

RECONOCIMIENTO DE UN TREN ALEATORIO DE PULSOS IDENTICOS SUMERGIDO EN RUIDO BLANCO GAUSSIANO

Román Castañeda

Departamento de Física
Universidad Nacional de Colombia
Seccional de Medellín
A.A. 3840-Medellín

(recibido agosto 23, 1985; aceptado marzo 10, 1986)

RESUMEN

Actualmente, el reconocimiento de patrones débiles sumergidos en ruido de estadística conocida es de importancia fundamental en diferentes campos de aplicación del procesamiento de señales (v.g.t., radares, comunicaciones, filtración óptica, instrumentación electrónica). En este trabajo se estudiará el proceso de reconocimiento de un patrón aleatorio de pulsos idénticos sumergido en ruido blanco gaussiano, mediante la técnica de filtración adaptada (*matched filtering*).

ABSTRACT

Nowadays, the recognition of weak patterns immersed in noise with known statistics is of great importance in the different application realms of signal processing (radars, communication, optical filtering, electronical instrumentation). In this article the process of recognition of a random pattern of identical pulses immersed in Gaussian white noise will be studied, using the *matched filtering* technique.

INTRODUCCION

Usualmente se define señal como una cantidad que, de alguna manera, con lleva información sobre el estado de un sistema físico bajo observación⁽¹⁾. En consecuencia, las señales son el resultado de la composición de dos entidades fundamentales: una estructura, denominada patrón, en la que se ha codificado dicha información, y el resto de la señal, denominado ruido, el cual en lugar de portar información adicional, distorsiona el patrón. Ambas entidades (patrón y ruido) pueden ser determinísticas o aleatorias y su composición, lineal o no-lineal. En muchos casos de interés⁽²⁾ (v.g., radares, filtración óptica, tratamiento de speckles, procesamiento de señales médicas) las señales son el resultado de la adición de un patrón aleatorio a ruido aleatorio, esto es,

$$f(t) = s(t) + n(t) \quad , \quad (1)$$

donde $f(t)$, $s(t)$, $n(t)$ son funciones aleatorias de cuadrado integrable⁽¹⁾ que representan la señal, el patrón y el ruido respectivamente. La recuperación de la información codificada en el patrón se realiza empleando técnicas de filtración⁽³⁾ acordes con cada problema específico (v.g., reconocimiento de patrones -pattern recognition, matched filtering-, suavización -smoothing filtering-, restauración -inverse filtering-). El reconocimiento de patrones por filtración adaptada⁽⁴⁾ (matched filtering), técnica que se empleará en el presente artículo, permite la identificación de un patrón específico en una señal dada, es decir, la determinación de su presencia o ausencia en dicha señal. Por lo tanto, la aplicación de esta técnica requiere del conocimiento previo del patrón y de la estadística del ruido al que éste se ha adicionado; y su resultado es la síntesis del dispositivo lineal óptimo para la ejecución del reconocimiento, esto es, la determinación de la función de respuesta al impulso⁽⁵⁾ (FRI) que caracteriza el comportamiento de tal dispositivo, sujeta al cumplimiento de un criterio de identificación previamente definido.

La FRI de un sistema lineal (apéndice B.4) es una función de cuadrado integrable, $h(t)$, tal que si $f(t)$ es la excitación a la entrada del sistema, la

respuesta a la salida será la función de cuadrado integrable (Fig.1)

$$y(t) = h(\tau)*f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t-\tau)d\tau \quad (2)$$

donde * representa la función de convolución⁽⁴⁾. Reemplazando (1) en (2) obtenemos

$$y(t) = h(\tau)*s(\tau) + h(\tau)*n(\tau) = S_o(t) + n_o(t) \quad (3)$$

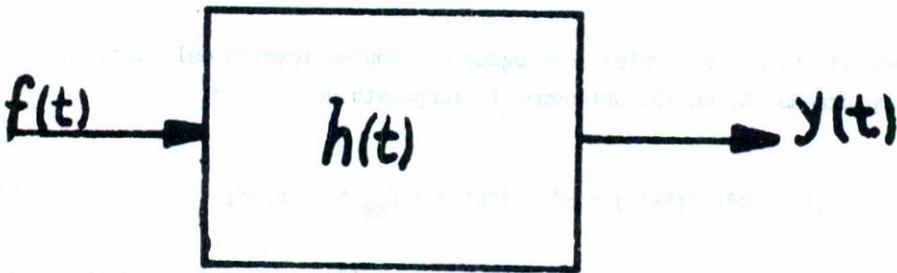


Fig. 1. Representación de caja negra para un sistema lineal.

