que el área del pulso permanece constante en  $2\pi$ , satisfaciendo el teorema del área. Por su parte, la susceptibilidad atómica contrasta totalmente con la familiar forma clásica, pues es lineal y puramente real, aunque a diferencia del caso de absorción, es formalmente de cuadrado no-integrable. A pesar de ello es causal y posee una relación bien definida de dispersión con dos substracciones.<sup>(16)</sup>

El coeficiente de absorción es completamente nulo, en apoyo a nuestro concepto de transparencia, en el cual no hay absorción por parte del medio. Finalmente, el índice de refracción es normal, aun en resonancia, diferenciándose del caso clásico en que sólo lo es fuera de ella.

#### 4.c) Cambio de forma durante la propagación

Otro de los fenómenos importantes, que resultan de la interacción no-lineal entre el campo y los átomos, es el cambio de forma que experimenta un pulso inyectado al propagarse en el medio. De acuerdo con el teorema del área, un pulso que encierre originalmente un área de  $2\pi$  deberá propagarse sin ser absorbido por el medio. Sin embargo, para que sea estacionario necesita además conservar la forma. En la Fig. 7 mostramos la propagación de un pulso gaussiano de área  $2\pi$ . Como se observa, a medida que el pulso se propaga, su forma va cambiando, agudizándose su cúspide y extendiéndose sus alas. Cualitativamente, podemos afirmar que la forma tiende hacia la estable secante hiperbólica de la Ec. (26.d), pues una distribución gaussiana es menos aguda y posee alas menos anchas que una secante hiperbólica con la misma amplitud y la misma área encerrada. Las poblaciones atómicas muestran también el cambio de forma, aun cuando es menos apreciable en la gráfica.

El análisis espectral en este caso, además de su valor informativo, se consolida como una poderosa herramienta en la interpretación cuantitativa de los experimentos numéricos. Como la transformada de Fourier de

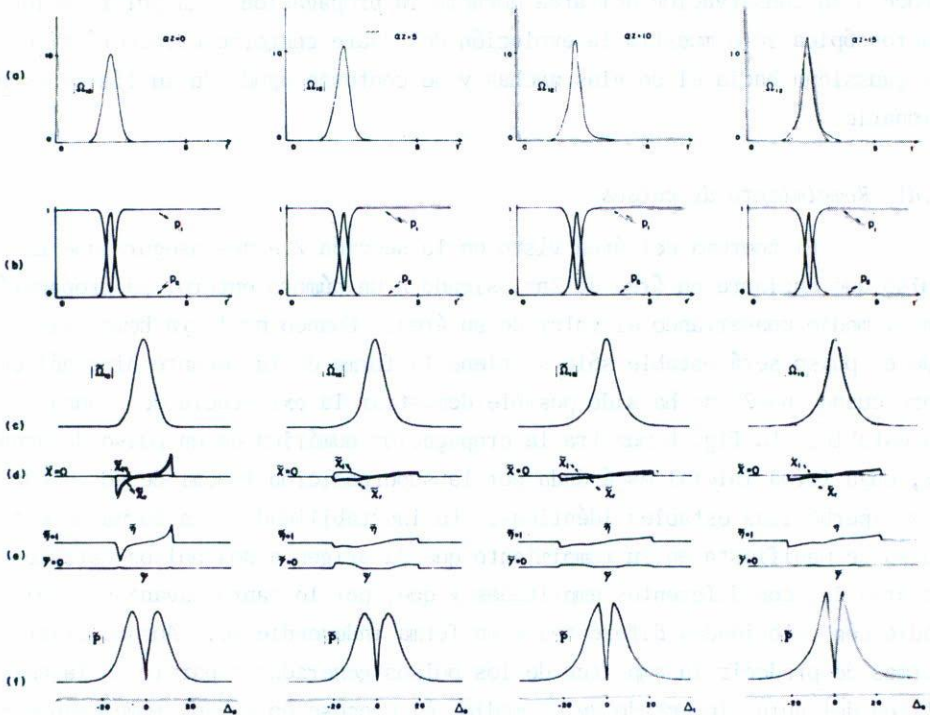


Fig. 7. Simulación numérica que muestra la transformación de un pulso  $2\pi$  gaussiano hacia un *solitón* óptico. La línea punteada en las gráficas (a) y (c) para  $\alpha Z = 15$  corresponden a los valores iniciales de las respectivas variables.

