Revista Mexicana de Física 32 No. 3 (1986) 515-527

ECUACIONES DIFERODIFERENCIALES EN UN PROBLEMA ELEMENTAL DE FISICA

Oscar Chavoya Aceves

Depto. de Ciencias Básicas

UAM-Azcapotzalco

Apdo. Postal 16-307

(recibido octubre 24, 1985; aceptado mayo 20, 1986)

RESUMEN

Se considera un sistema de dos masas puntuales m_1 y m_2, unidas por una barra elástica. Se obtienen ecuaciones diferodiferenciales que describen el comportamiento de las masas, se encuentran las soluciones exponenciales y se muestra el procedimiento para resolver en base a ellas el problema con condiciones iniciales.

ABSTRACT

We consider a system of two point masses m_1 and m_2, joined by an elastic barr. We obtain diferential in diference equations wich describe the behavior of the masses, we find the exponential solutions and show the procedure to solve with them the initial condition problem

INTRODUCCION

Es bien conocida la íntima relación que existe entre las teorías físicas sobre el movimiento de los cuerpos y la teoría matemática de las ecuaciones diferenciales. Así, existen exposiciones de la dinámica según las cuales la frase "Las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de las partículas materiales son ecuaciones diferenciales de 2° orden resueltas respecto a la segunda derivada", encierra todo el contenido positivo de la segunda ley de Newton. Hay, sin embargo, problemas clásicos que no se pueden plantear directamente desde esos puntos de vista, lo cual se presenta al considerar que las partículas interactúan por medio de los diferentes campos de fuerza que existen en la naturaleza, de manera que, para estudiar el movimiento de las partículas, o se recurre a la solución autoconsistente del problema del movimiento de las partículas y el campo, o bien, se recurre a las ecuaciones funcionales diferodiferenciales. Estos tratamientos encierran algunas dificultades conceptuales, por ejemplo, al tener que considerar interacciones avanzadas en la descripción clásica del movimiento de partículas cargadas. En el presente trabajo se considera un ejemplo muy sencillo pero que ya presenta ese tipo de complicaciones, con lo cual se espera aclarar algunas de las dificultades que surgen.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Sean m_1 y m_2 dos masas puntuales restringidas a moverse a lo largo de una línea recta paralela al eje de las x, unidas por una barra elástica de longitud ℓ (cuando no está deformada), sección transversal S y módulo de Young Y. Supondremos además, que el sistema está libre de fuerzas externas. Según las leyes de la mecánica, el sistema del centro de masas (de partículas más barra), es un sistema inercial y con respecto a él se hará la descripción del movimiento.

Supondremos que la coordenada de la partícula 1, cuando la barra no está deformada, es $U_1 = 0$; mientras que la posición de m_2 en las mismas condiciones es ℓ. El desplazamiento de los elementos de la barra se puede describir por una sola componente: $U(x,t)$, que satisface a la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{\lambda}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \qquad , \tag{1}$$

donde λ es la masa de la barra por unidad de longitud y γ = YS es una constante. U(x,t) satisface también a las condiciones de frontera

$$m_1\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)(0,t) = \gamma\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)(0,t) \qquad , \tag{2-a}$$

$$m_2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)(\ell,t) = -\gamma\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)(\ell,t) \qquad . \tag{2-b}$$

Sean $U_1(t) = U(0,t)$ y $U_2(t) = U(\ell,t)$ los desplazamientos de las partículas para todo t. La solución general de (1), sin condiciones adicionales de frontera, es

$$U(x,t) = f\left(t + \frac{x}{c}\right) + g\left(t - \frac{x}{c}\right) \qquad , \tag{3}$$

donde f y g son funciones arbitrarias con 2a. derivada continua y $c = \sqrt{\frac{\gamma}{\lambda}}$. De manera que, dada una solución particular de (1) que satisfaga a las condiciones de frontera (2), se cumplirá el siguiente sistema de igualdades funcionales:

$$U_1(t) = f(t) + g(t) \qquad , \tag{4-a}$$

$$U_2(t) = f\left(t + \frac{\ell}{c}\right) + g\left(t - \frac{\ell}{c}\right) \qquad , \tag{4-b}$$

$$m_1U_1''(t) = \frac{\gamma}{c}\{f'(t) - g'(t)\} \qquad , \tag{4-c}$$

$$m_2U_2''(t) = \frac{\gamma}{c}\left\{-f'\left(t + \frac{\ell}{c}\right) + g'\left(t - \frac{\ell}{c}\right)\right\} \qquad . \tag{4-d}$$

Veamos cómo se pueden eliminar de estas igualdades las funciones f y g.

