Revista Mexicana de Física 32 No. 3 (1986) 455-473

INTEGRACION DEL CUADRIVECTOR MOMENTO ASOCIADO AL FOTON EN EL BREMSSTRAHLUNG DEL DECAIMIENTO SEMILEPTONICO DEBIL

S. Rebeca Juárez W.

Escuela Superior de Física y Matemáticas del
Instituto Politécnico Nacional
Apartado Postal 75-702, C.P. 07738,
México 14, D.F., México

(recibido febrero 3, 1986; aceptado julio 1, 1986)

RESUMEN

Contrariamente a lo que generalmente se espera, se demuestra que sí es posible integrar las variables asociadas al fotón, antes de llevarse a cabo la evaluación de las trazas correspondientes a la razón de transición en el bremsstrahlung de un proceso semileptónico débil de un hiperón cargado. El expresar el resultado en términos de una superposición de covariantes de Lorentz, permite una factorización reduciendo a un mínimo el número de trazas. Este procedimiento conduce a un ahorro considerable de esfuerzo en este tipo de cálculos.

ABSTRACT

Contrary to what is usually expected, it is shown that it is possible to integrate the variables associated to the photon prior to the evaluation of the traces of the rate of transition, for the bremsstrahlung of a charged hyperon semileptonic decay process. Expressing the results in covariant terms, allows us to factorize and reduce to a minimum the amount of traces. This procedure leads to a substancial reduction of the algebraic work in this type of calculations.

INTRODUCCION

En este artículo se describe cualitativamente el procedimiento de integración para las diferentes formas en las que el cuadrimomento fotónico se presenta, en el bremsstrahlung del decaimiento β de un hiperón cargado; considerando conocida la estructura de la amplitud del decaimiento radiativo, cuando hay emisión de un solo fotón real[1].

En términos de Δk, máxima energía permitida para el fotón y m_1, masa del hiperón que decae, el orden de aproximación que se considera es $\alpha\Delta k/m_1$, donde α es la constante de estructura fina. Esta aproximación y esta forma de integración son útiles para la obtención de nueva información del mismo orden y complementaria a la considerada en la evaluación del espectro de energía β en el decaimiento de un hiperón Σ con producción de fotones suaves[2], en donde se toma también en cuenta la transferencia de momento q a primer orden.

En la Sección 1 se hace un análisis de la razón de decaimiento, usando la forma explícita de la amplitud de éste y el espacio fase que le corresponde, para obtener las diferentes combinaciones, que contribuyen al orden requerido. En la Sección 2 se procede a la integración de las diversas formas, en las que el cuadrimomento asociado al fotón se manifiesta dentro de las trazas sin evaluar éstas explícitamente y se expresan los resultados en términos de los covariantes del proceso. Las conclusiones se presentan en la Sección 3.

1. RAZON DEL DECAIMIENTO

Con el propósito de ilustrar el procedimiento de integración se aplica éste a un caso particular, un proceso semileptónico débil, en el que se selecciona el hiperón Σ^-, cargado negativamente y con masa m_1, que decae en cuatro partículas:

$$\Sigma^-(p_1) \rightarrow n(p_2) + e^-(\ell) + \bar{\nu}(p_\nu) + \gamma(k) \quad . \tag{1}$$

En este proceso las partículas que se producen son un neutrón, un electrón, un antineutrino y un fotón. En adelante m_1, E_2, E, E_ν y k_0 deno tarán a la componente energética de los cuadrivectores momento p_1, p_2, 1, p_ν y k asociados a estas partículas. Unicamente el fotón tiene espín uno y su vector de polarización es ε_μ, las demás partículas tienen espín $\frac{1}{2}$.

La razón de decaimiento Γ_B para el proceso, también conocida como anchura del decaimiento o inverso de la vida media de la partícula que decae, es medible experimentalmente y está definida como el producto del cuadrado de la amplitud de transición (sumada y promediada sobre espines y polarización) por el espacio fase invariante de Lorentz (LIPS) correspondiente.

La Γ_B está dada por la siguiente expresión:

$$\Gamma_B = \frac{1}{2m_1}\int \frac{1}{2}\sum_{S,P}|M_B|^2 dLIPS(m_1{}^2, p_2, p_\nu, \ell, k) \quad , \tag{2}$$

donde M_B es la amplitud de transición y el espacio fase está definido por

$$dLIPS(s; p_1, \ldots p_n) = (2\pi)^4\delta^4(p - \Sigma p_i)\,\frac{1}{2\pi^{3n}}\prod_{i=1}^{n}\frac{d^3\vec{p}_i}{2E_i} \quad , \tag{3}$$

para un sistema de n partículas; siendo s la energía en el sistema C.M. (variable de Mandelstam).

A continuación se caracteriza brevemente a la amplitud de transición y al espacio fase correspondiente.

