

# BIFURCACION Y CAOS EN SISTEMAS DINAMICOS DEL PLANO COMPLEJO

Xavier Gómez Mont

Instituto de Matemáticas, UNAM  
México, 04510, D.F.

## RESUMEN

El objeto del presente trabajo es ilustrar el fenómeno de estabilidad estructural y de bifurcación para sistemas dinámicos, a través de la iteración de funciones racionales. Dados los avances recientes en la teoría y en el uso de métodos computacionales, se posee una imagen clara de la estabilidad estructural de estos sistemas. Ilustramos, en el caso de funciones cuadráticas, el fenómeno de bifurcación para sistemas dinámicos.

## ABSTRACT

We illustrate the problem of structural stability and bifurcation

for dynamical systems, through the process of iteration of rational functions. Due to recent advances in the theory and in computational methods, a clear picture emerges of the structural stability of these systems. We illustrate through quadratic maps the intricate phenomena of bifurcation for dynamical systems.

## I. INTRODUCCION

Los sistemas dinámicos son la parte de las matemáticas que trata sobre la descripción de fenómenos que están evolucionando con el tiempo. Los primeros sistemas dinámicos con los que nos topamos son las ecuaciones diferenciales ordinarias. Estas ecuaciones parten de una descripción infinitesimal del movimiento, especificando en cada punto del espacio el vector velocidad del movimiento:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x) \quad (x \in E) \quad . \quad (1)$$

El teorema de existencia y unicidad de las soluciones nos garantiza que existe un movimiento completamente determinado por esta descripción infinitesimal que podemos ver como una familia de transformaciones del espacio,  $\psi_t: E \rightarrow E$ , que nos especifica dónde se encuentran los puntos de  $E$   $t$ -unidades de tiempo después.

En su primera etapa de evolución, los matemáticos trataban de encontrar soluciones a las ecuaciones diferenciales a través de funciones conocidas. Durante esta etapa, se resolvieron analíticamente muchas de estas ecuaciones, y se ganó una intuición bastante buena del comportamiento de las soluciones. Mas también, se enfrentaron al hecho de que la mayoría de las ecuaciones no se podían resolver analíticamente.

Fue Henri Poincaré<sup>(1)</sup>, a finales del siglo XIX, el que introdujo la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales. El enfoque ya no era resolver analíticamente las ecuaciones, sino más bien dar una descripción geométrico-topológica del retrato fase, es decir, las soluciones van trazando en el espacio donde están definidas una trayectoria al irse moviendo, y el conjunto de todas las trayectorias nos da una descomposición del espacio ambiente en la unión disjunta de una infinidad de curvas.

Poincaré fue el primero que trató de entender esta descomposición geomé-

trica (Fig. 1).

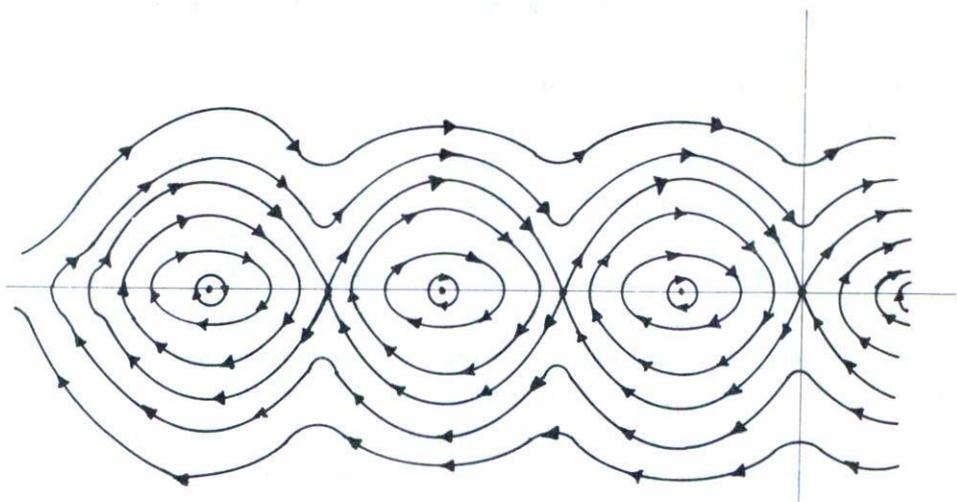


Fig. 1.

Este enfoque cualitativo abrió la noción de estabilidad estructural y de bifurcación<sup>(2,3,4)</sup>. Si la Ec. (1) modela un fenómeno que se está sucediendo en la realidad, nunca podremos tener un conocimiento perfecto de  $f$ . Así, para que las ecuaciones diferenciales sean una herramienta efectiva para entender la realidad, las soluciones de (1) y las de  $\dot{x} = g(x)$ , con  $g$  parecida a  $f$ , también se han de parecer. Podemos formular con precisión esta idea de la siguiente manera: Sea  $\mathcal{F} = \{f, g, \dots\}$  un espacio de ecuaciones diferenciales, que por lo general es un espacio de Hilbert. Diremos que  $f$  es *estructuralmente estable* si existe una vecindad  $U$  de  $f$  en  $\mathcal{F}$  tal que para toda ecuación  $g$  en  $U$  exista una biyección  $H: E \rightarrow E$  bicontinua que mande las trayectorias descritas por  $f$  en las trayectorias descritas por  $g$ .

Intimamente ligado al concepto de estabilidad estructural encontramos el de bifurcación<sup>(5)</sup>. Supóngase que en la descripción de un fenó

meno tenemos un parámetro  $k$  que podemos variar continuamente entre 0 y 1, y para cada valor de  $k$  el fenómeno queda descrito por una ecuación  $f$  en  $F$ , y que tanto  $f_0$  como  $f_1$  son estructuralmente estables; más  $f_0$  y  $f_1$  no son equivalentes, en el sentido de que sus órbitas tienen comportamientos distintos. Para valores pequeños de  $k$ ,  $f_0$  y  $f_k$  si son equivalentes y por consiguiente ha de haber un primer valor  $k_0$  para el cual  $f_0$  y  $f_{k_0}$  ya no sean equivalentes. Este punto  $k_0$  se denomina un punto de *bifurcación*.

En otras palabras, en el espacio  $F$  de ecuaciones diferenciales hay ciertos conjuntos abiertos  $U_i$  donde todas las ecuaciones en cada  $U_i$  son equivalentes. Los puntos de bifurcación son los puntos que se encuentran en la frontera de cada uno de estos conjuntos abiertos.

Se puede decir que a pesar de lo efectivo que han sido las ecuaciones diferenciales para modelar la realidad, no tenemos una idea clara del fenómeno de estabilidad estructural y de bifurcación para un sistema de ecuaciones parametrizadas por  $F$ . El objeto del presente trabajo es reportar sobre avances recientes en este problema para una clase de sistemas dinámicos, que pueden servir para ilustrar el patrón general y que muestran que el cuadro resultante es más interesante de lo que podría uno imaginar a primera vista. El esbozo de esta clase particular de sistemas es interesante dado que:

1. Es el primer caso no trivial donde se tiene una descripción más o menos completa
2. Cualquier fenómeno observado en sistemas dinámicos ya aparece en esta clase de sistemas
3. Las computadoras han hecho posible graficar muchos de estos sistemas y observar cómo varían al modificar las ecuaciones que los definen
4. Se cuenta con la herramienta de la teoría clásica de funciones de variable compleja, que es una de las teorías más perfeccionadas de las matemáticas

## II. LA DINAMICA DE LOS MAPEOS RACIONALES

Obtenemos otra clase de sistemas dinámicos al considerar cómo evoluciona un sistema, no con respecto a todo tiempo sino únicamente cómo

evoluciona en una cierta unidad de tiempo, dando origen a una transformación del espacio:  $T: E \rightarrow E$ . El sistema evoluciona en  $n$  unidades de tiempo al aplicar  $n$  veces la transformación  $T$ :  $T_n = T_0 \dots T_0: E \rightarrow E$ . Las órbitas del sistema dinámico generado por  $T, \{T_n(p)\}$ , son ahora de dimensión cero y estamos interesados por una descripción topológico-geométrica de esta descomposición<sup>(6)</sup>.