Integrando las Ecs. (4-c) y (4-d) el sistema se transforma en

$$f(t) + g(t) = U_1(t) \quad , \tag{5-a}$$

$$f(t) - g(t) = \frac{cm_1}{\gamma} U_1'(t) + K_1 \quad , \tag{5-b}$$

$$f\left(t + \frac{\ell}{c}\right) + g\left(t - \frac{\ell}{c}\right) = U_2(t) \quad , \tag{5-c}$$

$$-f\left(t + \frac{\ell}{c}\right) + g\left(t - \frac{\ell}{c}\right) = \frac{cm_2}{\gamma} U_2'(t) + K_2 \quad , \tag{5-d}$$

donde K_1 y K_2 son constantes de integración. A partir de estas ecuaciones se encuentra ahora que

$$f(t) = \frac{\gamma U_1(t) + m_1 c\, U_1'(t) + \gamma K_1}{2\gamma} \quad , \tag{6-a}$$

$$g(t) = \frac{\gamma U_1(t) - m_1 c\, U_1'(t) - \gamma K_1}{2\gamma} \quad , \tag{6-b}$$

$$f\left(t + \frac{\ell}{c}\right) = \frac{\gamma U_2(t) - m_2 c\, U_2'(t) - \gamma K_2}{2\gamma} \quad , \tag{6-c}$$

$$g\left(t - \frac{\ell}{c}\right) = \frac{\gamma U_2(t) + m_2 c\, U_2'(t) + \gamma K_2}{2\gamma} \quad . \tag{6-d}$$

Utilizando (6-a), (6-b) y (4-b) se demuestra que

$$U_2(t) = \frac{\gamma\left\{U_1\left(t + \frac{\ell}{c}\right) + U_1\left(t - \frac{\ell}{c}\right)\right\} + m_1 c\left\{U_1'\left(t + \frac{\ell}{c}\right) - U_1'\left(t - \frac{\ell}{c}\right)\right\}}{2\gamma} \quad . \tag{7-a}$$

Similarmente

$$U_1(t) = \frac{\gamma\left\{U_2\left(t + \frac{\ell}{c}\right) + U_2\left(t - \frac{\ell}{c}\right)\right\} + m_2 c\left\{U_2'\left(t + \frac{\ell}{c}\right) - U_2'\left(t - \frac{\ell}{c}\right)\right\}}{2\gamma} \quad . \tag{7-b}$$

Las Ecs. (7-a) y (7-b), constituyen un sistema de dos ecuaciones difero-diferenciales que se debe resolver para describir el comportamiento de las masas sin tener en consideración, explícitamente, la existencia del campo elástico a través del cual interactúan.

ANALISIS DEL PROBLEMA

En conexión con el sistema de ecuaciones 7, surgen dos preguntas:

a) ¿Qué condiciones adicionales se deben imponer a las funciones U_1 y U_2 para que el sistema 7 las determine unívocamente?

b) ¿Qué métodos se pueden utilizar para obtener soluciones del sistema 7?

Empezaremos contestando la segunda pregunta, el análisis que haremos nos conducirá a contestar la primera. El sistema (7) es un sistema lineal, por lo que podemos ocuparnos de la obtención de una familia de soluciones sin condiciones adicionales que, en última instancia, se pueden utilizar para desarrollar soluciones que cumplan con requisitos preestablecidos. Como en la teoría de ecuaciones diferenciales, existe una familia de soluciones exponenciales de la forma

$$\begin{aligned} U_1(t) &= a_1 e^{zt} \quad , \\ U_2(t) &= a_2 e^{zt} \quad , \end{aligned} \tag{8}$$

donde z es un número complejo y a_1, a_2 son constantes complejas. Sustituyendo estas formas funcionales en las Ecs. (7), se obtiene un sistema de ecuaciones trascendentes

$$a_2 = a_1\left\{\cosh\left(\frac{z\ell}{c}\right) + \frac{m_1 c}{\gamma}\, z\, \mathrm{senh}\left(\frac{z\ell}{c}\right)\right\} \tag{9-a}$$

$$a_1 = a_2\left\{\cosh\left(\frac{z\ell}{c}\right) + \frac{m_2 c}{\gamma} z \operatorname{senh}\left(\frac{z}{c}\right)\right\} \quad . \tag{9-b}$$