En el proceso de reconocimiento de patrones por filtración adaptada, el criterio de identificación pertinente es el de la razón-señal-ruido óptima (optimal signal-to-noise-ratio) en la respuesta del dispositivo. Esta cantidad, designada como SNR, está definida como la razón entre las potencias máximas de $s_o(t)$ y $n_o(t)$, esto es

$$SNR = \frac{|s_o(t)|_{MAX}^2}{|n_o(t)|_{MAX}^2} \quad (4)$$

Los dispositivos que se sintetizan con base en este criterio de iden-

tificación se denominan filtros adaptados (*matched filters*). Cuando la señal de excitación del filtro consta de un patrón adicionado a ruido blanco gaussiano estacionario (cuya estadística será revisada en el próximo apartado), la SNR estará dada por⁽⁶⁾

$$\text{SNR} = \frac{|s_o(t)|^2}{\langle |n_o(t)|^2 \rangle} \quad , \quad (5)$$

donde $\langle |n_o(t)|^2 \rangle$ es la potencia promedio del ruido de salida del filtro, cu ya FRI, para este caso, se definirá como

$$h(t) = s^*(-t) \quad , \quad (6)$$

donde $s^*(-t)$ es el complejo conjugado con conteo reverso del patrón $s(t)$. Reemplazando (6) en (3) obtenemos la respuesta del filtro:

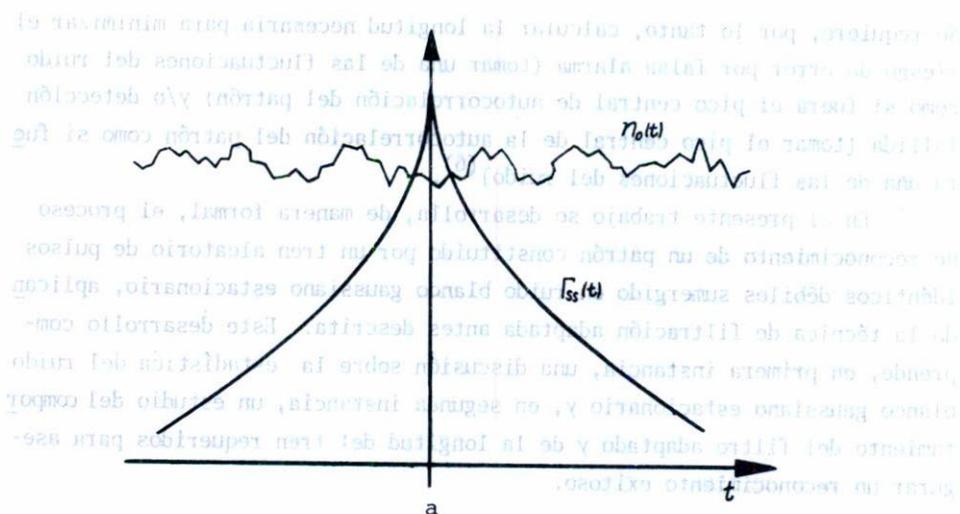
$$y(t) = s^*(-\tau)*s(\tau) + s^*(-\tau)*n(\tau) = \Gamma_{ss}(t) + n_o(t) \quad , \quad (7)$$

donde $\Gamma_{ss}(t)$ es la función de autocorrelación⁽⁴⁾ del patrón (apéndice B.2), cuyo valor central es la norma cuadrada del patrón⁽¹⁾ y constituye un máximo conocido como pico central de la autocorrelación, esto es,

$$\Gamma_{ss}(0) = \|s(t)\|^2$$

Se concluye entonces que, si la potencia del pico central de autocorrelación del patrón es significativamente mayor que la potencia promedio del ruido de salida del filtro, la respuesta $y(t)$ presentará un destello que contrastará con un fondo ruidoso⁽²⁾ (Fig.2), el cual indicará la presencia del patrón en la señal de excitación.

Esta técnica logra identificaciones sorprendentes cuando el patrón consta de un tren o secuencia de pulsos débiles sumergido en ruido. En este caso, la potencia del pico central de autocorrelación del patrón dependerá de la longitud del tren, es decir, del número de pulsos que lo conforma.