Empezaremos dando una definición algebraica de los sistemas que vamos a analizar, que tiene la ventaja de que presenta a los sistemas parametrizados de una manera natural.

Definición algebraica: Una *función racional* es una expresión de la forma

$$R(z) = \frac{a_n z^n + \dots + a_0}{b_m z^m + \dots + b_0} = \frac{\text{Polinomio en } z}{\text{Polinomio en } z}, \quad (2)$$

donde las constantes  $a_i, b_i$  son números complejos arbitrarios. La expresión algebraica  $R(z)$  da origen a una transformación

$$R: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

del plano complejo  $\mathbb{C}$  en sí mismo al mandar el punto  $z$  al número complejo  $R(z)$  dado por la fórmula (2) (Fig. 2).

Para obtener una imagen geométrica más clara hay una manera de compactar a los números complejos. Esta manera es poniendo un punto en el infinito y convirtiendo el plano complejo en la llamada esfera de Riemann:  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  (Fig. 3).

La función racional da entonces origen a un mapeo  $R: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ , donde

$$R(\infty) = \left. \frac{a_n \left(\frac{1}{z}\right)^n + \dots + a_0}{b_m \left(\frac{1}{z}\right)^m + \dots + b_0} \right]_{z=0} .$$

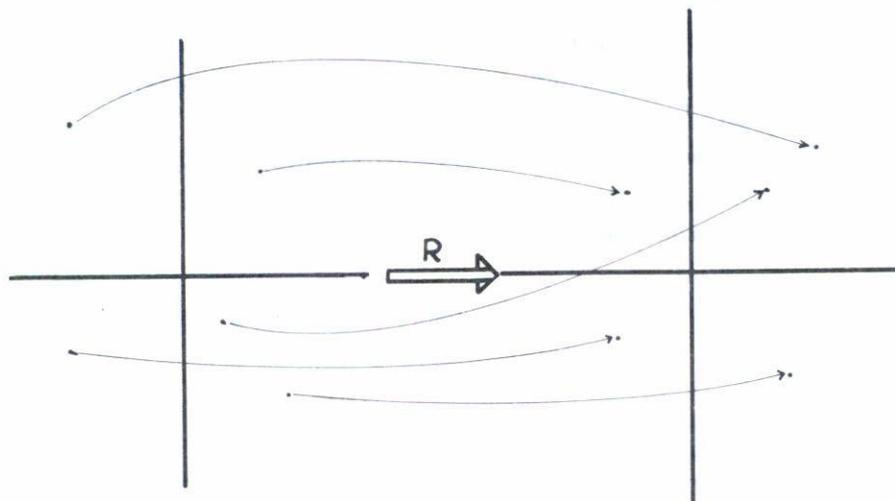


Fig. 2.

Los mapeos obtenidos a partir de las funciones racionales tienen la propiedad geométrica local de ser conformes, es decir, de preservar ángulos. Esto quiere decir que excepto donde la derivada se anule, denominados puntos de ramificación, esta derivada es una rotación seguida de una homotecia (multiplicación por un escalar real, que alarga o encoje todo). Este hecho simplifica notablemente la teoría, pues nos dice que  $R$  actúa en todas las direcciones basadas en un punto de la misma forma, es decir,  $R$  es isotrópica.

Recíprocamente, es un teorema básico de la teoría de funciones de variable compleja<sup>(7)</sup> el hecho de que cualquier mapeo de la esfera de Riemann en sí mismo que sea conforme en todos sus puntos donde no sea de ramificación, es una función racional. Así, la familia de funciones racionales tiene una caracterización local, la de ser isotrópica en todos los puntos de la esfera. Con esto, hemos llegado a la:

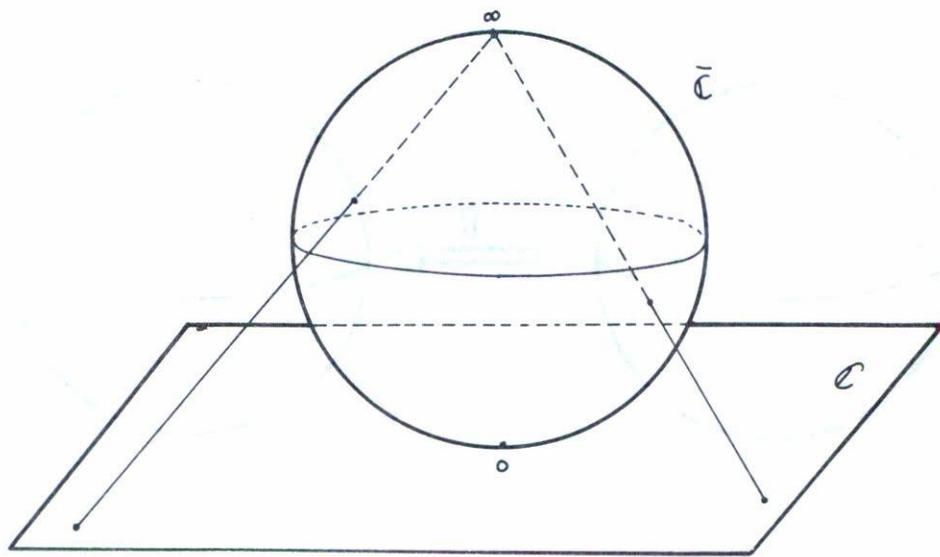


Fig. 3.

Definición geométrica. Un *mapeo racional* es una transformación continua de la esfera de Riemann en sí misma,

$$R: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}},$$

que es isotrópica (o conforme) en todo  $\mathbb{C}$  menos en un número finito de puntos, los puntos de ramificación de  $R$ .

Definición dinámica.  $R$  induce un endomorfismo de la esfera de Riemann en sí misma que es isotrópica en todo  $\mathbb{C}$  menos en un número finito de puntos (Fig. 4).

La diferencia entre la definición geométrica y la dinámica es pues la observación de que tanto el dominio como el contradominio son el mismo espacio. Esta diferencia hace posible el proceso de iteración, fundamental para sistemas dinámicos (Fig. 5).