una distribución gaussiana y de una secante hiperbólica son idénticas en sus formas, constituyen una base adecuada para estudiar el cambio de forma sin ambigüedades. La información contundente del cambio de forma está dada por las funciones de respuesta del medio. La susceptibilidad tiene inicialmente una distribución que, a medida que avanza en el medio, se va convirtiendo en real y lineal, como la del pulso estacionario del ejemplo anterior. Esto nos confirma que la forma tiende hacia la estable secante hiperbólica. Además, el índice de refracción es normal y tiende también a la forma estacionaria con la propagación.

Por su parte, la ganancia en las alas de la distribución espectral, nos indica crecimiento en las alas del pulso, mientras que en las frecuencias cercanas a la resonancia permanece nulo e inalterado, como corresponde a la conservación del área durante la propagación. La polarización macroscópica sólo muestra la evolución del suave contorno característico de la gaussiana hacia el de alas anchas y de contorno agudo de su límite estacionario.

#### 4.d) Rompimiento de pulsos

El teorema del área visto en la sección 2.e nos asegura que un pulso que encierre un área de  $2n\pi$ , siendo  $n$  un número entero, se propagará en el medio conservando el valor de su área. Cuando  $n=1$  ya hemos visto que el pulso será estable sólo si tiene la forma de la secante hiperbólica, pero cuando  $n > 2$  no ha sido posible demostrar la existencia de alguna forma estable. La Fig. 8 muestra la propagación numérica de un pulso de área  $4\pi$ , cuya forma inicial está dada por la superposición lineal de dos secantes hiperbólicas estables idénticas. La inestabilidad en la forma de este pulso se manifiesta en su rompimiento que da origen a dos pulsos estables de área  $2\pi$ , con diferentes amplitudes y que, por lo tanto, avanzan en el medio con velocidades diferentes y en forma independiente. Aunque existen formas de predecir la amplitud de los pulsos generados a partir de la amplitud del pulso inyectado en el medio, el proceso en sí del rompimiento es aún desconocido. La mecánica no-lineal del proceso, resaltada aquí por el hecho de que una superposición lineal de soluciones estables no es estable, es la responsable de esta compleja generación de pulsos. Las poblaciones atómicas muestran en la figura una doble oscilación debido al efecto del



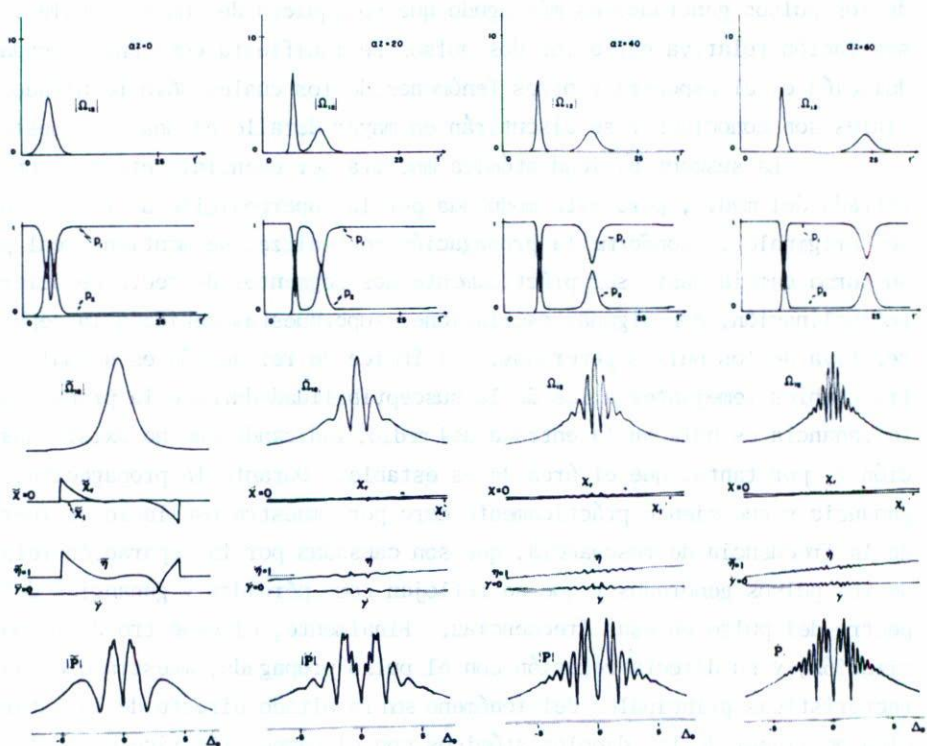


Fig. 8. Simulación numérica que muestra el rompimiento de un pulso original formado por la superposición lineal de dos *solitones* ópticos idénticos.