RUIDO BLANCO GAUSSIANO ESTACIONARIO

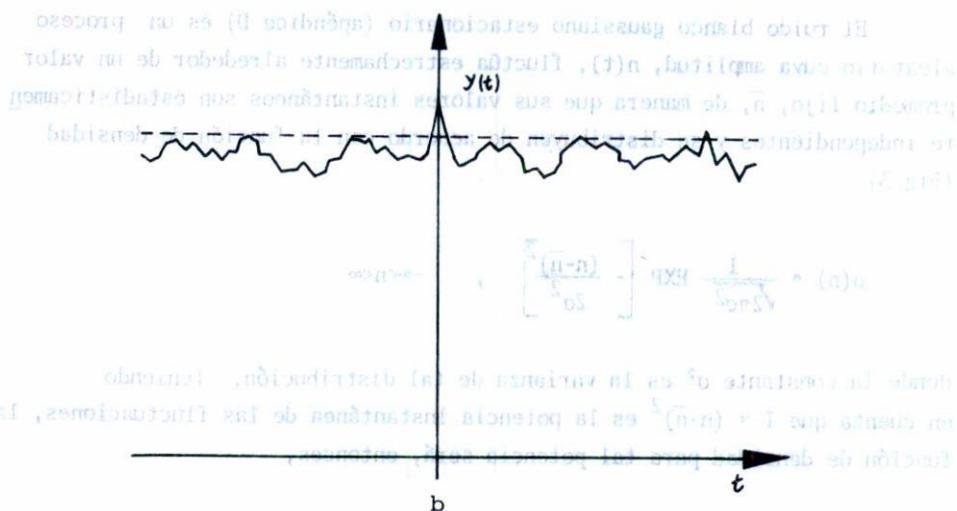


Fig. 2. Respuesta típica de un filtro adaptado en un proceso de reconocimiento de patrones:

- a. Ilustración de los términos de la Ec. (7)
- b. Ilustración de la respuesta, $Y(t)$. Nótese que el pico central de la autocorrelación del patrón sobresale de las fluctuaciones del ruido.

Se requiere, por lo tanto, calcular la longitud necesaria para minimizar el riesgo de error por falsa alarma (tomar una de las fluctuaciones del ruido como si fuera el pico central de autocorrelación del patrón) y/o detección fallida (tomar el pico central de la autocorrelación del patrón como si fuera una de las fluctuaciones del ruido)⁽⁶⁾.

En el presente trabajo se desarrolla, de manera formal, el proceso de reconocimiento de un patrón constituido por un tren aleatorio de pulsos idénticos débiles sumergido en ruido blanco gaussiano estacionario, aplicando la técnica de filtración adaptada antes descrita. Este desarrollo comprende, en primera instancia, una discusión sobre la estadística del ruido blanco gaussiano estacionario y, en segunda instancia, un estudio del comportamiento del filtro adaptado y de la longitud del tren requeridos para asegurar un reconocimiento exitoso.

RUIDO BLANCO GAUSSIANO ESTACIONARIO

El ruido blanco gaussiano estacionario (apéndice D) es un proceso aleatorio cuya amplitud, $n(t)$, fluctúa estrechamente alrededor de un valor promedio fijo, \bar{n} , de manera que sus valores instantáneos son estadísticamente independientes y se distribuyen de acuerdo con la función de densidad (Fig. 3)

$$\rho(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \text{EXP} \left[-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\sigma^2} \right], \quad -\infty < n < \infty$$

donde la constante σ^2 es la varianza de tal distribución. Teniendo en cuenta que $I = (n-\bar{n})^2$ es la potencia instantánea de las fluctuaciones, la función de densidad para tal potencia será, entonces,

$$\rho(I) = 2\pi\rho(n) \cdot \rho(n) = \frac{1}{\sigma^2} \text{EXP} \left[-\frac{I}{\sigma^2} \right] u(I), \quad (8)$$

donde $u(I)$ es la función escalón unitario (apéndice C) y el factor 2π es requerido por la normalización. El valor promedio y la varianza para esta fun