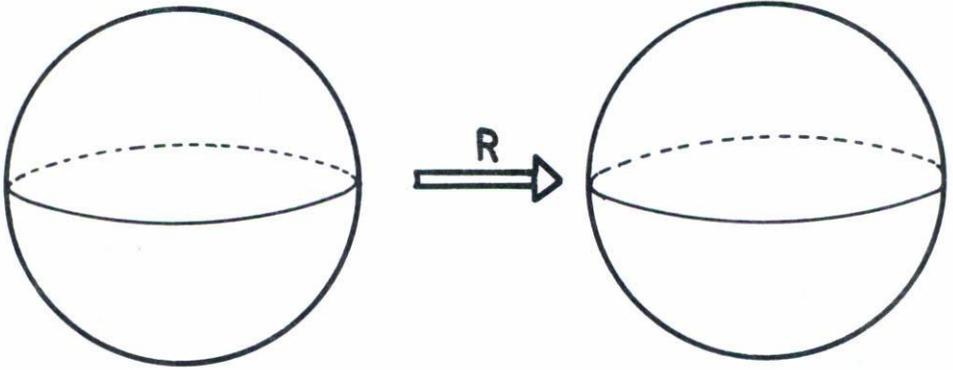


Fig. 4

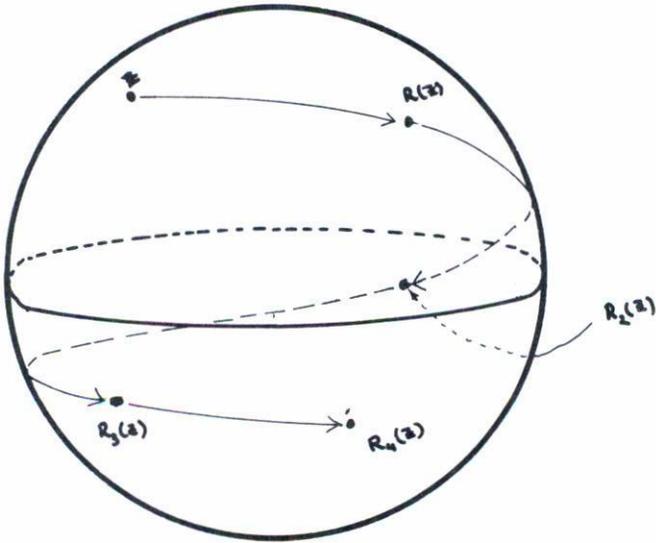


Fig. 5

Si  $R$  se escribe como en (2), el grado de  $R$ ,  $d$ , es el máximo de los enteros  $n$  y  $m$ . Este grado también se puede definir geoméricamente como el número de veces que envuelve  $R$  a la esfera de Riemann sobre sí misma, dado que por el teorema fundamental del álgebra  $R^{-1}(c)$  es igual a las raíces del polinomio

$$(a_n z^n + \dots + a_0) - c(b_m z^m + \dots + b_0) = 0 \quad ,$$

que es  $d$  siempre, si sabemos contar multiplicidades y tomamos en cuenta el punto al infinito. Así cada punto del contradominio queda cubierto  $d$  veces. Los mapeos racionales de grado  $d$  quedan pues parametrizados por  $(a_0, \dots, a_d, b_0, \dots, b_d) \in \mathbb{C}^{2d+2}$ , con la condición de que  $a_d \neq 0$  ó  $b_d \neq 0$ . Quedan parametrizados de manera natural por  $\text{Rac}_d$ , que es un abierto de  $\mathbb{C}^{2d+2}$ . Diremos que una función racional es cercana a otra si sus coeficientes están cercanos. Esta definición es equivalente a decir que la diferencia entre los dos mapeos es pequeña, es decir, la distancia  $(R(z), S(z)) < \varepsilon$  para todo punto  $z \in \bar{\mathbb{C}}$ .

Definición: Decimos que la función racional  $R$  de grado  $d$  es *estructuralmente estable* si existe una vecindad  $U$  de  $R$  en  $\text{Rac}_d$  tal que toda  $S$  en  $U$  sea topológicamente equivalente a  $R$ ; es decir, que exista para cada  $S$  en  $U$  un mapeo biyectivo  $h$ , continuo y de inverso continuo tal que  $h \circ R \circ h^{-1} = S$

Hay varias preguntas relevantes que ya podemos hacernos:

A. Descripción de la dinámica de  $R$ :

- 1) ¿Cuál es el comportamiento de  $R_n(z_0)$  cuando  $n$  tiende a más o menos infinito?
- 2) ¿Cómo depende este comportamiento de la condición inicial  $z_0$ ?

B. Dependencia de parámetros:

- 1) ¿Cómo depende este comportamiento de los parámetros  $a_0, \dots, b_m$  en (1)?
- 2) Analizar el fenómeno de estabilidad estructural.

## III. LOS MAPEOS RACIONALES CUADRATICOS

En esta sección analizaremos los mapeos de grado 2, 3, 5, 6. Empecemos con la función  $R(z) = z^2$ . Recordemos que al multiplicar dos números complejos, el valor absoluto del resultado es el producto de los valores absolutos de los multiplicandos, y que el ángulo que hace el resultado con el eje real es la suma de los ángulos de los factores. Así, el valor absoluto de  $z^2$  es  $|z^2| = |z|^2$  y argumento  $(z^2) = 2 \text{ argumento}(z)$ . De esta simple observación tenemos:

1. Si  $|z| < 1$ , iterar  $n$  veces  $R$  da  $R_n = z^{2^n}$  y tendremos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) = 0$ .
2. Si  $|z| > 1$  tendremos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) = \infty$ .
3. Si  $|z| = 1$ , y si  $\arg(z) = \frac{2\pi m}{2^n}$  con  $m$  impar, entonces  $R_n(z) = z$  y  $z$  es un punto periódico.
4. Si  $|z| = 1$  y el argumento no tiene la forma de (3) entonces  $z$  no es periódico, y se puede probar que de hecho la órbita positiva de  $z$  es densa en el círculo unitario (Fig. 6).

Observemos claramente una dicotomía.

1. Para los puntos donde  $|z| \neq 1$ , tenemos un comportamiento sencillo, dado que hay dos puntos atractores, 0 e  $\infty$ , cada uno con su región de atracción, los dos hemisferios.
2. En la frontera entre las dos regiones, el círculo unitario  $S^1$ , la función lo manda en sí mismo,  $R: S^1 \rightarrow S^1$  cubriéndolo dos veces. Si sacamos la derivada  $R'(z) = 2z$  y  $|R'(z)| = 2|z| = 2$ , así que  $R$  siempre está expandiendo infinitesimalmente a lo largo de  $S^1$  homogéneamente por un factor de 2.

Nos referiremos al primer conjunto como el *dominio de equicontinuidad* de  $R_n(z) = z^{2^n}$  y queda matemáticamente definido por  $E_R = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists \text{ vecindad } V_z, \{R^n|_V\} \text{ es "precompacta"}\}$ , y al complemento lo llamaremos el *conjunto límite* o *conjunto de Julia* de  $R(z)$ ,  $J_R$ .