Amplitud de Transición

De acuerdo al teorema de Low[(3)], la amplitud M_B para el proceso de decaimiento débil que involucra la emisión de un solo fotón real, puede ser obtenida a partir del elemento de matriz M_0 correspondiente al mismo proceso sin decaimiento radiativo y depende de los momentos magnéticos de los hadrones involucrados; esto, a pesar de las complicaciones de las interacciones fuertes (aún no bien entendidas) que actúan entre los hadrones.

Tomando como característica la dependencia en la estructura de los hadrones[(4)] es posible separar esta amplitud en dos partes, una indepen diente y otra dependiente de ella. A su vez, la parte independiente de estructura, se separa en dos términos, uno proporcional a 1/k y el otro a k_0/E, así pues,

$$M_B = [1] + [2] + [3] \quad . \tag{4}$$

La parte independiente de estructura está dada por

$$[1] = e \frac{G_V}{\sqrt{2}} \varepsilon_\mu M_0 \left(\frac{\ell^\mu}{\ell \cdot k} - \frac{p_1{}^\mu}{p_1 \cdot k} \right) \tag{5}$$

y

$$[2] = e \frac{G_V}{\sqrt{2}} \varepsilon_\mu H_\lambda \bar{u}_e \frac{\gamma^\mu \not{k}}{2\ell \cdot k} O_\lambda v_\nu \quad . \tag{6}$$

La parte dependiente de estructura:

$$[3] = e \frac{G_V}{\sqrt{2}} \varepsilon_\mu \bar{u}_n \frac{T^{\mu\lambda}}{m_1} (k)\, u_\Sigma L_\lambda + \ldots \tag{7}$$

En las expresiones anteriores, G_V es la constante de acoplamiento vectorial débil, M_0 la amplitud de transición sin emisión radiativa, la cual en la teoría V-A está dada por el producto covariante de las corrientes leptónica L y hadrónica H definidas a continuación:

$$M_0 = L_\lambda H^\lambda \quad , \tag{8}$$

donde

$$L_\lambda = \bar{u}_e O_\lambda v_\nu \qquad \text{con} \qquad O_\lambda = \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) \quad , \tag{9}$$

$$H_\lambda = \bar{u}_n W_\lambda u_\Sigma \qquad \text{con} \qquad W_\lambda = \hat{f}_1\gamma_\lambda + \hat{f}_2\sigma_{\lambda\nu}\frac{q_\nu}{m_1} + \hat{f}_3\frac{q_\lambda}{m_1} \quad , \tag{10}$$

los factores f_i que multiplican a los covariantes de Lorentz se componen de una parte escalar y una pseudoescalar, de la siguiente manera:

$$\hat{f}_i = f_i(1 + \rho_{f_i}\,\gamma_5) \qquad \text{donde} \qquad f_i\,\rho_{f_i} = g_i \quad , \tag{11}$$

f_i y g_i son conocidas como los factores de forma de Dirac[5] y u_e, u_n, u_Σ, v_ν son los espinores de Dirac asociados a las funciones de onda de las partículas.

$T_{\mu\lambda}$ contiene información sobre las cargas y los momentos magnéticos de los hadrones. La relación funcional con las diferentes formas de k está dada en términos de las siguientes componentes del tensor $T_{\mu\lambda}$:

$$T_{\mu\lambda}(k) = T\left[\frac{p_{1\mu}\,k_\lambda}{p_1\cdot k}\,,\ \frac{W_\lambda\,\not{k}\gamma_\mu}{k_0}\,,\ \frac{p_{1\mu}\,W_\lambda\,\not{k}}{p_1\cdot k}\right] \quad . \tag{12}$$

Las matrices de Dirac γ_λ así como el conmutador $\sigma_{\mu\lambda}$ están en la representación de la referencia (6) al igual que γ_5 y $g_{\mu\nu}$; $k = k$.

Es conveniente recordar ahora una de las propiedades de estos espinores al ser sumados sobre todas las posibilidades de espín:

$$\sum_s u_\Sigma(p_1)\bar{u}_\Sigma(p_1) = (\not{p}_1 + m_1) \quad , \tag{13}$$

ya que esta propiedad será usada posteriormente.

Como se mencionó en la introducción, vamos a restringir los cálculos despreciando términos que contribuyan a un orden superior en $\alpha\Delta k/m_1$ Los puntos suspensivos en la Ec. (7) indican la existencia de este tipo de términos.

Espacio fase invariante de Lorentz

Para el caso de cuatro cuerpos, este espacio de fase-invariante de Lorentz está definido por

$$\mathrm{dLIPS} = (2\pi)^4\delta^4(p_1 - p_2 - \ell - p_\nu - k)\,\frac{1}{(2\pi)^{12}}\,\frac{d^3p_2}{2E_2}\,\frac{d^3p_\nu}{2E_\nu}\,\frac{d^3\ell}{2E}\,\frac{d^3k}{2k_0} \quad . \tag{14}$$