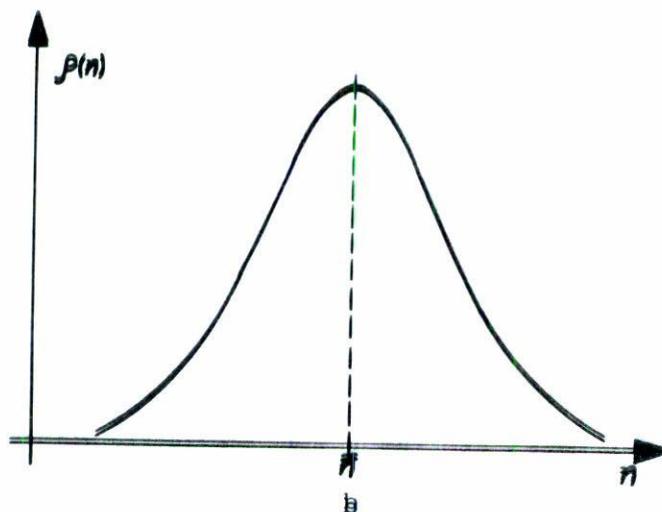
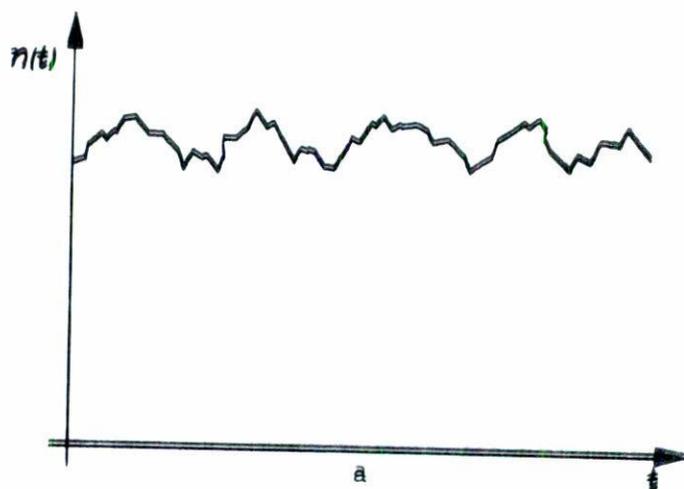


Fig. 3. Ruido blanco gaussiano estacionario:
 a. Representación en el dominio temporal
 b. Representación en el dominio de las amplitudes (campana de Gauss).
 El valor n de esta distribución corresponde a la amplitud promedio del ruido en la representación temporal y su desviación estándar está relacionada con la amplitud de las fluctuaciones del ruido en el dominio temporal.

ción de densidad son, respectivamente, $\bar{I} = \sigma^2$ y $\epsilon^2 = (\sigma^2)^2$ de manera que su fluctuación relativa será $c = \epsilon/\bar{I} = 1$.

Un aspecto de especial interés por su aplicación en el reconocimiento de trenes de pulsos, es el de la estadística correspondiente a la superposición incoherente de N muestras de ruido blanco gaussiano estacionario estadísticamente idénticas. La función de densidad para la potencia del ruido resultante será (apéndice D.3)

$$\rho_N(I) = \frac{1}{(\sigma^2)^N} \frac{I^{N-1}}{(N-1)!} \text{EXP} \left[-\frac{I}{\sigma^2} \right] u(I) \quad (9)$$

y en consecuencia, su potencia promedio, varianza y fluctuación relativa son, respectivamente, $\bar{I}_N = N\bar{I}$, $\epsilon_N^2 = N\epsilon^2$, $c_N = \epsilon_N/\bar{I}_N = 1/\sqrt{N}$. Estos resultados indican que, aunque la potencia promedio del ruido resultante es mayor que la de cualquiera de las muestras individuales, las fluctuaciones de aquél son más estrechas que las de éstas, es decir, la superposición incoherente tiene el efecto de homogeneizar el ruido contenido en las muestras.

RECONOCIMIENTO DE UN TREN ALEATORIO DE PULSOS IDENTICOS

Un tren de N pulsos idénticos, cada uno con perfil $s(t)$ y duración T , distribuidos de acuerdo con la secuencia temporal aleatoria $\{t_n/ 1 \leq n \leq N, |t_{n+1} - t_n| > T\}$, se define como (Fig.4)

$$s_N(t) = s(t) * \sum_{n=1}^N \delta(t-t_n) \quad (10)$$

donde $\delta(t)$ es la función delta de Dirac (apéndice A). De la Ec.(6) se concluye que la FRI del filtro adaptado adecuado para el reconocimiento de este patrón es