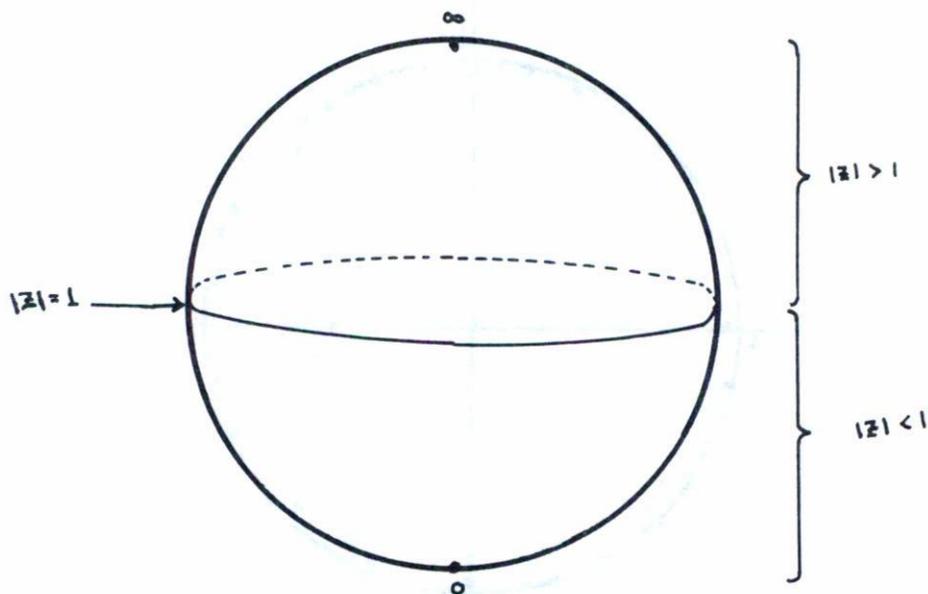


Fig. 6

Ahora analizaremos el comportamiento de  $R = z^2$  al tender  $n$  a menos infinito. Si  $n$  es positivo, definimos  $R_{-n}(z)$  como aquellos puntos tales que al iterar  $R$   $n$  veces toman el valor  $z$ :  $R_{-n}(z) = \{w \in \mathbb{C} \mid R_n(w) = z\}$ . Como  $R$  se cubre a sí mismo 2 veces, es sencillo de ver que si  $z$  es distinto de  $0$  e  $\infty$ ,  $R_{-n}(z)$  tiene  $2^n$  elementos y que éstos se están acumulando en el círculo unitario. Por ejemplo, en la Fig. 7 se muestra el caso en que  $z = \frac{1}{2}$ .

Podemos concluir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{-n}(z)$  es igual a:

1. Todo el círculo unitario, si  $z \neq 0, \infty$
2.  $0$  e  $\infty$  si  $z$  es  $0$  ó  $\infty$ , respectivamente.

De lo anterior podemos leer el comportamiento dependiendo de las condiciones iniciales, y con esto respondemos completamente la pregunta A de la segunda sección. Resumiendo, podemos decir que la dinámica

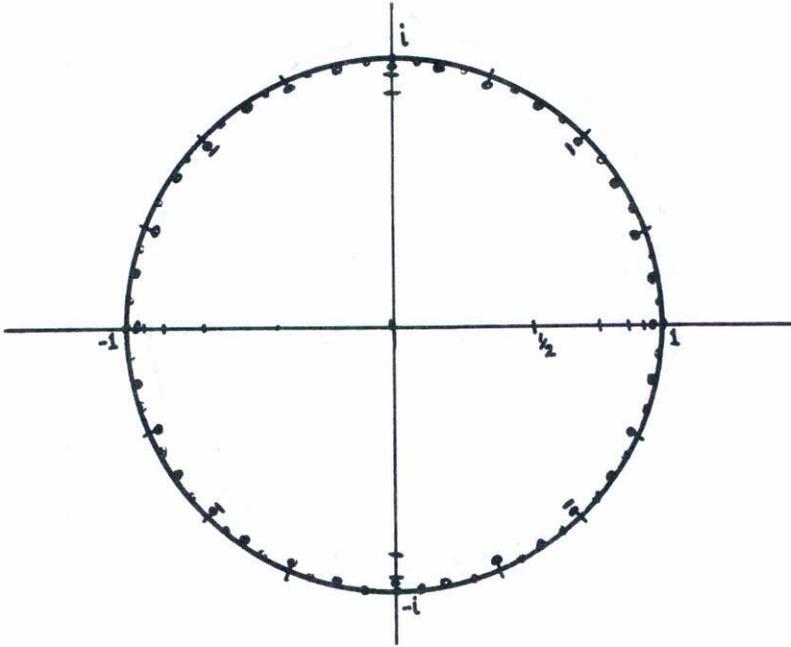


Fig. 7

de  $z^2$  nace en el círculo unitario y muere en los atractores 0 e  $\infty$ .

Ahora analizemos la pregunta B: ¿Qué le pasa a la dinámica si consideramos la función racional  $R_c(z) = z^2 + c$ ?

Para valores pequeños de  $c$ , se observa que  $R$  tiene dos puntos atractores cercanos a 0 e  $\infty$ , y que el dominio de atracción de cada uno de ellos se parece mucho a los dominios de atracción de 0 e  $\infty$ , y el conjunto que los separa es una curva cerrada simple cercana al círculo unitario, más no es rectificable (es lo que se denomina un fractal). Para  $c = -.3125$  obtenemos la gráfica mostrada en la Fig. 8.

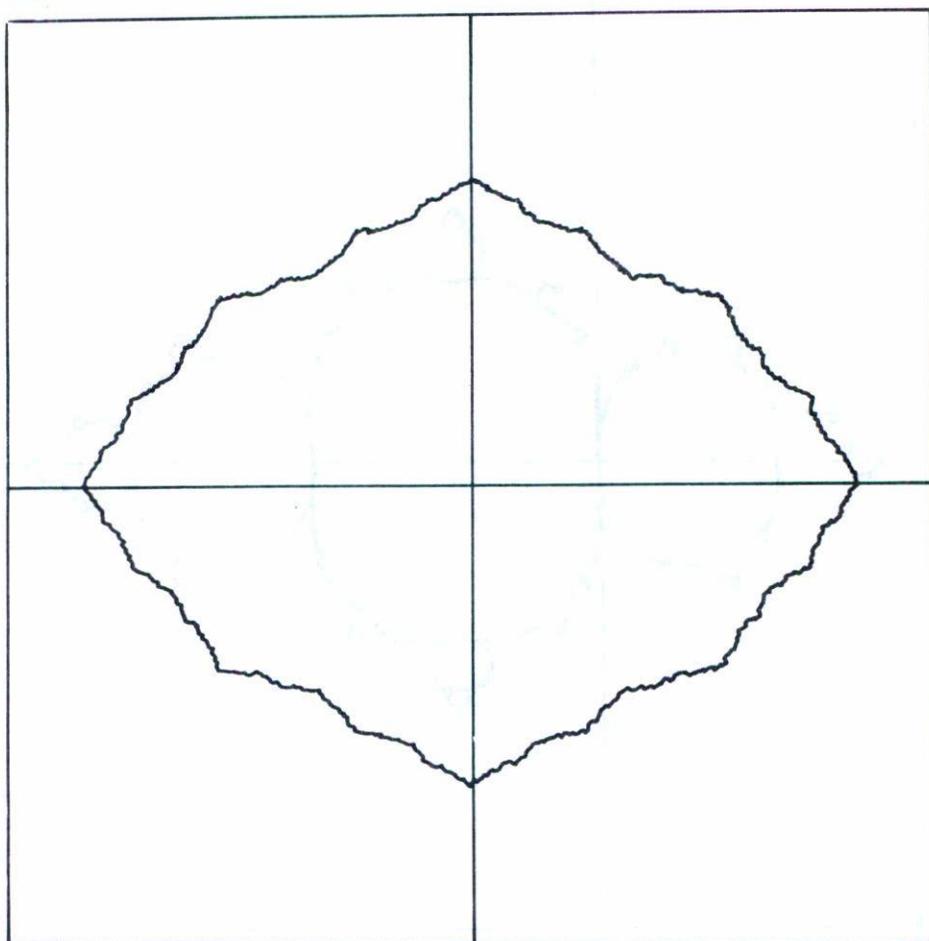


Fig. 8

Si seguimos variando  $c$  en el eje negativo real observamos que la dinámica es parecida hasta llegar al valor  $c = -\frac{3}{4}$ , donde la dinámica sufre un cambio cualitativo importante, una bifurcación (Fig. 9).