área  $4\pi$ , que es más evidente conforme la separación de los pulsos generados aumenta. Debe notarse que no todos los átomos regresan a su estado base cuando el pulso ha pasado ya, como sucedía en los dos ejemplos anteriores para un área estable. Esto es ocasionado por la radiación de los dipolos atómicos en las frecuencias fuera de la de resonancia durante el proceso de rompimiento y es de esperarse que todos los átomos regresen a su estado base sólo cuando los pulsos generados estén lo suficientemente separados.

La transformada de Fourier de la envolvente muestra en la frecuencia la resonancia la estabilidad del área  $4\pi$ , pero la anchura de la distribución total aumenta conforme la propagación se realiza, indicando que uno de los pulsos generados es más agudo que cualquiera de los originales. La separación relativa entre los dos pulsos se manifiesta como una marcada modulación en el espectro y otros fenómenos, de los cuales sólo resultados parciales son conocidos y se discutirán en mayor detalle en una nota posterior.

La susceptibilidad atómica muestra ser esencialmente real en la entrada del medio, pero está modulada por la superposición de los dos pulsos originales. Conforme la propagación se realiza, se mantiene real pero su forma cambia hasta ser prácticamente dos segmentos de recta de diferente inclinación, con algunas oscilaciones superpuestas debido a la separación relativa de los pulsos generados. El índice de refracción es normal y muestra cambios semejantes a los de la susceptibilidad durante la propagación. La ganancia es nula en la entrada del medio, indicando que no existe absorción y, por tanto, que el área  $4\pi$  es estable. Durante la propagación, la ganancia sigue siendo cero pero muestra oscilaciones fuera de la frecuencia de resonancia, que son causadas por la separación relativa de los pulsos generados y que se reflejan como pérdidas y ganancias del espectro del pulso en esas frecuencias. Finalmente, el espectro de la polarización, y su directa relación con el pulso propagado, muestra que las características principales del fenómeno son resultado directo de la interacción no-lineal de los dipolos atómicos con el campo eléctrico de la luz del láser.

## 5. CONCLUSIONES

En este artículo hemos presentado el primer análisis espectral sistemático del problema de la propagación de pulsos de luz en medios resonantes, aplicándolo a cuatro experimentos numéricos en los que los métodos tradicionales permitieron obtener solamente resultados parciales.

Dicho estudio nos ha permitido reclasificar los fenómenos de la propagación de acuerdo con el comportamiento de las funciones de respuesta del medio, en aquellos en que ésta depende intrínsecamente de la distancia de penetración en el medio y en aquellos en que es independiente de  $Z$ , a pesar de la característica no-estacionaria del proceso mismo. Como ejemplo de los primeros, encontramos el cambio de forma y el rompimiento de pulsos explicados en las secciones 4.c y 4.d respectivamente, mientras que como ejemplos de los segundos están los fenómenos de absorción y de transparencia auto-inducida vistos en las secciones 4.a y 4.b. Es de notar que estos dos últimos caen dentro de la misma clasificación por sus funciones de respuesta, a pesar de ser dos fenómenos conceptualmente opuestos.

Por otra parte, la teoría semi-clásica de la propagación, como muchas otras teorías no-lineales, ha hecho de los experimentos numéricos una parte esencial dentro de su estructura lógica de análisis. Las características de las ecuaciones de movimiento, en su forma de ecuaciones diferenciales no-lineales fuertemente acopladas, implican que el problema numérico original requiere de una compleja infraestructura computacional para soportar sus códigos. Sin embargo, el uso de técnicas adicionales, como son la creación de arreglos virtuales, la técnica de segmentación y el mismo análisis espectral, nos ha permitido el desarrollo de códigos confiables y eficientes en sistemas computacionales pequeños. Esto es importante en el ambiente local de facilidades limitadas.