Para obtener el espectro de energía del electrón saliente, se integra respecto a las variables asociadas al neutrón, neutrino y fotón. Para integrar respecto a la variable del neutrón se considera la siguiente relación:

$$\frac{d^3p_2}{2E_2} = \int_{-\infty}^{\infty} d^4p_2\,\delta(p_2{}^2 - m_2{}^2)\,\theta(E_2) \qquad ; \tag{15}$$

en la que $\theta(E_2)$ es la función escalón o de Heaviside, definida como sigue:

$$\theta(E_2) = \begin{cases} 1 \ , & E_2 > 0 \\ 0 \ , & E_2 < 0 \end{cases} \qquad . \tag{16}$$

La delta de Dirac que modula al espacio fase, selecciona sólo procesos en los que se conserva la energía y el momento lineal, es decir aquellas situaciones en las que

$$p_2 = p_1 - \ell - p_\nu - k \qquad , \tag{17}$$

así que la relación

$$\delta(p_2{}^2 - m_2{}^2) = \delta\big((p_1 - \ell - p_\nu - k)^2 - m_2{}^2\big) \qquad . \tag{18}$$

a su vez, selecciona sólo ciertas energías para el neutrino, que cumplen con la ecuación

$$(p_1 - \ell - p_\nu - k)^2 = m_2{}^2 \qquad , \tag{19}$$

de donde

$$E_\nu = \left[E_m - E - k_0 - \frac{\ell \cdot k}{m_1}\right] \Big/ \left[1 - \frac{(E + k_0)}{m_1} + \frac{\hat{p}_\nu \cdot \vec{\ell}}{m_1} + \frac{\hat{p}_\nu \cdot \vec{k}}{m_1}\right] \quad , \tag{20}$$

siendo E_m la energía máxima del electrón:

$$E_B = (m_1{}^2 - m_2{}^2 + m^2)/2M \ ,$$

$\hat{p}_\nu$ es el trivector unitario que determina la dirección del movimiento del neutrino, $\vec{l}$ y $\vec{k}$ son los trivectores momento lineal del electrón y del fotón respectivamente.

Para efectos de la integración sobre la energía del neutrino, se considera la relación

$$\frac{d^3p_\nu}{2E_\nu} = \frac{1}{2}\, E_\nu \; dE_\nu \; d\Omega_\nu \qquad , \tag{21}$$

y además se aprovecha la siguiente propiedad:

$$\int dx \; \delta\big(f(x)\big) \;\; = 1/ \left|\frac{df(x)}{dx}\right| \qquad . \tag{22}$$

La $d\Gamma_B$ integrada respecto a d^3p_2 y dE_ν resulta

$$d\Gamma_B = \frac{(E_m - E - k_0 + \ell\cdot k/m_1)^2 d\Omega_\nu d^3\ell}{(2\pi)^8 2^5 m_1{}^2 E\left[1 - \dfrac{(E + k_0)}{m_1} + \hat{p}_\nu \cdot \dfrac{\vec{\ell}}{m_1} + \hat{p}_\nu \cdot \dfrac{\vec{k}}{m_1}\right]^3} \; \frac{d^3k}{k_0} \left[\frac{1}{2}\sum_{S,P} \frac{|M_B|^2}{E_\nu}\right] \tag{23}$$

Como se puede apreciar, el espacio fase parcialmente integrado PS puede expresarse como una serie de potencias de k_0/m_1, de la siguiente manera:

$$(PS) = \left[(PS)_0 + \frac{k_0}{m_1}(PS)_1 + \dots\right] k_0 dk_0 d\Omega_k \quad , \tag{24}$$

con

$$(PS)_0 = (E_m - E - k_0)^2 / \left(1 - \frac{E}{m_1} \quad \frac{\hat{p}_\nu \cdot \vec{\ell}}{m_1}\right)^3 \tag{25}$$

y

$$(PS)_1 = \frac{(E_m - E - k_0)}{\left(1 - \frac{E}{m_1} + \hat{p}_\nu \cdot \frac{\vec{\ell}}{m_1}\right)^3} \left[2E(1 - \beta x) + \frac{3(1 - z)(E_m - E - k_0)}{\left(1 - \frac{E}{m_1} + \frac{\hat{p}_\nu \cdot \vec{\ell}}{m_1}\right.}\right] . \tag{26}$$

Al escribir estas expresiones se han usado las siguientes definiciones para los cosenos x, y, z de los ángulos involucrados:

$$\begin{aligned} &\ell \cdot k = Ek_0(1 - \beta x) \quad , \qquad \beta = |\vec{\ell}|/E \\ &\hat{p}_\nu \cdot \frac{\vec{\ell}}{m_1} = \frac{E\beta}{m_1}\, y \quad , \\ &\hat{p}_\nu \cdot \frac{\vec{k}}{m_1} = \frac{k_0}{m_1}\, z \quad . \end{aligned} \tag{27}$$

Ahora es posible explicitar la dependencia en k_0/m_1 del espacio fase:

$$d\Gamma_B = \frac{\left((PS)_0 + \frac{k_0}{m_1}(PS)_1\right)}{(2\pi)^8 2^5 m_1{}^2\, E} d\Omega_\nu d^3\ell k_0 dk_0 d\Omega_k \left[\frac{1}{2} \sum_{S,P} \frac{|M_B|^2}{E_\nu}\right] . \tag{28}$$