Obsérvese que a_1 y a_2 no son independientes. La resolución del sistema (9) no es trivial, pero, como veremos, la introducción del sistema de ecuaciones funcionales 7 únicamente complica la solución del problema y solamente se justifica por el análisis que permite hacer. Partamos pues de la ecuación diferencial parcial 1 y de las condiciones (2-a) y (2-b). Utilicemos el método de separación de variables para obtener soluciones de (1). Calcularemos los modos normales de oscilación, por lo cual proponemos

$$U(x,t) = \phi(x)\, e^{i\omega t} \quad .$$

Al sustituir en (1), se encuentra que ϕ satisface a la ecuación diferencial ordinaria

$$\phi'' + \frac{\omega^2}{c^2}\phi = 0 \quad .$$

Lo que nos dice que deberá ser

$$\phi(x) = b_1 e^{i\frac{\omega x}{c}} + b_2 e^{-i\frac{\omega x}{c}} \quad ,$$

de manera que

$$U(x,t) = \left(b_1 e^{i\frac{\omega x}{c}} + b\, e^{-i\frac{\omega x}{c}}\right) e^{i\omega t} \quad .$$

Para imponer las condiciones de frontera, notamos que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{i\omega}{c}\left(b_1 e^{\frac{i\omega x}{c}} - b_2 e^{\frac{-i\omega x}{c}}\right) e^{i\omega t} \quad , \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\omega^2\left(b_1 e^{\frac{i\omega x}{c}} + b_2 e^{\frac{-i\omega x}{c}}\right)e^{i\omega t} \qquad , \tag{10}$$

de manera que las condiciones (2) toman la forma

$$\begin{aligned} &(m_1\omega c + i\gamma)b_1 + (m_1\omega c - i\gamma)b_2 = 0 \qquad , \\ &(m_2\omega c - i\gamma)e^{\frac{i\omega\ell}{c}}\, b_1 + (m_2\omega c + i\gamma)e^{\frac{-i\omega\ell}{c}}\, b_2 = 0 \qquad . \end{aligned} \tag{11}$$

Este sistema tiene soluciones no triviales si y sólo si su determinante vale cero:

$$(m_1\omega c + i\gamma)(m_2\omega c + i\gamma)e^{\frac{-i\omega\ell}{c}} - (m_1\omega c - i\gamma)(m_2\omega c - i\gamma)e^{\frac{i\omega\ell}{c}} = 0 \qquad .$$

Aunque hay aquí dos ecuaciones para ω, la primera, que corresponde a la parte real se cumple idénticamente. Para la parte imaginaria tendremos

$$(m_1 m_2\omega^2 c^2 - \gamma^2)\sin\left(\omega\frac{\ell}{c}\right) - \gamma\omega c\, m_1 m_2 \cos\left(\frac{\omega\ell}{c}\right) = 0 \qquad ,$$

o bien

$$\tan\left(\frac{\omega}{c}\ell\right) = \frac{\gamma\omega c m_1 m_2}{(m_1 m_2\omega^2 c^2 - \gamma^2)} \tag{12}$$

que tiene una infinidad de soluciones. Sean $\omega_1,\ldots,\omega_n$ las soluciones positivas de (12), se encuentran para cada ω_n un par de modos normales

$$U_{n_1}(x,t) = \left(b_{11}e^{\frac{i\omega_n x}{c}} + b_{12}e^{\frac{-i\omega_n x}{c}}\right)e^{i\omega_n t} \qquad ,$$

$$U_{n2}(x,t) = \left(b_{21}e^{\frac{i\omega_n x}{c}} + b_{22}e^{\frac{-i\omega_n x}{c}}\right)e^{-i\omega_n t} \qquad ,$$

donde debemos tener

$$(m_1\omega c + i\gamma)b_{11} + (m_1\omega c - i\gamma)b_{12} = 0 \qquad ;$$

o sea

$$b_{11} = -\frac{(m_1\omega c - i\gamma)}{(m_1\omega c + i\gamma)}\, b_{12} \qquad .$$

Asimismo

$$b_{21} = -\frac{(m_1\omega c - i\gamma)}{(m_1\omega c + i\gamma)}\, b_{22} \qquad .$$

Estas relaciones hacen ver que las partes espaciales de U_{n1} y U_{n2} son proporcionales, de manera que se obtiene una expresión más sencilla para los modos normales

$$U_n(x,t) = \left\{e^{\frac{i\omega_n x}{c}} - \left(\frac{m_1\omega_n c + i\gamma}{m_1\omega_n c - i\gamma}\right) e^{\frac{-i\omega_n x}{c}}\right\}e^{\pm i\omega_n t} \qquad . \tag{13}$$