### APENDICE: DESCRIPCION DEL METODO NUMERICO

Habiendo discutido la física y algunos de los resultados del fenómeno de la propagación de luz en medios resonantes o cuasi-resonantes, es conveniente mencionar las características del método numérico y las medidas que utilizamos para analizar el fenómeno en instalaciones de cómputo de por



sí muy modestas.

El tema de la propagación que hemos tratado a lo largo de este artículo ha alcanzado un progreso notable debido a las prometedoras aplicaciones en muchos de los campos científicos y tecnológicos actuales. En algunos países este hecho ha justificado la utilización de grandes computadoras cuya capacidad es congruente con el número de variables que se desea analizar y con el tamaño de los códigos. La instalación de códigos semejantes en pequeñas computadoras, como la PDP 11/34 de nuestro Centro de Investigaciones en Óptica, es nueva y relevante.

Nuestro modelo numérico describe la propagación unidimensional de un pulso de luz en un medio formado por átomos de dos niveles energéticos. Las Ecs. (15) y (23), que rigen tal interacción, pueden ser escritas en la siguiente forma representativa:

$$\partial A / \partial t' = A E \quad (54.a)$$

y

$$\partial E / \partial z = \langle A \rangle, \quad (54.b)$$

en donde  $A$  representa a las variables atómicas y  $E$  a las variables de la envolvente del campo eléctrico. Estas ecuaciones deben ser integradas en el intervalo  $0 < t' < t_f$  y propagadas en el intervalo  $0 < z < z_f$  partiendo de las condiciones iniciales  $A(0, z, \Delta)$  para las variables atómicas y  $E(t', 0)$  como el valor de la envolvente del campo a la entrada del medio. Cabe hacer notar, que las Ecs. (54.a) representan el comportamiento de toda una familia de variables, puesto que las variables atómicas dependen, además de  $t'$  y de  $z$ , del desafinamiento  $\Delta = \omega_{21} - \omega_L$ .

Como se puede observar, las Ecs. (54.a) involucran derivadas sólo con respecto a  $t'$ , y las Ecs. (54.b) derivadas sólo con respecto a  $z$ , por lo que la integración se puede llevar a cabo en forma cuasi-independiente, manteniendo fija la posición en  $z$  mientras se avanza en  $t'$  y viceversa. El método que hemos utilizado es un caso especial de los métodos de predictor-corrector de Euler y es aplicado sobre la región de integración, pensada como una rejilla de puntos con espaciamentos uniformes  $Ht'$  a lo largo del eje  $t'$  y  $H_z$  a lo largo del eje  $z$ . La Fig. 9 muestra una representación esquemática de los métodos de Euler de predictor-corrector (ver Tabla I).