A continuación se seleccionan los términos que contribuyen al orden que interesa y se procede a su evaluación; para ello es necesario tener en forma explícita la dependencia en k del cuadrado de la amplitud $|M_B|^2$. Este cuadrado se obtiene multiplicando M_B por su adjunto, esto es,

$$\sum_{S,P} |M_B|^2 = \sum_{S,P} |M_B|^2_I + \sum_{S,P} |M_B|^2_S + \sum_{S,P} |M_B|^2_A \quad , \tag{29a}$$

donde

$$\sum_{S,P} |M_B|^2_I = \sum_{S,P} |[1] + [2]|^2 \tag{29b}$$

independiente de estructura, y

$$\sum_{S,P} |M_B|^2_S = \sum_{S,P} ([1]\,[3]^+ + \text{h.c.}) \tag{29c}$$

dependiente de estructura y $\sum_{S,P} |M_B|^2_A$ contiene todos los términos adicionales.

Para la determinación de la dependencia en el orden de k, se considera, como ejemplo, la contribución del término $[1][1]^+$.

La suma sobre polarización y espines da lugar a

$$\sum_{S,P} [1]^+\,[1] = \frac{e^2\,G_V^{\,2}}{2}\, f(1/k^2) \sum_S (M_0^{\,+}\, M_0) \quad , \tag{30}$$

donde se define la función f como sigue:

$$f(1/k^2) = \sum_P \varepsilon^\mu \varepsilon^\nu \left(\frac{\ell_\mu}{\ell\cdot k} - \frac{p_{1\mu}}{p_1\cdot k}\right)\left(\frac{\ell_\nu}{\ell\cdot k} - \frac{p_{1\nu}}{p_1\cdot k}\right) \tag{31}$$

y

$$\sum_S |M_0|^2 = \sum_S H_\rho^{\,+}\, H_\lambda L^{\rho +}\, L^\lambda \quad . \tag{32}$$

Al sustituir las relaciones (9) y (13) se obtiene para la componente leptónica:

$$\sum_{s} L^{\rho+} L^{\lambda} = \sum_{s} (\overline{u}_e 0^{\rho} v_{\nu})^{+} (U_e 0^{\lambda} v_{\nu}) = T_r \not{p}_{\nu} 0^{\rho} \not{\ell} 0^{\lambda} = E\, E_{\nu} T_r L^{\rho\lambda} , \qquad (33)$$

con

$$L^{\rho\lambda} = \frac{\not{p}_{\nu}}{E_{\nu}} 0^{\rho} \frac{\not{\ell}}{E} 0^{\lambda} \qquad (34)$$

como única contribución, ya que

$$\mathrm{Tr}\, \not{p}_{\mu}\, 0^{\rho} m_e 0^{\lambda} = 0 \qquad , \qquad (35)$$

y para la componente hadrónica

$$\sum H^{+}_{\rho} H_{\lambda} = \mathrm{Tr}\, \overline{W}_{\rho} (\not{p}_2 + m_2) W_{\lambda} (\not{p}_1 + m_1) \qquad , \qquad (36)$$

con

$$\overline{W}_{\rho} = \gamma^0 W^{+}_{\rho} \gamma^0 \qquad . \qquad (37)$$

Después de sustituir en la expresión (36)

$$\not{p}_2 = \not{p}_1 - \not{q} - \not{k} = \not{p}_2{}^0 - \not{k} \qquad (38)$$

donde

$$q = 1 + p_{\nu} \qquad y \qquad p^0{}_2 = p_1 - q \qquad , \qquad (39)$$

ésta se puede reescribir como

$$\sum_{s} H^{+}_{\rho} H_{\lambda} = m_1{}^2 \left(\mathrm{Tr}\, H^0{}_{\rho\lambda} - \frac{k_{\mu}}{m_1} \mathrm{Tr}\, H'{}_{\rho\lambda} \right) \qquad , \qquad (40)$$

donde

$$H^0_{\rho\lambda} = \overline{W}_\rho \frac{(\not{p}^0{}_2 + m_2)}{m_1} W_\lambda \frac{(\not{p}_1 + m_1)}{m_1} \tag{41}$$

y

$$H'_{\rho\lambda} = \overline{W}_\rho \gamma^\mu W_\lambda \frac{(\not{p}_1 + m_1)}{m_1} \quad . \tag{42}$$

Luego

$$\sum_{S,P} [1]^+ [1] = \frac{e^2 G_V{}^2}{2} f(1/k^2) \mathrm{Tr}(L^{\rho\lambda}) m_1{}^2 E\, E_\nu \left[\mathrm{Tr}\, H^0{}_{\rho\lambda} - \frac{k_\mu}{m_1} \mathrm{Tr}\, H'{}_{\rho\lambda} \right] . \tag{43}$$

De aquí se puede observar que las contribuciones proporcionales a $\Delta k/m_1$ en la expresión (28), producidas por el término de la relación (43) son debidas a las combinaciones(7) $H^0{}_{\rho\lambda}(PS)_1$ y $H'{}_{\rho\lambda}(PS)_0$. Este resultado es igualmente válido para toda la parte independiente de estructura.