$$h(t) = s_N^*(-t) = s^*(-t) * \sum_{n=1}^N \delta(t-t_n) \quad (11)$$

Reemplazando (10) y (11) en (7) y aplicando las propiedades algebraicas de la

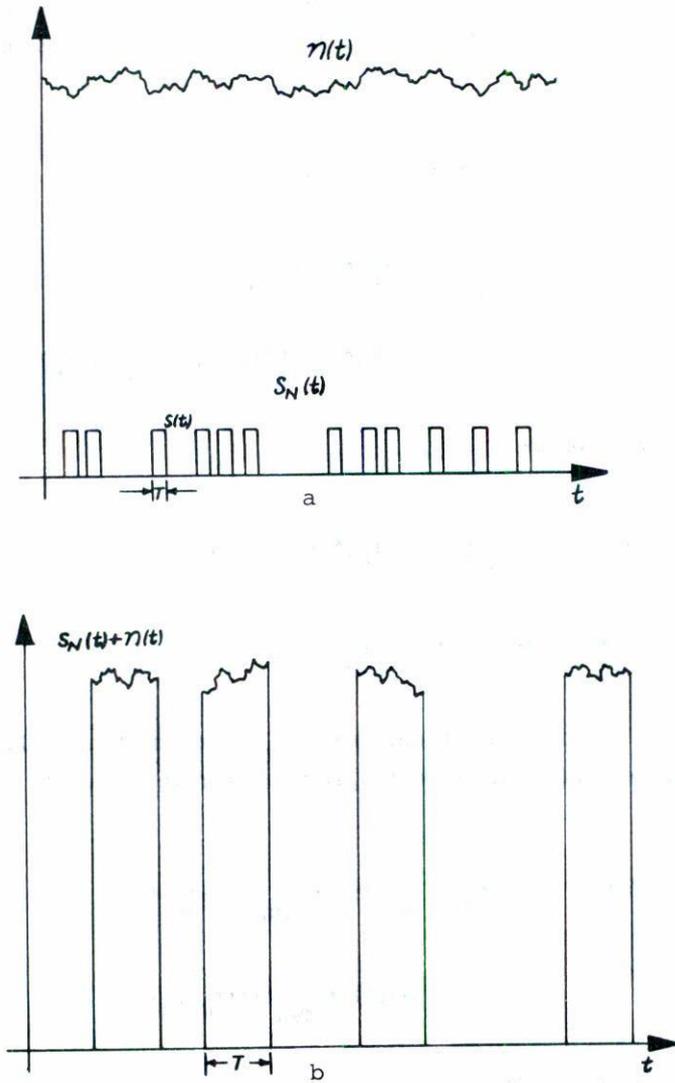


Fig. 4. Tren aleatorio de pulsos idénticos sumergidos en ruido blanco gaussiano estacionario:
 a. Ilustración separada del tren y del ruido. Se ha elegido por simplicidad, un perfil rectangular para los pulsos.
 b. Ilustración ampliada de las muestras de ruido blanco gaussiano tomadas por los pulsos del tren.

convolución (apéndice B), tendremos la respuesta del filtro cuando el tren está sumergido en el ruido $n(t)$, el cual tomaremos como blanco gaussiano estacionario:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= s_N^*(-\tau) * s_N(\tau) + s_N^*(-\tau) * n(\tau) \\
 &= \Gamma_{ss}(\tau) * \sum_{n,m} [\delta(\tau^2 - t_n) * \delta(\tau^2 - t_m)] + \\
 &\quad [s^*(-\tau^2) * n(\tau^2)] * \sum_n \delta(\tau - t_n) \quad (12)
 \end{aligned}$$

donde, de acuerdo con la Ec. (3),

$$s_\theta(t) = \Gamma_{ss}(\tau) * \sum_{n,m} [\delta(\tau^2 - t_n) * \delta(\tau^2 - t_m)] \quad (13,a)$$

$$n_\theta(t) = [s^*(-\tau^2) * n(\tau^2)] * \sum_n \delta(\tau - t_n) \quad (13,b)$$

siendo $s_\theta(t)$ la autocorrelación del tren y $n_\theta(t)$ el ruido de salida del filtro. La sumatoria que aparece en (13,a) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n,m} \delta(\tau^2 - t_n) * \delta(\tau^2 - t_m) &= \sum_n \delta(\tau) + \sum_{m \neq n} \delta(\tau + t_m - t_n) \\
 &= N\delta(\tau) + \sum_{m \neq n} \delta(\tau + t_m - t_n)
 \end{aligned}$$

de manera que (13,a) queda

$$\begin{aligned}
 s_\theta(t) &= \Gamma_{ss}(\tau) * [N\delta(\tau) + \sum_{m \neq n} \delta(\tau + t_m - t_n)] \\
 &= N \Gamma_{ss}(t) + \sum_{m \neq n} \Gamma_{ss}(t + t_n - t_m) \quad (14)
 \end{aligned}$$

De esta expresión se concluye que la autocorrelación del tren es, a su vez, una secuencia de pulsos cada uno de los cuales tiene un perfil $\Gamma_{ss}(t)$, una duración $2T$ (apéndice B.2) y una amplitud que depende de la aleatoriedad de la secuencia de dicho tren, esto, es, del número de autocorrelaciones individuales que contribuyen a la autocorrelación del tren para cada uno de los valores de m y n . Por lo tanto el pico central de autocorrelación, definido por el primer término de la Ec. (14), está formado por N contribuciones, mientras que cada uno de los pulsos del fondo, definidos por los términos de la sumatoria de la misma ecuación, estará formado por un número de contribuciones menor que N . En efecto, la potencia máxima del pico central es significativamente mayor que la potencia de cualquiera de los pulsos individuales del fondo. De hecho, mientras la potencia máxima de dicho pico central es