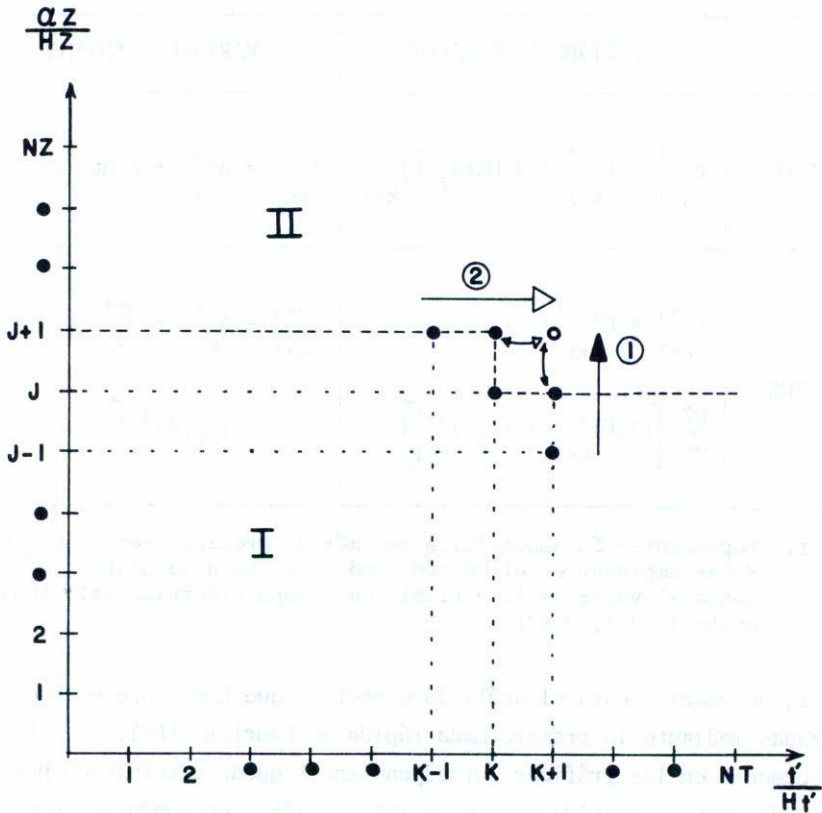


Fig. 9. Uso del algoritmo acoplado del predictor-corrector (ver Tabla I). Las flechas rectas representan a los predictores y las curvadas a los correctores subsecuentes. La región I corresponde a la región ya conocida y el punto blanco al valor de las variables a determinar mediante un proceso iterativo predictor-corrector cuya secuencia está indicada por los números 1 y 2.

Los promedios de las variables atómicas, que aparecen en las Ecs. (54.b), fueron realizados por la regla de Simpson, considerando que la distribución atómica de frecuencias corresponde a la de una distribución gaussiana con media en  $\Delta = 0$  y con una desviación estándar determinada al inicio de cada simulación numérica. Por su parte, las transformadas de

TABLA I  
ALGORITMO PREDICTOR/CORRECTOR

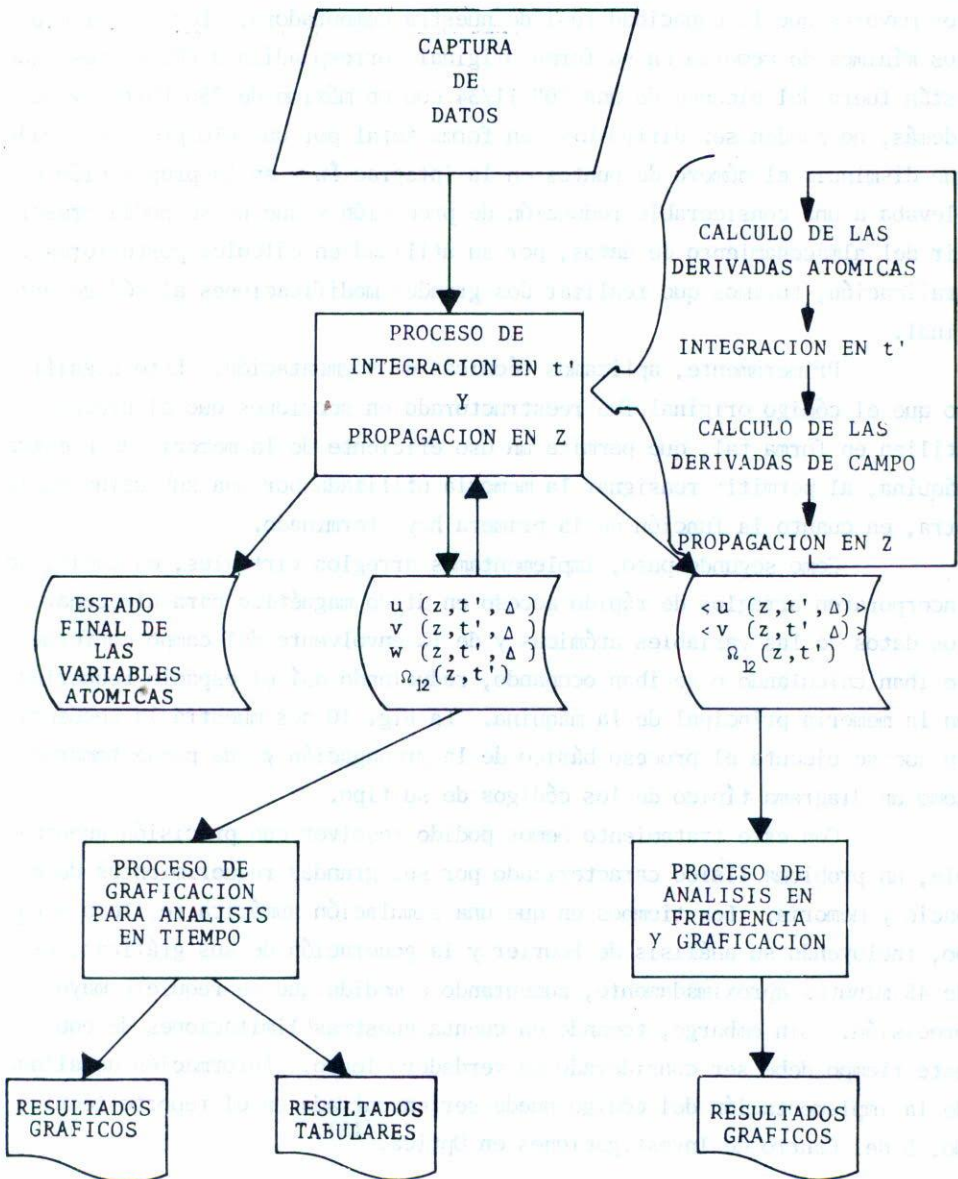
	VARIABLES DE CAMPO	VARIABLES ATOMICAS
PREDICTOR	$E_{j+1}^{j+1} = E_{k+1}^{j-1} + 2 \text{ HZ} (\partial_z E)_{k+1}^j$	$A_{k+1}^{j+1} = A_{k-1}^{j+1} + 2 \text{ Ht}' (\partial_t A)_k^{j+1}$
CORRECTOR	$E_{k+1}^{j+1} = E_{k+1}^j + \frac{\text{HZ}}{2} \left[ (\partial_z E)_{k+1}^j + (\partial_z E)_{k+1}^{j+1} \right]$	$A_{k+1}^{j+1} = A_k^{j+1} + \frac{\text{Ht}'}{2} \left[ (\partial_t A)_k^{j+1} + (\partial_t A)_{k+1}^{j+1} \right]$