Por otro lado, es fácil encontrar que la parte dependiente de estructura dada en la ecuación (29c) contribuye al ser combinada únicamente con $(PS)_0$ y los términos adicionales en la relación (29a) no influyen al orden requerido.

En resumen, hay tres tipos de contribuciones:

1. $$(d\Gamma_B)^S \propto (PS)_0 K_0 dk_0 \frac{1}{2} \sum_{S,P} |M_B|^2{}_S \, d\Omega_k \quad . \tag{44}$$

2. $$(d\Gamma_B)^I \propto (PS)_0 k_0 dk_0 \frac{1}{2} \sum_{S,P} |M_B|^2{}_I \, d\Omega_k \quad , \tag{45}$$

con $\not{p}_2$ de la traza hadrónica sustituido por $-\not{k}$; y

3. $$(d\Gamma_B)^I_{PS} \propto (PS)_1 \frac{k_0{}^2}{m_1} dk_0 \frac{1}{2} \sum_{S,P} |M_B|^2{}_I \, d\Omega_k \quad , \tag{46}$$

con $\not{p}_2$ de la traza hadrónica sustituido por $\not{p}^0{}_2$.

2. PROCEDIMIENTO DE INTEGRACION

En esta sección se hace un análisis cualitativo de las tres razones parciales de transición y se detalla el método de integración respecto a la parte angular del diferencial $d^3k = k_0{}^2 dk_0 d\Omega_k$. La parte relativa a dk_0 como se verá más adelante, es directa.

A. *Razón parcial asociada al término de estructura*

La $d\Gamma_B$ de acuerdo a las Ecs. (5), (7), (29c) y (44) en la aproximación requerida, es proporcional a

$$(d\Gamma_B)^S \propto (E_m - E - k_0)^2 \frac{dk_0}{m_1} d\Omega_k \; h^\mu(x) \; \mathrm{Tr}\left[\frac{(\not p_1 + m_1)}{m_1} \overline{W}_\rho \frac{(\not p_2{}^0 + m_2)}{m_1} T_{\mu\lambda}\right] \mathrm{Tr}\, L^{\rho\lambda} \;,$$

con

$$h^\mu(x) = \left[\frac{\ell^\mu}{E(1 - \beta x)} - \frac{p_1{}^\mu}{m_1}\right] \quad . \tag{47}$$

Al efectuar el producto de cada componente de $T_{\mu\lambda}$ dada en la Ec. (12) con los covariantes correspondientes, se generan términos de tres tipos.

Para la primera componente usando la Ec. (34) para $L^{\rho\lambda}$ y la Ec. (9) para O_λ:

$$h^\mu(x) \frac{p_{1\mu} \, k_\lambda}{p_1 \cdot k} \mathrm{Tr}\, L^{\rho\lambda} = n(x) \; \mathrm{Tr}\left[\frac{\not p_\nu}{E_\nu} O^\rho \frac{\not \ell}{E} \frac{\not k}{k_0} (1 + \gamma_5)\right] \quad , \tag{48}$$

dado que

$$p_1 \cdot h = n(x) \; m_1 \tag{49}$$

con

$$n(x) = \frac{1}{1 - \beta x} - 1 \tag{50}$$

así que

$$(d\Gamma_B)_1^S \propto (E_m-E-k_0)^2 \frac{dk_0}{m_1} n(x) d\Omega_k \quad \mathrm{Tr}\left[\frac{\not{p}_1+m_1}{m_1} \overline{W}_\rho \frac{\not{p}_2^0+m_2}{m_1}\right] \mathrm{Tr}\left[\frac{\not{p}_\nu}{E_\nu} O^\rho \frac{\not{\ell}}{E} \frac{\not{k}}{k_0} (1+\gamma_5)\right]. \tag{51}$$

Para la siguiente componente, de la Ec. (12)

$$W_\lambda \frac{\not{k}}{k_0} \gamma_\mu h^\mu = W_\lambda \frac{\not{k}}{k_0} \not{h} \quad , \tag{52}$$

esto genera

$$(d\Gamma_B)_2^S \propto (E_m-E-k_0)^2 \frac{dk_0}{m_1} d\Omega_k \quad \mathrm{Tr}\left[\frac{\not{p}_1+m_1}{m_1} \overline{W}_\rho \frac{\not{p}_2{}^0+m_2}{m_1} W_\lambda \frac{\not{k}}{k_0} \not{h}(x)\right] \mathrm{Tr}\left[\frac{\not{p}_\nu}{E_\nu} O \frac{\not{\ell}}{E} O^\lambda\right]. \tag{53}$$