$$I_p = |s_s(0)|^2 = N^2 \Gamma_{ss}^2(0)$$

la potencia total del fondo es

$$I_f = N(N-1) \Gamma_{ss}^2(0) \quad .$$

En consecuencia, el contraste pico-fondo para la autocorrelación del tren será

$$C = \frac{I_p}{I_f} = \frac{N}{N-1}$$

lo cual implica que cuando $N \gg 1$ entonces $C \sim 1$, es decir, la potencia concentrada en el pico será igual a la potencia distribuida en el fondo. La importancia de este resultado consiste en indicar que para asegurar un reconocimiento exitoso, basta con tener en cuenta el pico central de autocorrelación del tren, pues, el fondo quedará sumergido en el ruido (Fig.5).

De la Ec. (13,b) se concluye, a su vez, que $n_o(t)$ es el resultado de la superposición de muestras tomadas sobre el ruido de entrada, $n(t)$, por los

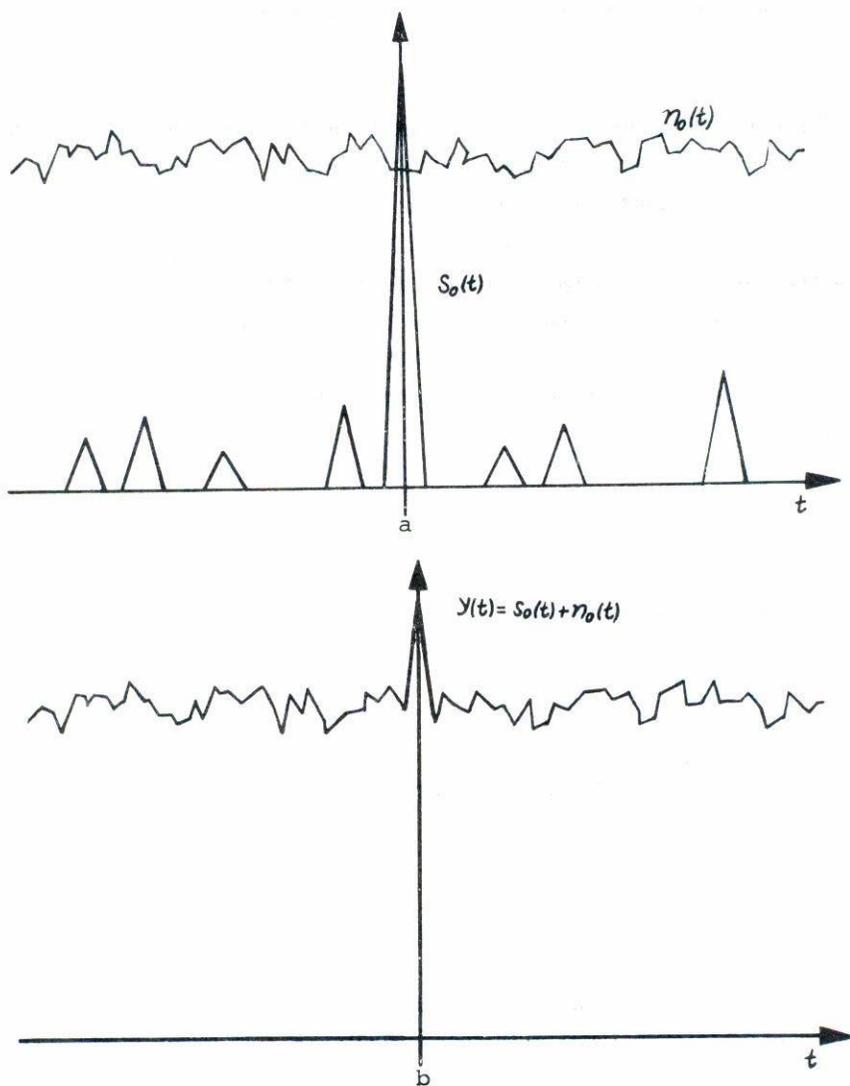


Fig. 5. Reconocimiento de un tren aleatorio de pulsos rectangulares idénticos:
 a. Ilustración separada de las ecuaciones (13,a) y (13,b) para el caso en que el perfil de los pulsos es rectangular.
 b. Ilustración de la Ec. (12) para el mismo caso.