TABLA I. Representación esquemática del método predictor-corrector de Euler empleado en el método numérico. La nomenclatura  $E_k^j$  representa al valor de la variable del campo eléctrico calculado en el punto  $(K \text{ Ht}', J \text{ HZ})$ .

Fourier, necesarias para el análisis espectral que hemos presentado, fueron realizadas mediante la transformada rápida de Fourier (FFT).<sup>(17)</sup> La escala de frecuencia en las gráficas correspondientes queda determinada por la frecuencia de corte, definida como  $\nu_c = (NT - 1)/2t_f$ , en donde  $NT$  es el número de puntos muestreados uniformemente en la ventana de observación. Cabe aclarar que los cálculos numéricos para el análisis espectral se efectuaron en términos de la variable  $t' = t - z/c$  y no en  $\zeta = t - z/V$ . Esto corresponderá a un retraso, discutido ya en la sección 3.b y que se reflejará como una fase que afecta tanto a la transformada de la polarización como a la de la envolvente del campo eléctrico. Sin embargo, la susceptibilidad, definida como el cociente de ambas, no es afectada por ella.

El código que se usó como fuente original del nuestro, es aquel que fue utilizado por Konopnicki en su tesis de doctorado.<sup>(6)</sup> Sin embargo, fue sustancialmente modificado, ya que su tamaño era demasiado gran





de y sus requerimientos de memoria para almacenar los datos eran varias veces mayores que la capacidad real de nuestra computadora. Los requerimientos mínimos de memoria en su forma original correspondían a 600 Kbytes, que están fuera del alcance de una PDP 11/34 con un máximo de 256 Kbytes y que, además, no pueden ser dirigidos en forma total por un sólo proceso. Dado que disminuir el número de puntos en la integración y en la propagación nos llevaba a una considerable reducción de precisión y que no se podía prescindir del almacenamiento de datos, por su utilidad en cálculos posteriores y graficación, tuvimos que realizar dos grandes modificaciones al código original.

Primeramente, aplicamos técnicas de segmentación. Esto significa que el código original fue reestructurado en secciones que el proceso utiliza en forma tal, que permite un uso eficiente de la memoria de nuestra máquina, al permitir reasignar la memoria utilizada por una subrutina hacia otra, en cuanto la función de la primera haya terminado.