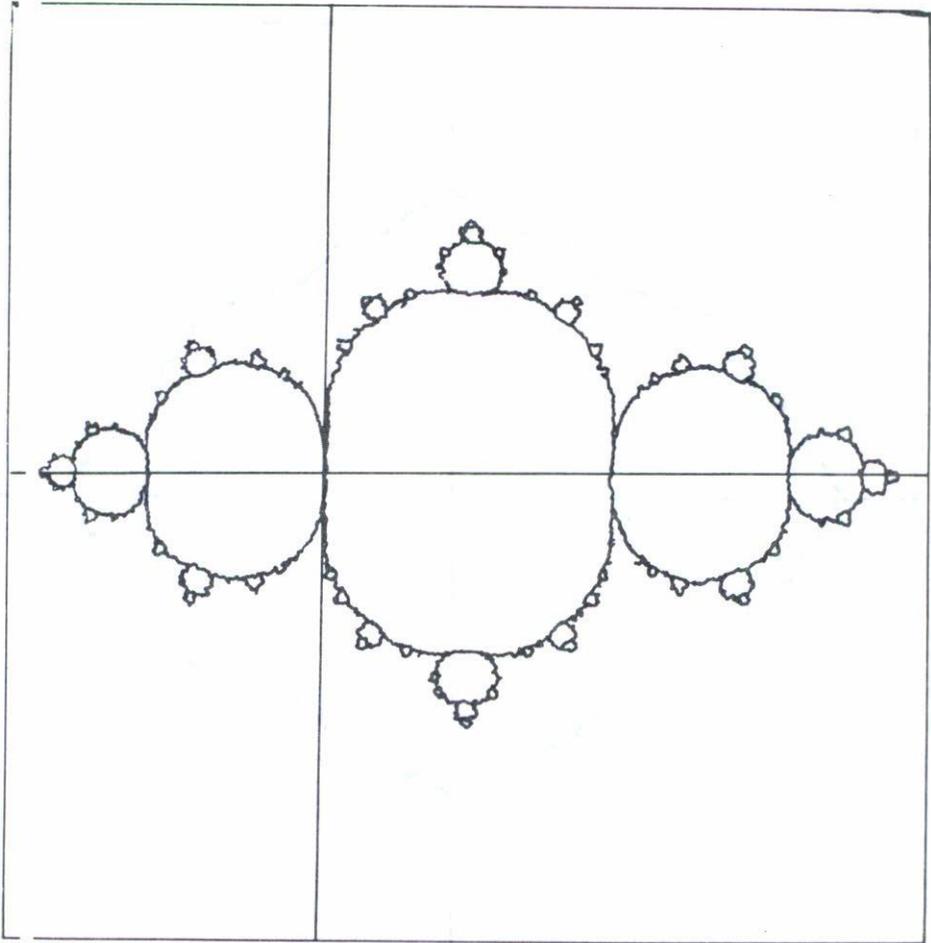


Fig. 9

El dominio de equicontinuidad no tiene ya dos componentes, sino una infinidad,  $R_c$  permuta estas componentes y eventualmente cualquiera termina en las dos centrales o en la componente no acotada. El conjunto de Julia es bastante complicado.

Si seguimos descendiendo con valores negativos, al pasar el valor crítico  $-\frac{3}{4}$  volvemos a entrar en una zona de estabilidad estructural,

pues cualitativamente la figura se ve como para  $c = -1$ , donde las dos componentes ensombrecidas se permutan (Fig. 10).

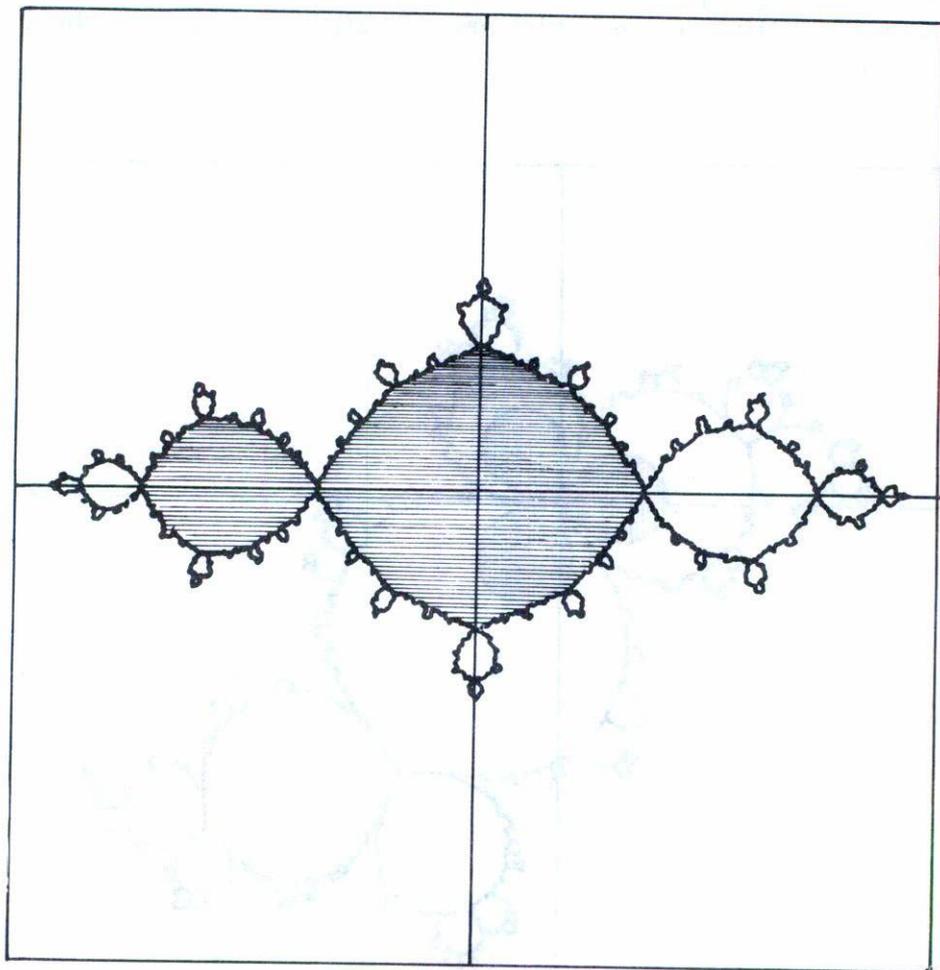


Fig. 10

El punto de bifurcación  $c = -\frac{3}{4}$  se denomina un doblamiento de periodo, dado que apareció esta nueva componente de periodo 2. Si continuamos a lo largo del eje real negativo, encontramos una sucesión infini-

ta de bifurcaciones con doblamiento de periodos, las denominadas bifurcaciones de Feigenbaum.

Ahora, si en vez de dejar el origen por el eje negativo nos vamos hacia  $c = \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{4}$ , donde  $\lambda = \sqrt[3]{1}$ , obtendremos que todo el camino la imagen es cualitativamente la misma que para  $z^2$ , hasta llegar al valor  $c$  (Fig. 11).