pulsos del patrón (Fig.4). De ahí que la estadística de las muestras individuales y de su superposición dependa de $n(t)$, $s(t)$ y la secuencia temporal $\{t_n\}$. Cuando $n(t)$ es ruido blanco gaussiano estacionario y $s(t)$ es un perfil suave con duración significativamente mayor que las fluctuaciones de $n(t)$, las muestras tomadas por el patrón serán también ruido blanco Gaussiano estacionario y, además, serán estadísticamente idénticas e incoherentes. Por consiguiente, $n_0(t)$ describe la superposición incoherente de dichas muestras, de acuerdo con la estadística descrita en el apartado anterior. Reemplazando (14) en (12) tendremos la respuesta del filtro que ejecuta el reconocimiento del tren (Fig.5)

$$y(t) = N\Gamma_{SS}(t) + \sum_{n \neq m} \Gamma_{SS}(t+t_n-t_m) + n_0(t) \quad (15)$$

Es claro que el éxito del reconocimiento depende de que pueda llevarse a cabo la identificación del pico central de la autocorrelación del tren entre el ruido de salida del filtro, esto es, que dicho pico central sobresalga de entre las fluctuaciones del ruido de manera suficiente para minimizar los riesgos de falsa alarma y detección fallida. La garantía del éxito, por lo tanto, está asegurada por la satisfacción de la siguiente relación:

$$\frac{I_P - \bar{I}_N}{\bar{I}_N} > c_N \quad (16)$$

El miembro izquierdo de (16) es una medida del contraste entre el pico de autocorrelación del patrón y el ruido de salida, y el miembro derecho es la fluctuación relativa de dicho ruido de salida. Empleando los resultados antes obtenidos, podemos reescribir (16) así

$$\frac{N^2 \Gamma_{SS}^2(0)}{\bar{I}_N} - 1 > \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (17)$$

donde, de acuerdo con (5),

$$\text{SNR}_N = \frac{N^2 \Gamma_{SS}^2(0)}{\bar{I}_N} = N \cdot \frac{\Gamma_{SS}^2(0)}{\bar{I}}$$

y (17) quedaría

$$\text{SNR}_N = 1 \gg \frac{1}{\sqrt{N}}$$

o bien,

$$N \cdot \frac{\Gamma_{SS}^2(0)}{\bar{I}} = 1 \gg \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (18)$$

donde $\Gamma_{SS}(0)$ es la potencia individual de un pulso del tren e \bar{I} es la potencia promedio del ruido de entrada, de manera que (18) permite determinar la longitud que debe tener el tren, esto es, el número de pulsos necesario para que su presencia en la señal sea identificada exitosamente. Obviamente, dicha determinación exige una estimación del éxito del reconocimiento, la cual puede realizarse a partir de la función de distribución de probabilidades para la intensidad del ruido de salida (apéndice D.2),

$$\Phi_N(I) = \left[1 - \text{EXP} - \left(\frac{I}{\sigma^2} \right) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{I}{\sigma^2} \right)^k \right] u(I) \quad (19)$$

La probabilidad de que el ruido de salida tenga fluctuaciones que oculten el pico de autocorrelación del tren será⁽⁷⁾

$$\begin{aligned} P[\bar{I}_N \leq I \leq I_p] &= \Phi_N(I_p) - \Phi_N(\bar{I}_N) \\ &= \text{EXP} \left[- \frac{I_p}{\sigma^2} \right] \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{I_p}{\sigma^2} \right)^k - \text{EXP} \left[- \left(\frac{\bar{I}_N}{\sigma^2} \right) \right] \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\bar{I}_N}{\sigma^2} \right)^k, \end{aligned}$$

y como $\sigma^2 = \bar{I}$, $\bar{I}_N = N\bar{I}$ (apéndices D.2, D.3) tendremos

$$P[\bar{I}_N \leq I \leq \bar{I}_p] = \text{EXP}[-N(\text{SNR}_N)] \sum_{k=0}^{N-1} \frac{N^k}{k!} (\text{SNR}_N)^k = \text{EXP}(-N) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{N^k}{k!} .$$

Nótese que cuando $N \rightarrow \infty$, $P[\bar{I}_N \leq I \leq \bar{I}_p] \rightarrow 0$, en consecuencia, mientras más largo sea el tren menor será la probabilidad de que su pico de autocorrelación sea oculto por las fluctuaciones del ruido de salida y, por lo tanto, la probabilidad de éxito en el reconocimiento será mayor. Podemos, entonces, definir esta probabilidad de éxito como

$$\begin{aligned} P_E &= 1 - P[\bar{I}_N \leq I \leq \bar{I}_p] \\ &= 1 + \text{EXP}(-N) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{N^k}{k!} = \text{EXP}(-N(\text{SNR}_N)) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{N^k}{k!} (\text{SNR}_N)^k . \end{aligned} \quad (20)$$

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha estudiado, de manera formal, el proceso de reconocimiento de un tren aleatorio de pulsos idénticos, sumergido en ruido blanco gaussiano estacionario, mediante la técnica de filtración adaptada (matched filtering). Los resultados obtenidos (expresiones (18) y (20)) permiten, respectivamente, determinar la longitud adecuada para que la identificación del tren sea exitosa y estimar el éxito de dicho proceso de identificación.