Finalmente para la tercera componente de la Ec. (12), siguiendo el mismo lineamiento,

$$(d\Gamma_B)_3^S \propto (E_m-E-k_0)^2 \frac{dk_0}{m_1} n(x) d\Omega_k \quad \mathrm{Tr}\left[\frac{\not{p}_1+m_1}{m_1} \overline{W}_\rho \frac{\not{p}_2{}^0+m_2}{m_1} W_\lambda \frac{\not{k}}{k_0}\right] \mathrm{Tr}\left[\frac{\not{p}_\nu}{E_\nu} O^\rho \frac{\not{\ell}}{E} O^\lambda\right]. \tag{54}$$

En lo anterior se observa que el cuadrivector k se manifiesta siempre en la forma adimensional $\not{k}/k_0$ en una sola traza, ya sea en la leptónica o en la hadrónica; por otro lado, no hay ningún problema para efectuar la integración respecto a dk_0 y podría procederse ya en ese sentido.

Se ha llegado al punto que se considera medular, el correspondiente al desarrollo del procedimiento de integración de $\not{k}/k_0\, d\Omega_k$ como paso previo a la evaluación de las de por sí muy laboriosas trazas y el producto entre ellas; pudiéndose efectuar estos cálculos posteriormente, con menos variables, lo que da lugar a diversas simplificaciones.

Primero se define el sistema de referencia. Para ello hay que fijar la dirección del eje OZ a lo largo del vector $\vec{l}$, en estas condiciones, $d\Omega_k = dx\ d\phi_k$,

$$\frac{\not{l}}{E} = \gamma^0 - \gamma^3\beta \qquad , \tag{55}$$

y

$$\frac{\not{k}}{k_0} = \gamma^0 - (\mathrm{sen}\theta_k \cos\phi_k\gamma^1 + \mathrm{sen}\theta_k\ \mathrm{sen}\phi_k\gamma^2 + \cos\theta_k\gamma^3). \tag{56}$$

Después, se procede a integrar respecto a la variable ϕ_k ya que la única dependencia en ella es la que aparece en la relación (56).

Si además, a continuación se sustituye

$$\gamma^0 = \not{p}_1/m_1 \quad , \qquad \gamma^3 = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\not{p}_1}{m_1} - \frac{\not{l}}{E}\right) \qquad , \tag{57}$$

entonces

$$\int_0^{2\pi} \frac{\not{k}}{k_0}\, d\phi_k = 2\pi(\gamma^0 - x\gamma^3) = 2\pi\left(a(x)\ \frac{\not{p}_1}{m_1} + b(x)\ \frac{\not{l}}{E}\right) \quad . \tag{58}$$

Finalmente se procede a la integración respecto a dx, ya que en a(x) y b(x) quedó en forma explícita la dependencia en la variable x.

Por consiguiente, para esta razón de transición (54), se ha llevado a cabo la integración[(8)] ya que la traza que contiene a $\not{k}/k_0$ da lugar a una combinación lineal de trazas, una de ellas con $\not{l}/E$ y la otra con $\not{p}_1/m_1$ en la posición en la que originalmente se encontraba la $\not{k}/k_0$; y esto a su vez conduce a las simplificaciones antes mencionadas.

B. *Razón parcial independiente de estructura con el espacio fase evaluado en $k_0 = 0$.*

Una versión simplificada de la parte dependiente de k correspondiente al cuadrado de la amplitud independiente de estructura, indicada en la Ec. (29b) a ser considerada en la Ec. (45) está dada por

$$\left(\sum_{P,S} |M_B|^2\right) = \frac{e^2 G_V}{2 K_0^2} \mathrm{Tr}\, \overline{W}^\rho \left(- \frac{\not k}{k_0}\right) W^\lambda \frac{(\not p_1 + m_1)}{m_1} \frac{k_0}{m_1} \left[F(x, k_0/E)\, \mathrm{Tr}\, \frac{\not \ell}{E} O_\lambda \frac{\not p_\nu}{E} O_\rho \right. \tag{59}$$

$$\left. + G(k_0/E)\, \mathrm{Tr}\left[\frac{\not p_1}{m_1} O_\lambda \frac{\not p_\nu}{E_\nu} O_\rho\right] + H(x, k_0/E)\, \mathrm{Tr}\, \frac{\not k}{k_0} O_\lambda \frac{\not p_\nu}{E_\nu} O_\rho \right] \quad .$$

No es preciso conocer la forma explícita de las funciones F, G y H; por brevedad pueden ser omitidas, sin embargo, para ilustrar el tipo de dependencia en las variables de integración consideramos la forma de una de ellas:

$$H(x, k_0/E) = \frac{- m_e^2}{E^2 (1 - \beta x)^2} + \frac{(1 + k_0/E)}{(1 - \beta x)}$$