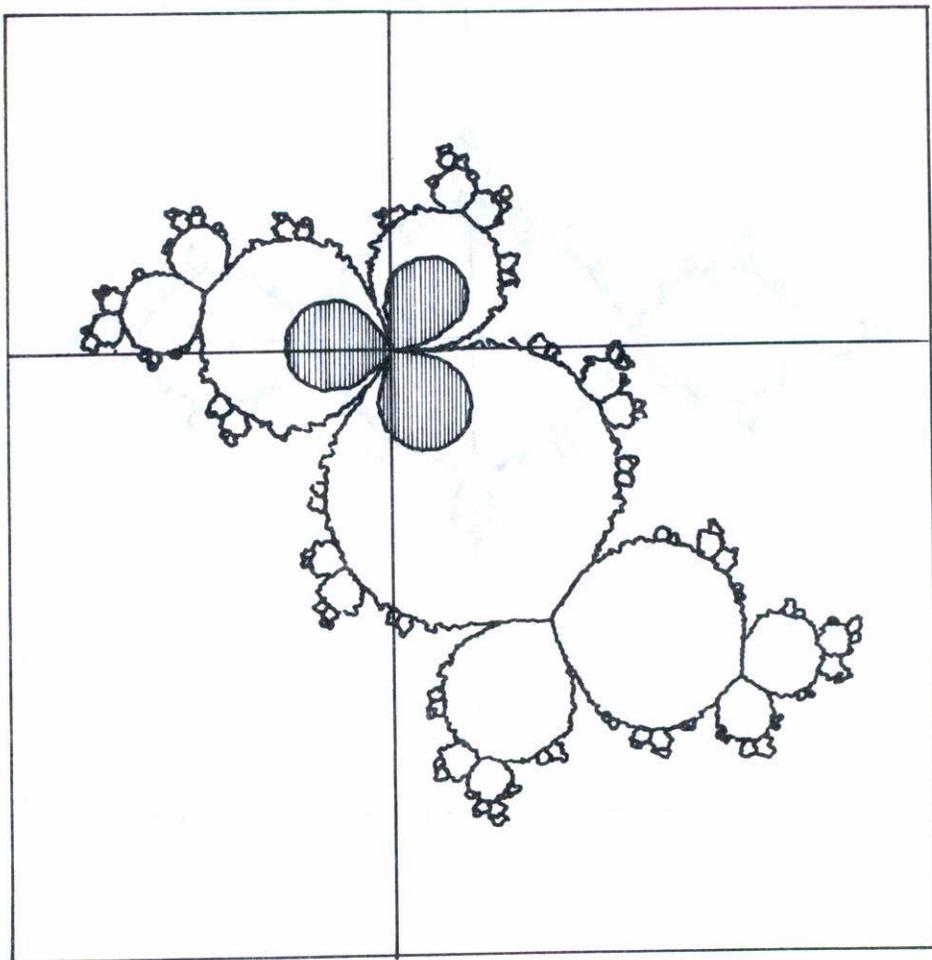


Fig. 11

Un poquito antes de llegar a  $c$ , en  $.9c$  la figura se ve como es mostrada en la Fig. 12.

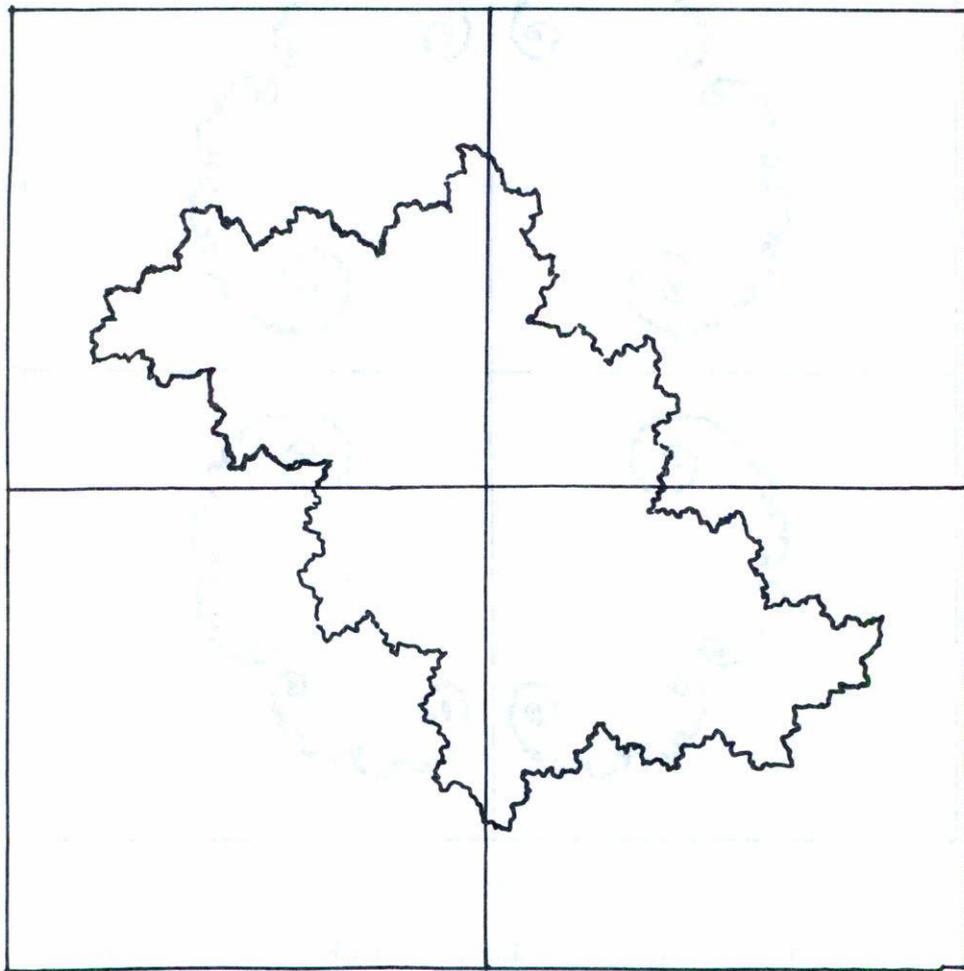


Fig. 12

Otros ejemplos son  $c = .3$ , donde el conjunto de Julia es un conjunto de Cantor en el plano, y solo hay un punto atractor en el  $\infty$  (Fig. 13).

