Revista Mexicana de Física 32 No. 1 (1985) 169-173

SOBRE LA PROPAGACION DEL ERROR EN LAS MEDICIONES INDIRECTAS

Carlos Delfino Galles

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Mar del Plata

(recibido enero 3, 1985; aceptado junio 19, 1985)

RESUMEN

El error con que está afectada una medición indirecta es determinado de una forma muy simple y didáctica, sin involucrar el uso de derivadas parciales.

ABSTRACT

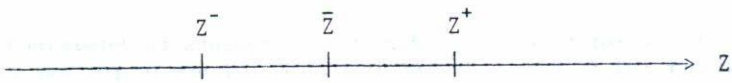
The error affecting indirect measurements is determined in a simple didactical fashion, without involving the use of partial derivatives.

En el primer año de estudios universitarios se intenta que el estudiante de física tome contacto con la realidad del método científico por medio de trabajos experimentales que no se limiten a la observación del fenómeno sino que incluyan la medición de las magnitudes inherentes al mismo. De esta forma pronto se plantea el problema de determinar con qué error está afectado el resultado de un cálculo realizado sobre la base de cantidades obtenidas por medición directa. Dado que los estudiantes no poseen aún un adecuado conocimiento del análisis matemático, la dificultad es superada generalmente imponiendo reglas prefijadas que prescriben cómo se propagan los errores en las diferentes operaciones elementales. Es evidente que esta solución dista de ser la ideal y contribuye en mucho a que la teoría de errores parezca, a quien se enfrenta con ella por primera vez, una colección de recetas sin conformar un verdadero cuerpo de teoría.

El propósito de esta nota es el de presentar una forma más satisfactoria -y de inmediata comprensión- de determinar el error con que está afectada una medición indirecta. Esta forma se considera especialmente indicada para las primeras etapas de la enseñanza de la física a nivel universitario.

Consideremos la función $Z(x,y)$ que suministra el valor de la magnitud Z en función de las variables x e y, cuyos valores medios $\bar{x}$ e $\bar{y}$ son conocidos por medición directa junto con los respectivos errores de medición Δx y Δy(1). Generalmente por simple inspección de la fórmula $Z(x,y)$ es muy fácil determinar el valor máximo y el valor mínimo que toma Z en el intervalo de indeterminación de x e y; llamaremos a estos valores Z^+ y Z^-, respectivamente. A este respecto y para mayor claridad se ruega ver el ejemplo al final de esta nota.

Es evidente que el valor promedio de la medición indirecta está en el centro del intervalo definido por los valores Z^- y Z^+, tal como se indica en el siguiente diagrama:



Resultado cuya versión algebraica es

$$\overline{Z} = \frac{1}{2}\,(Z^{+} + Z^{-}) \quad . \tag{1}$$

Por su parte, el error de la medición indirecta está dado por el entorno de $\overline{Z}$ tal que abarque al intervalo de indeterminación. Vale decir,

$$\Delta Z = \frac{1}{2}\,(Z^{+} - Z^{-}) \quad . \tag{2}$$

Esta fórmula, que puede ser interpretada como una definición operativa del error, es aceptada con facilidad por los estudiantes quienes con rapidez aprenden a utilizarla. El sencillo modelo matemático que presentamos permite dar respuesta a las interrogantes más comunes que surgen al hacer consideraciones sobre el error con que está afectada una medición indirecta. La extensión de estas ideas a más de dos variables es inmediata.

Cuando el estudiante ya ha aprendido algunos rudimentos del análisis matemático se le puede presentar una "prueba" convincente del valor general de la fórmula (2). Usando el desarrollo en serie de Taylor, y considerando sólo términos de primer orden, se puede escribir la expresión,

$$Z^{\pm} = Z(\overline{x},\overline{y}) \pm \left|\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}}\right| \Delta x \pm \left|\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}}\right| \Delta y \quad , \tag{3}$$

de donde, sustituyendo en (2) se obtiene la expresión

$$\Delta Z = \left|\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}}\right| \Delta x + \left|\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}}\right| \Delta y \quad , \tag{4}$$

que coincide con la bien conocida fórmula que da la propagación del error, y que es utilizada en la práctica cotidiana de laboratorio para estimar cuáles son las variables que más contribuyen al error que se asigna finalmente a la magnitud deseada. Es de señalar que para el mero cálculo del error la fórmula (2) conduce a operaciones más sencillas que las que resultan del uso de (4), dado que este último caso implica la evaluación de derivadas. Además es necesario recalcar que en muchos casos es posible, sin aplicar análisis y dependiendo esta posibilidad de la forma que tenga la función $Z(x,y)$, determinar los factores de propagación con el método elemental que se ha presentado (fórmula 2), con sólo agregar algunas manipulaciones algebraicas, tal como se muestra en la parte final del ejemplo que acompaña esta nota.

Ejemplo

Consideremos el caso de la medición de la aceleración de la gravedad con un péndulo. La fórmula en cuestión es

$$g = 4\pi^2 \frac{\ell}{T^2} \quad ,$$

donde ℓ es la longitud del hilo y T el período de oscilación.

Supongamos que por medición directa son conocidos

$$\ell = \overline{\ell} \pm \Delta\ell \quad ,$$

$$T = \overline{T} \pm \Delta T \quad .$$

En estas condiciones, y sin considerar la incertidumbre en π, se tienen los siguientes valores extremos de g:

$$g^{\pm} = 4\pi^2 \frac{\overline{\ell} \pm \Delta\ell}{(\overline{T} \mp \Delta T)^2}$$

De acuerdo con la fórmula (2) se obtiene para el error en la medición de la gravedad la siguiente expresión:

$$\Delta g = 2\pi^2 \left[\frac{\overline{\ell} + \Delta\ell}{(\overline{T} - \Delta T)^2} - \frac{\overline{\ell} - \Delta\ell}{(\overline{T} + \Delta T)^2}\right]$$

la cual es, por supuesto, suficiente para el cálculo del error en el valor de g.

Es de acotar que un poco de álgebra simple permite, considerando sólo términos de primer grado en los errores, hacer la aproximación que se da a continuación:

$$\Delta g \cong 2\pi^2 \left[\frac{\bar{\ell} + \Delta\ell}{\bar{T}^2 - 2\bar{T}\,\Delta T} - \frac{\bar{\ell} - \Delta\ell}{\bar{T}^2 + 2\bar{T}\Delta T}\right]$$

$$\cong \frac{2\pi^2}{\bar{T}^2}\left[(\bar{\ell} + \Delta\ell)\left(1 + 2\,\frac{\Delta T}{\bar{T}}\right) - (\bar{\ell} - \Delta\ell)\left(1 - 2\,\frac{\Delta T}{\bar{T}}\right)\right]$$

$$\cong 4\pi^2\left[\frac{\Delta\ell}{\bar{T}^2} + 2\bar{\ell}\,\frac{\Delta T}{\bar{T}^3}\right] \quad .$$

Este resultado coincide, como el lector puede comprobar, con el que se logra por aplicación de la clásica fórmula (4), pero que es obtenido en el cálculo precedente sin hacer uso de derivadas parciales.

REFERENCIAS

1. Se consideran conocidos los elementos de la teoría de los errores. Véase por ejemplo:
Maiztegui, Gleiser, *Introducción a las mediciones de laboratorio*, Edición Guayqui, Córdoba (1976); Giamberardino, *Teoría de los Errores*. Editorial Reverté Venezolana, 1982.