Hemos encontrado así una infinidad de soluciones de (7)

$$U_1(t) = \frac{-2i\gamma}{m_1\omega_n c - i\gamma}\, e^{\pm i\omega_n t} \qquad , \tag{14-a}$$

$$U_2(t) = \left\{e^{\frac{i\omega_n \ell}{c}} - \left(\frac{m_1\omega_n c + i\gamma}{m_1\omega_n c - i\gamma}\right) e^{\frac{-i\omega_n \ell}{c}}\right\}e^{\pm i\omega_n t} \tag{14-b}$$

para cada ω_n. Haremos ver que esta familia de soluciones es suficiente para nuestros fines. Escribiremos los modos normales (13) en la forma abreviada

$$U_n(x,t) = \phi_n(x)\, e^{i\omega_n t} \quad ,$$

donde evidentemente se supone que

$$\phi_n(x) = e^{\frac{i\omega_n x}{c}} - \left(\frac{m_1\omega_n c + i\gamma}{m_1\omega_n c - i\gamma}\right) e^{\frac{-i\omega_n x}{c}} \quad . \tag{15}$$

Estudiaremos las propiedades que tienen estos modos normales.

a) Primero que todo observemos que en los modos normales el sistema oscila de manera que su centro de masas permanece en reposo.

b) Los modos normales no son ortogonales en el sentido usual, pero se puede definir un producto interno que los haga ortogonales.

Partamos de la ecuación diferencial de los modos normales:

$$\gamma \frac{d^2\phi_n}{dx^2} + \lambda\omega_n^{\,2}\, \phi_n = 0 \quad .$$

Multiplicamos esta ecuación por ϕ_m^* para obtener

$$\gamma\phi_m^* \frac{d^2\phi_n}{dx^2} + \lambda\omega_n^{\,2}\, \phi_m^*\phi_n = 0 \quad .$$

Asimismo,

$$\gamma\phi_n \frac{d^2\phi_m^*}{dx^2} + \lambda\omega_m^{\,2}\, \phi_n\phi_m^* = 0 \quad .$$

Restando la segunda igualdad de la primera e integrando:

$$\gamma\left(\phi_m^* \frac{d\phi_n}{dx} - \phi_n \frac{d\phi_m^*}{dx}\right)\Bigg|_0^{\ell} = -\lambda\int_0^{\ell}(\omega_n^{\,2} - \omega_m^{\,2})\phi_m^*\phi_n$$

Pero, a partir de las condiciones de frontera

$$\gamma\left(\phi_m^* \frac{d\phi_n}{dx} - \phi \frac{d\phi_m^*}{dx}\right)\Bigg|_0^{\ell}$$

$$= (\omega_n^{\,2} - \omega_m^{\,2})(m_1\phi_n(0)\phi_m^*(0) + m_2\phi_n(\ell)\phi_m^*(\ell)) \quad ,$$

lo que nos lleva a definir el producto interno

$$\langle\Psi/\phi\rangle = \int_0^{\ell} \Psi^*\phi + m_1\Psi^*(0)\phi(0) + m_2\Psi^*(\ell)\phi(\ell) \quad , \qquad (16)$$

que hace ortogonales a los modos normales.

Así que, dadas U y $\frac{\partial U}{\partial t}$ a tiempo cero, podemos escribir

$$U(x,t) = \sum_{h=1}^{\infty} (c_n^{+}e^{i\omega_n t} + c_n^{-}e^{-i\omega_n t})\phi_n(x) \quad , \qquad (17\text{-a})$$

de manera que

$$c_n^{+} + c_n = \frac{\langle\phi_n/U(0)\rangle}{\langle\phi_n/\phi_n\rangle} \quad ,$$

$$i\omega_n c^{+} = i\omega_n c^{-} = \frac{\langle\phi_n/\frac{\partial U}{\partial t}(0)\rangle}{\langle\phi_n/\phi_n\rangle} \quad , \qquad (17\text{-b})$$

lo cual resuelve el problema con condiciones iniciales sobre la deformación de la barra. ¿Pero, qué pasa si lo que se da son sendos "tramos" de las trayectorias de m_1 y m_2? Para contestar esta pregunta, veremos que bajo determinadas condiciones se pueden determinar $U(x,t)$ y $\frac{\partial U}{\partial t}(x,0)$ a partir de las ecuaciones funcionales (6).