La diferencia con el caso del inciso anterior la establece la presencia de términos en los que aparece $\not k/k_0$ tanto en la traza leptónica como en la hadrónica simultáneamente, esto da lugar a una variante en el proceso de integración. Al desarrollar ahora $\not k/k_0$ en componentes usando el sistema de referencia anterior, Ec. (56), se obtienen términos, con diversas combinaciones de trazas proporcionales a $\mathrm{sen}^2\theta_k$, $\cos^2\phi_k$, $\cos\theta_k$, $\mathrm{sen}^2\theta_k \cos^2\phi_k$ y $\mathrm{sen}^2\theta_k \mathrm{sen}^2\phi_k$ que no se cancelan en la integración respecto a $d\phi_k$. Por la forma de los productos de las trazas que sobreviven en esta integración, es posible usando la relación de la Ec. (57) y el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, agrupar términos, generando una superposición de cinco productos de trazas con coeficientes explícitamente dependientes de x y k_0/E de la siguiente manera:

$$(d\Gamma_B)^I \propto - \frac{G_V^2}{2\pi^3} \frac{\alpha}{2\pi} \frac{d^3 \ell d\Omega_\nu}{(4\pi)^2} \frac{(E_m - E - k_0)^2}{(1 - E/m_1 + \hat{p}_\nu \cdot \vec{\ell}/m_1)^3} \frac{dk_0}{m_1} dx \cdot$$

$$A(x, k_0/E)\, \mathrm{Tr}\left(\frac{\not{\ell}}{E} O_\lambda \frac{\not{p}_\nu}{E_\nu} O_\rho\right) \mathrm{Tr}\left(\frac{\not{\ell}}{E} W^\lambda \frac{\not{p}_1}{m_1} \overline{W}^\rho\right)$$

$$+ B(x, k_0/E)\, \mathrm{Tr}\left(\frac{\not{\ell}}{E} O_\lambda \frac{\not{p}^\nu}{E_\nu} O_\rho\right) \mathrm{Tr}\left(\frac{\not{p}_1}{m_1} W^\lambda \frac{\not{p}_1}{m_1} \overline{W}^\rho\right)$$

$$+ B'(x, k_0/E)\, \mathrm{Tr}\left(\frac{\not{p}_1}{m_1} O_\lambda \frac{\not{p}_\nu}{E_\nu} O_\rho\right) \mathrm{Tr}\left(\frac{\not{\ell}}{E} W^\lambda \frac{\not{p}_1}{m_1} \overline{W}^\rho\right)$$

$$+ C(x, k_0/E)\, \mathrm{Tr}\left(\frac{\not{p}_1}{m_1} O_\lambda \frac{\not{p}_\nu}{E_\nu} O_\rho\right) \mathrm{Tr}\left(\frac{\not{p}_1}{m_1} W^\lambda \frac{\not{p}_1}{m_1} \overline{W}^\rho\right)$$

$$+ D(x, k_0/E)\, \mathrm{Tr}\left(\gamma_\beta O_\lambda \frac{\not{p}_\nu}{E_\nu} O_\rho\right) \mathrm{Tr}\left(\gamma_\alpha W^\lambda \frac{\not{p}_1}{m_1} \overline{W}^\rho\right) g^{\alpha\beta} \quad , \tag{60}$$

donde ya es posible proceder a la integración tanto de dk_0 como de dx.

C. *Razón parcial independiente de estructura y espacio fase de orden k_0/m.*

Las expresiones a considerar ahora de acuerdo a la Ec. (46) son

$$\left(\sum_{P,S} |M_B|^2\right)_2^I = e^2 \frac{G_V^2}{2} \frac{1}{k_0^2} \mathrm{Tr}\left[\overline{W}^\rho \frac{(\not{p}_2{}^0 + m_1)}{m_1} W^\lambda \frac{(\not{p}_1 + m_1)}{m_1}\right] \left[F(x, k_0/E) \mathrm{Tr}\left(\frac{\not{\ell}}{E} O_\lambda \frac{\not{p}_\nu}{E_\nu} O_\rho\right)\right. \tag{61}$$

$$\left. + G(k_0/E)\, \mathrm{Tr}\left(\frac{\not{p}_1}{m_1} O_\lambda \frac{\not{p}_\nu}{E_\nu} O_\rho\right) + H(x, k_0/E)\, \mathrm{Tr}\left(\frac{\not{k}}{k_0} O_\lambda \frac{\not{p}_\nu}{E_\nu} O_\rho\right)\right]$$

para la amplitud

$$\frac{\kappa_0}{m_1}(PS)_1 = \frac{\kappa_0}{m_1}(E_m - E - k_0)\left[2E(1-\beta x) + 3(1-z)(E_m - E - k_0)\right] \tag{62}$$

para el espacio fase[7].