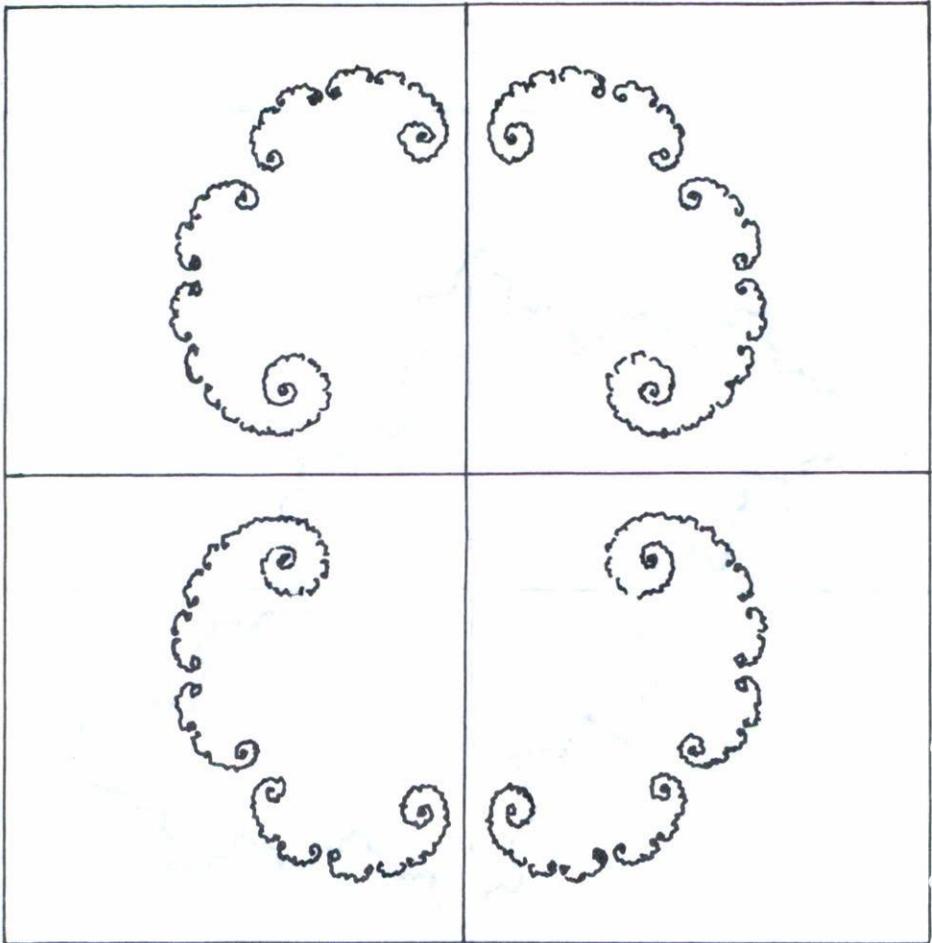


Fig. 13

Como se deduce de las gráficas, la dinámica de estos ejemplos está lejos de ser sencilla, y empezaría a verse la imposibilidad de tener teoremas generales para toda función racional; sin embargo, existen resultados generales que unifican todo este comportamiento.

## IV. LA TEORIA GENERAL

La teoría general de mapeos racionales fue empezada en 1918 con los trabajos de los matemáticos franceses Fatou<sup>(8)</sup> y Julia<sup>(9)</sup>, y ha recibido un nuevo impulso<sup>(10,11,12,13)</sup>. El primer resultado estructural es:

Teorema (Fatou-Julia-Sullivan): Sea  $R$  una función racional cualquiera. Entonces  $E_R$ , el dominio de equicontinuidad de  $R$ , es un subconjunto abierto de la esfera de Riemann, y

1. Toda componente conexa de  $E$  es eventualmente periódica (Fig. 14).

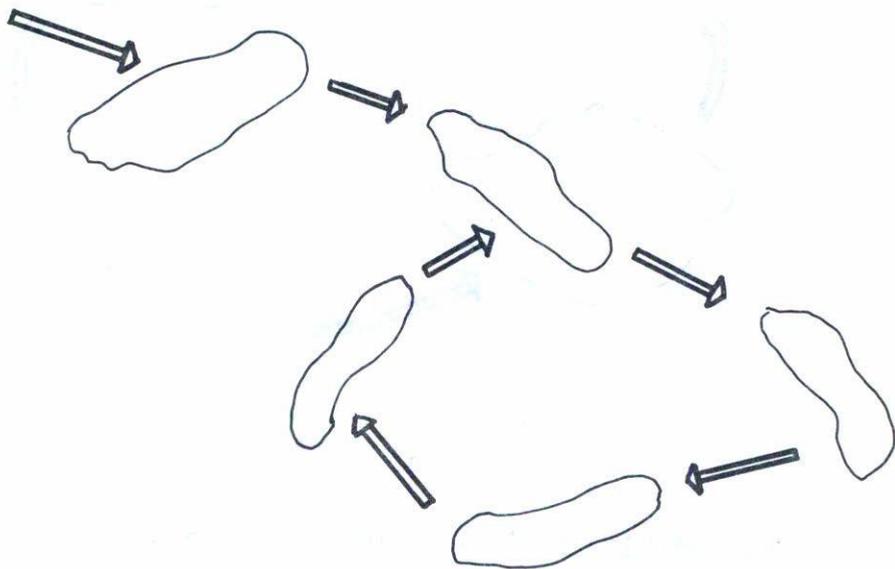


Fig. 14

2. El número de componentes periódicas es finito, y si  $n$  es el periodo de la componente  $D$ , sea  $S = R_n$  la función racional obtenida al iterar  $R$   $n$ -veces con  $D$  componente fija, entonces:

- a) Si  $D$  contiene un punto periódico atractor  $p$  de  $R$ , la dinámica es cualitativamente  $S'(p) \neq 0$ ,  $D$  se denomina un *dominio atractor* (Fig. 15).

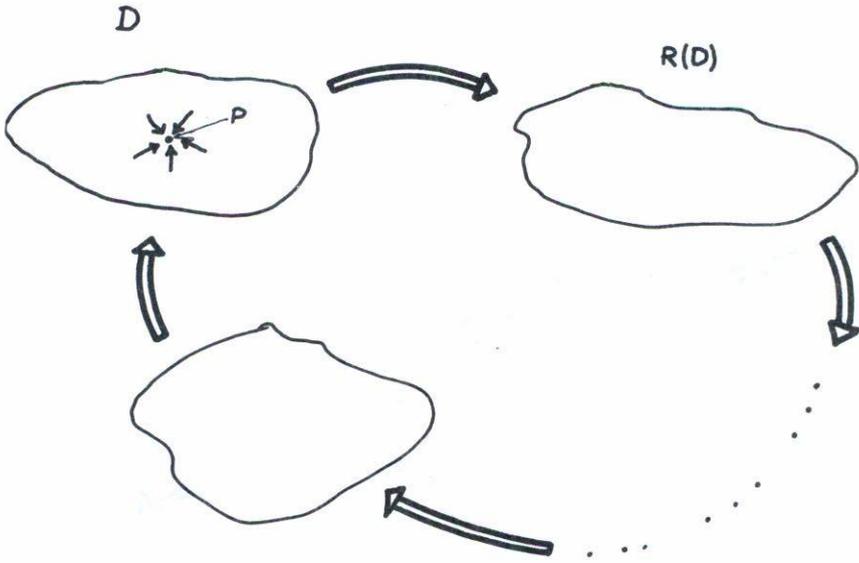


Fig. 15

- b) Dominio Superatractor: Igual que a), pero  $S'(p) = 0$ .
- c) Dominio parabólico: Existe un punto *periódico*  $p$  en la frontera de  $D$  cuyo periodo divide a  $n$ ,  $|S'(p)| = 1$ ,  $S_n(z)$  tiende a  $p$  al tender  $n$  a infinito para todo punto  $z$  de  $D$ .
- d) Disco de Siegel:  $D$  es topológicamente un disco y  $S:D \rightarrow D$  es analíticamente conjugado a una rotación con ángulo irracional.
- e) Anillo de Herman:  $D$  es topológicamente un anillo y  $S:D \rightarrow D$  es analíticamente conjugado a una rotación.

Este teorema da una idea muy clara y precisa del comportamiento

dinámico en el dominio de discontinuidad. Afirma que a final de cuentas toda la acción se lleva a cabo en un número finito de componentes donde la dinámica es bien conocida.

Del conjunto de Julia se conoce<sup>(14)</sup>:

- 1)  $R: J_R \rightarrow J_R$  es topológicamente transitivo, es decir, para cualquier punto  $z$  de  $J$  la órbita positiva y negativa de  $z$  es denso en  $J_R$
- 2) El conjunto de puntos periódicos repulsores,  $R_n(z) = z$  y  $|R'_n(z)| > 1$ , es denso en  $J_R$
- 3)  $J$  es no vacío y no tiene puntos aislados
- 4) Decimos que  $R|_{J_R}$  es hiperbólico si existe un entero  $N$  tal que  $|R'_N(z)| > 1$  para toda  $z$  en  $J_R$ . Si es así, entonces:
  - a)  $R|_{J_R}$  es  $J$ -estable, es decir, todo mapeo racional cercano a  $R$  tiene una dinámica conjugada a  $R|_{J_R}$  al restringirlo a su conjunto de Julia.
  - b) Existe una medida invariante en  $J_R$  con la cual  $R$  es ergódico en el sentido de que si  $A = R^{-1}(A) \cap J_R$ , entonces la medida de  $A$  es 0 o total. Además, podemos representar a  $R|_{J_R}$  a través de dinámica simbólica.