En efecto, sabemos que si $U(x,t) = f\left(t + \frac{x}{c}\right) + g\left(t - \frac{x}{c}\right)$, entonces

$$U(x,0) = f\left(\frac{x}{c}\right) + g\left(-\frac{x}{c}\right) .$$

Supongamos dada la trayectoria de m_1 en el intervalo $t \varepsilon \left[\frac{\ell}{c}, \frac{\ell}{c}\right]$, se tendrá

$$f\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{\gamma U_1\left(\frac{x}{c}\right) + m_1 c\, U_1'\left(\frac{x}{c}\right)}{2\gamma} ,$$
$$g\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{\gamma U_1\left(\frac{x}{c}\right) - m_1 c\, U_1'\left(\frac{x}{c}\right)}{2\gamma} , \qquad (18)$$

con lo que se obtiene

$$U(x,0) = \frac{\gamma U_1\left(\frac{x}{c}\right) + m_1 c\, U_1'\left(\frac{x}{c}\right)}{2\gamma} + \frac{\gamma U_1 \frac{x}{c} - m_1 c\, U_1'\left(\frac{x}{c}\right)}{2\gamma} . \qquad (19\text{-a})$$

Asimismo,

$$\frac{\partial U}{\partial t}\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{\gamma U_1'\left(\frac{x}{c}\right) + m_1 c\, U_1''\left(\frac{x}{c}\right)}{2\gamma} + \frac{\gamma U_1'\left(-\frac{x}{c}\right) - m_1 c\, U_1''\left(\frac{x}{c}\right)}{2\gamma} . \qquad (19\text{-b})$$

Una vez determinadas estas funciones, y utilizando las fórmulas (17), se obtiene una solución única. Evidentemente, también se determina la solución si se especifica la trayectoria de m_2 en el mismo intervalo de tiempo.

Supongamos ahora que se especifican las trayectorias de m_1 y m_2 en el intervalo $t \in \left[-\frac{\ell}{c}, 0\right]$, tendremos entonces que

$$f\left(\frac{x}{c}\right) + g\left(-\frac{x}{c}\right) = \frac{\gamma U_1\left(-\frac{x}{c}\right) - m_1 c\, U_1'\left(-\frac{x}{c}\right) - \gamma K_1}{2\gamma}$$

$$+ \frac{\gamma U_2\left(\frac{x-\ell}{c}\right) - m_2 c\, U_2'\left(\frac{x-\ell}{c}\right) - \gamma K_2}{2\gamma} \quad . \tag{20}$$

$$U(x,0) = \frac{\gamma U_1\left(-\frac{x}{c}\right) - m_1 c\, U_1'\left(-\frac{x}{c}\right)}{2\gamma} +$$

$$+ \frac{\gamma U_2'\left(\frac{x-\ell}{c}\right) - m_2 U_2''\left(\frac{x-\ell}{c}\right)}{2\gamma} + K \quad , \tag{20-a}$$

donde la constante K se determina a partir de la condición

$$\lambda \int_0^{\ell} U(x,0)dx + m_1 U_1(0) + m_2 U_2(0) = 0 \quad .$$

Además

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)(x,0) = \frac{\gamma U_1'\left(-\frac{x}{c}\right) - m_1 c\, U_1''\left(-\frac{x}{c}\right)}{2\gamma}$$

$$+ \frac{\gamma U_2'\left(\frac{x-\ell}{c}\right) - m_2 U_2''\left(\frac{x-\ell}{c}\right)}{2\gamma} \quad . \tag{20-b}$$

Entonces, el uso de las ecuaciones (17) permite determinar la solución.

CONCLUSIONES Y OBSERVACIONES

Según lo que acabamos de ver, la teoría de espacios de Hilbert está íntimamente relacionada con la solución del problema original, pues la familia de soluciones exponenciales constituye un sistema ortogonal completo de un espacio de Hilbert que se obtiene con una definición singular del producto interior (3). La generalización de esto queda para un estudio posterior. Es preciso observar que las soluciones obtenidas constituyen sólo un subespacio del conjunto de soluciones, pues, como es notorio, se exigen ciertas condiciones más o menos fuertes sobre las condiciones iniciales: la existencia y continuidad de la 2a. derivada (que es un requerimiento físicamente aceptable). La segunda pregunta que se plantea es qué tanto se pueden relajar estas condiciones manteniendo el formalismo. Las cuestiones relacionadas con esto quedan pendientes también para un posterior estudio.

REFERENCIAS

1. A.N. Tijonov, A.A. Samarsky, *Ecuaciones de la Física Matemática*, Edit. Mir, pags. 168-174.
2. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison Wesley Publishing Company. Second Edition Chap. 12.
3. R. Wenstock, *Am. J. Phys.*, 47 (1979) 508.