Como segundo paso, implementamos arreglos virtuales, es decir, se incorporaron arreglos de rápido acceso en disco magnético para almacenar los datos de las variables atómicas y de la envolvente del campo conforme se iban calculando o se iban ocupando, reduciendo así el espacio requerido en la memoria principal de la máquina. La Fig. 10 nos muestra la secuencia en que se ejecuta el proceso básico de la propagación y que puede tomarse como un diagrama típico de los códigos de su tipo.

Con este tratamiento hemos podido resolver con precisión aceptable, un problema físico caracterizado por sus grandes requerimientos de espacio y memoria. Los tiempos en que una simulación numérica se lleva a cabo, incluyendo su análisis de Fourier y la generación de sus gráficas, es de 45 minutos aproximadamente, aumentando a medida que se requiere mayor precisión. Sin embargo, tomando en cuenta nuestras limitaciones de equipo, este tiempo debe ser considerado un verdadero logro. Información detallada de la implementación del código puede ser encontrada en el reporte técnico No. 5 del Centro de Investigaciones en Óptica.<sup>(18)</sup>

#### REFERENCIAS

- 1.a) J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, Mc.Graw Hill, New York (1941) cap. 5.

- b) L. Eyges, *The Classical Electromagnetic Field*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1955) cap. 17.
- c) J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, New York (1952) cap. 7.
- d) L. Brillouin, *Wave Propagation and Group Velocity*, Academic, New York (1960).
- 2. J.H. Eberly, K. Wodkiewicz, *J. Opt. Soc. Am.*, 67 (1977) 1252.
- 3. J.D. Cresser, *Theory of the Spectrum of the Quantized Light Field*, Preprint (1982)
- 4. A. Messiah, *Quantum Mechanics*, North Holland, Amsterdam (1974) p. 316.
- 5. *Ibid.* cap. VII.
- 6. M.J. Konopnicki, Tesis de Doctorado, Universidad de Rochester (1980) (sin publicar).
- 7. L. Allen and J.H. Eberly, *Optical Resonance and Two-level Atoms* John Wiley & Sons, New York (1975) cap. II.
- 8. *Ibid.* cap. III.
- 9. a) L. McCall and E.L. Hahn, *Phys. Rev.* 183 (1969) 457.  
b) L. Matulic and J.H. Eberly, *Phys. Rev.* A6 (1972) 822; *ibid.* 6 (1972) 1258E.  
c) V. Nemeč and L. Matulic, *Opt. Commun.* 13 (1975) 380.  
d) G.L. Lamb Jr., *Rev. Mod. Phys.*, 43 (1971) 99, y referencias ahí mencionadas.
- 10. e) R.E. Slusher, *Progress in Optics XII*, E. Wolf Ed., North. Holland (1974) p.55  
a) H.M. Gibbs and R.E. Slusher, *Phys. Rev. Letters*, 24 (1970) 683; *Appl. Phys. Letters*, 18 (1971) 505; *Phys. Rev.*, A5 (1972) 1634.  
b) A. Zembrod and Th. Gruhl, *Phys. Rev. Letters*, 27 (1971) 287.
- 11. L. Allen and J.H. Eberly, *op. cit.*, Chaps. I and IV.
- 12. M. Sargent III, M.O. Scully, W.E. Lamb Jr., *Laser Physics*, Addison Wesley, Reading Mass. (1974) cap. 13.
- 13. M.D. Crisp, *Phys. Rev.*, A1 (1970) 1604.
- 14. a) F.A. Jenkins, H.E. White, *Fundamentals of Physical Optics*,  
b) G.R. Fowles, *Introduction to Modern Optics*, Holt-Rinehart and Winston, New York (1968) cap. 23.
- 15. A. Sommerfeld, *Optics, Lectures on Theoretical Physics Vol IV*, Academic Press, New York (1964) p. 114.
- 16. H.M. Nussenzweig, *Causality and Dispersion Relations*, Academic Press, N.Y. (1972) cap. 1.
- 17. E.O. Brigham, *The Fast Fourier Transform*, Prentice Hall, New York (1974)
- 18. E. Chavez Cortes, Centro de Investigaciones en Optica, Reporte Interno No. 5 (1982).