La diferencia en la integración de $\not{k}/k_0$ respecto a los casos anteriores, la impone la presencia de z, el coseno del ángulo formado entre el fotón y el antineutrino, que por trigonometría esférica es

$$z = xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\cos\phi_k \quad . \tag{63}$$

La variable z contiene una dependencia extra en $\cos\phi_k$ que afecta al resultado de la integración respecto a este ángulo. Al considerar el mismo sistema de referencia de los casos anteriores e integrar

$$\int_0^{2\pi}\frac{\not{k}}{k_0}\cos\phi_k d\phi_k = \int_0^{2\pi}(\gamma^0 - (\text{sen}\theta_k\cos\phi_k\gamma^1 + \text{sen}\theta_k\text{sen}\phi_k\gamma^2 + \cos\theta_k\gamma^3))$$

$$\cos\phi_k d\phi_k = K(y,\ \text{sen}\theta_k\gamma^1) \quad , \tag{64}$$

se obtiene una función K que depende tanto de y como de x, y de la componente γ'. La presencia de esta matriz de Dirac requiere de un nuevo covariante que contraído con las γ's contribuya también con una componente γ'. Esto se logra al introducir

$$\frac{\not{p}_\nu}{E_\nu} = \gamma^0 - \sqrt{1-y^2}\ \gamma^1 - y\ \gamma^3 \quad . \tag{65}$$

Esta relación resulta al definir la dirección del plano xz paralela al vector $\vec{p}_\nu$.

La Ec. (57) se substituye para este caso por

$$\gamma^0 = \frac{\not{p}_1}{m_1} \quad , \qquad \gamma^1 = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \left[\frac{y}{\beta}\frac{\not{\ell}}{E} + \frac{\not{p}_1}{m_1}\left(1 - \frac{y}{\beta}\right) - \frac{\not{p}_\nu}{E_\nu}\right]$$

$$\gamma^3 = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\not{p}_1}{m_1} - \frac{\not{\ell}}{E}\right) \quad . \tag{66}$$

Finalmente se encuentra que esta razón parcial tiene la siguiente forma

$$(d\Gamma_B)^{I}_{PS} \propto - \frac{G_V{}^2}{2\pi^3} \frac{\alpha dx}{2\pi} \frac{d^3\ell d\Omega_\nu}{(4\pi)^2} \frac{dk_0}{m_1} \operatorname{Tr} \overline{W}_\rho \frac{(\not{p}_2{}^0 + m_2)}{m_1} W^\lambda \frac{(\not{p}_1 + m_1)}{m_1}$$

$$\left\{ R(x,y,k_0/E) \operatorname{Tr} \frac{\not{\ell}}{E} O_\lambda \frac{\not{p}_\nu}{E_\nu} O_\rho \right.$$

$$+ S(x,y,k_0/E) \operatorname{Tr} \frac{\not{p}_1}{m_1} O_\lambda \frac{\not{p}_\nu}{E_\nu} O_\rho$$

$$\left. + T(x,y,k_0/E) \operatorname{Tr} \frac{\not{p}_\nu}{E_\nu} O_\lambda \frac{\not{p}_\nu}{E_\nu} O_\rho \right\} \quad , \tag{67}$$

con

$$d\Omega_\nu = dy \, d\phi_\nu \quad . \tag{68}$$

La integración respecto a x y k_0 puede efectuarse, en tanto que la de $\not{k}/k_0$ integrada respecto a ϕ_k ha sido sustituida por una superposición de $\not{\ell}/E$, $\not{p}_1/m_1$ y $\not{p}_\nu/E_\nu$ con coeficientes dependientes de x, y, y k_0/E.

3. CONCLUSIONES

Otros decaimientos semileptónicos de hiperones pueden tratarse similarmente mediante este procedimiento.

Su aplicabilidad está supeditada a que los resultados de la integración puedan ser expresados en una base de elementos covariantes del sistema, tales que los productos entre ellos sean independientes de la variable previamente integrada.

El procedimiento es particularmente útil para factorizar en un mínimo de términos diferentes contribuciones, reduciendo así el número de cálculos.

RECONOCIMIENTOS

La autora agradece al Dr. A. García G. los comentarios que dieron inicio a este trabajo. La realización del presente trabajo fue posible gracias a los apoyos parciales tanto del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología a través del Proyecto PCCBBNA-021797, como de la Comisión de Operación y Fomento de las Actividades Académicas del Instituto Politécnico Nacional.

REFERENCIAS

1. H. Chew, *Phys. Rev.*, __123__ (1961) 377.
2. A. García & S.R. Juárez W., *Phys. Rev.*, __D22__ (1980) 1132; __22__ (1980) 2923(E).
3. F.E. Low, *Phys. Rev.*, __110__ (1958) 974.
4. A. García, S. Rebeca Juárez W., *Phys. Rev.*,__28__ (1983) 2180.
5. J. Bernstein, *Elementary Particles and their Currents*, (Freeman, 1968).
6. J.D. Bjorken & S.D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, (Mc.Graw Hill, 1964).
7. Al considerar el producto $H^{0}_{\rho\lambda}(PS)_1$ deberán ser eliminados los términos que contribuyen a un orden superior al requerido, esto equivale a reemplazar el denominador $(1 - E/m + \hat{p}_\nu \cdot \vec{l}/m_1)^n$ por la unidad; ésta, entre otras consideraciones para los factores de forma.
8. Este procedimiento fue empleado en la referencia 2.