#### V. PROPIEDADES GENERICAS DE MAPEOS ESTRUCTURALMENTE ESTABLES

El siguiente teorema debido a Mañé, Sad, Sullivan y Thurston<sup>(10,12)</sup> nos da la estabilidad estructural de los mapeos estructuralmente estables:

*Teorema:* El conjunto de mapeos racionales estructuralmente estables en  $\text{Rac}_d$  es abierto y denso.

No es difícil ver que toda función racional de grado 2, después de un cambio holomorfo de coordenadas en todo  $\mathbb{C}$  se puede escribir en la forma  $z+c$  para una constante  $c$ . Si pintamos en el plano complejo  $\mathbb{C}$  aquellos puntos que representan funciones estructuralmente estables obtenemos un conjunto abierto y denso. El conjunto de Mandelbrot<sup>(15)</sup> consiste en pintar todo el plano menos la componente no acotada de los estructuralmente estables (Fig. 16).

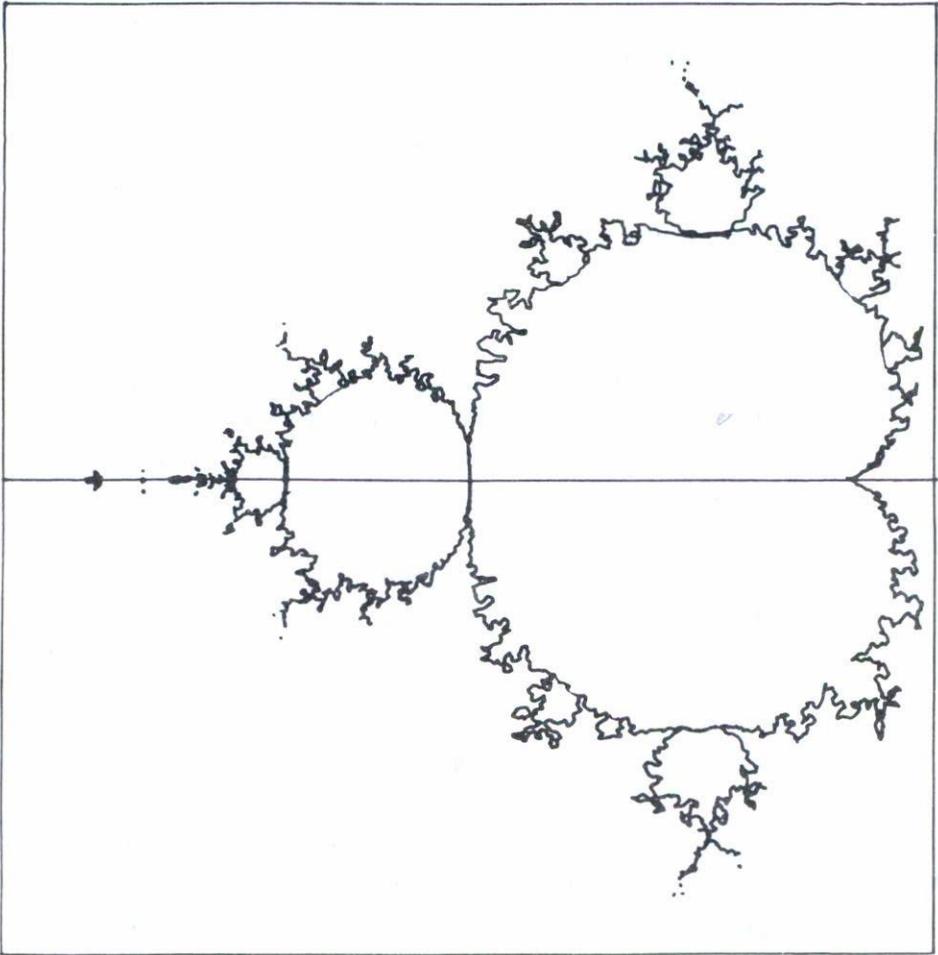


Fig. 16

En esta figura el cuerpo central da la componente de estabilidad de  $z^2 + c$ , y nos da una idea de cómo nos vamos bifurcando al pasar por distintos mapeos racionales de la forma  $z^2 + c$ . Se puede observar que las componentes de estabilidad estructural se acumulan y esto da origen a familias a 1-parámetro de sistemas dinámicos que sufren una infinidad de bifurcaciones en un tiempo finito. Este tipo de bifurcaciones da origen a comportamientos caóticos.

Para concluir, podemos decir que tenemos un cuadro bastante preciso de las preguntas A y B de la segunda sección. Este cuadro deja mucho de ser trivial y es un buen lugar para probar y enunciar conjeturas sobre el comportamiento general de los sistemas dinámicos.

También cabe mencionar que estas investigaciones se están aplicando a la teoría de algoritmos<sup>(16)</sup>, a través del método de Newton.

#### REFERENCIAS

1. H. Poincaré, *Les Methodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Paris, 1892-99
2. A. Andronov, L. Pontrjagin, "Comptes Rendus" (Doklady), Acc. Sc. USSR, Vol. 14, 1937.
3. M. Peixoto, *Structural Stability on Two Dimensional Manifolds*, *Topology* 1, 1962, pp. 101-120.
4. S. Smale, "Differentiable Dynamical Systems", *Bull. of A.M.S.*, No. 73, 1967.
5. J. Sotomayor, "Generic one Parameter Families of Vector Fields on Two Dimensional Manifolds", *Publ. IHES*, No. 43, 1973.
6. Z. Nitecki, *Differentiable Dynamics*, MIT Press, 1971.
7. L. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1979.
8. P. Fatou, *Sur les equations fonctionnelles*, *Bull. Soc. Math. France* 47 (1919), 161-271; 48 (1920) 33-94, 208-314.
9. G. Julia, *Memoire sur l'iteration des fonctions rationnelles*, *J. Math.* Vol. 8, (1918) pp. 47-245.
10. R. Mañé, P. Sad, D. Sullivan, On the Dynamics of Rational Maps (Preprint).
11. D. Sullivan, Quasiconformal Homeomorphisms and Dynamics I, II, III, (Preprint).
12. D. Sullivan, W. Thurston, Extending Holomorphic Motions, (Preprint).
13. W. Thurston, *Lectures Notes*, CBMS Conf., Univ. of Minnesota.
14. H. Brolin, Invariant Sets under Iteration of Rational Functions, *Ark. Mat.*, Vol. 6, (1966) pp. 103-144.
15. P. Blanchard, Complex Analytic Dynamics on the Riemann Sphere, *Bulletin of the A.M.S.*, 11 (1984) pp. 85-141.
16. S. Smale, The Fundamental Theorem of Algebra and Complexity Theory, *Bull. of A.M.S.*, 1981, pp. 1-36.
17. A. Dovady, Systems Dynamics Holomorphes, *Seminaire Bourbaki*, 1982/83, No. 599.
18. A. Dovady, J. Hubbard, Iteration des polynomes quadratiques complexes, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 294 (1982) pp. 123-126.