APENDICES

A. Función delta de Dirac⁽⁴⁾

A.1 Definición:

$$\delta(t - t_0) = 0 \quad \text{para} \quad t \neq t_0 \quad \text{y}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} \delta(t - t_0) dt = 1 \quad \text{con} \quad \epsilon > 0$$

A.2 Simetrías:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{EXP}(+i\omega t) dt, \quad \text{por lo tanto,} \quad \delta(t) = \delta^*(t) \quad \text{y}$$

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

A.3 Tamización o muestreo (shifting):

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t)$$

B. Algunas propiedades de la convolución⁽⁴⁾

B.1 Definición:

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

B.2 Relación con la correlación:

$$\Gamma_{fg}(\tau) = f(t) * g^*(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t-\tau)dt$$

si $f(t) = g(t)$, tendremos

$$\Gamma_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f^*(t-\tau)dt \quad \text{y} \quad \Gamma_{ff}(0) = \|f(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

de estas expresiones se concluye fácilmente que, si $f(t)$ es un pulso de duración T , su autocorrelación tendrá una duración de $2T$.

B.3 Transformada de Fourier: simbolizando la transformada de Fourier con la letra F , tenemos que si $F(\omega) = F[f(t)]$ y $G(\omega) = F[g(t)]$ entonces

$$F[f(t)*g(t)] = F(\omega) G(\omega)$$

B.4 Aplicación a sistemas lineales (Fig.1): un sistema lineal es un dispositivo caracterizado por una función $h(t)$ y tal que, ante una excitación (función de entrada) $f(t)$ entrega una respuesta

$$y(t) = h(t)*f(t)$$

La función $h(t)$ se denomina función de respuesta al impulso (FRI) porque, de acuerdo con A.3, si la excitación es la función impulso o del δ de Dirac, la respuesta será precisamente $h(t)$.

C. Función paso unitario, escalón unitario o función de Heaviside⁽⁴⁾

C.1 Definición:

$$u(t-t_0) = \begin{cases} 1 & t > t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$$

$$G.2 \quad \int_a^b f(t) u(t-t_0) dt = \int_{t_0}^b f(t) dt \quad \text{para } a < t_0 \text{ y } b > t_0$$

D. Ruido blanco gaussiano estacionario ^(1, 3, 8)

D.1 Distribución de amplitudes:

$$\rho(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \text{EXP} \left[-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\sigma^2} \right], \quad -\infty < n < \infty$$

donde \bar{n} es la amplitud promedio y σ^2 es la varianza.

D.2 Distribución de potencia: teniendo en cuenta la independencia estadística de los valores de la amplitud, tendremos

$$\rho(I) = 2\pi\rho(n)\rho(n) = \frac{1}{\sigma^2} \text{EXP} \left(-\frac{I}{\sigma^2} \right), \quad 0 \leq I < \infty$$

$$\rho(I) = \frac{1}{\sigma^2} \text{EXP} \left(-\frac{I}{\sigma^2} \right) u(I)$$

donde $I = (n - \bar{n})^2$

a. Normalización $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(I) dI = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} \text{EXP} \left(-\frac{I}{\sigma^2} \right) dI = 1$

b. Potencia promedio: $\bar{I} = \int_{-\infty}^{\infty} I\rho(I) dI = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} I \text{EXP} \left(-\frac{I}{\sigma^2} \right) dI = \sigma^2$

c. Varianza: $\epsilon^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (I-\bar{I})^2 \rho(I) dI = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} (I-\bar{I})^2 \text{EXP} \left(-\frac{I}{\sigma^2} \right) dI = \bar{I}^2$

d. Fluctuación relativa: $\epsilon = \frac{\epsilon}{\bar{I}} = 1$

D.3 Superposición incoherente de muestras estadísticamente idénticas: dadas las distribuciones $\rho_i(x)$ y $\rho_j(x)$ para la misma variable aleatoria x , la distribución de su superposición será

$$\rho_{i+j}(x) = \rho_i(x) * \rho_j(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_i(y) \rho_j(x-y) dy$$

Por lo tanto, la distribución de potencia correspondiente a la superposición incoherente de muestras de ruido blanco gaussiano será

$$\rho_N(I) = \rho_1(I) * \rho_2(I) * \dots * \rho_N(I)$$

Teniendo en cuenta que $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_j(\xi) = F[\rho_j(I)] = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{\sigma^2}{1+i\sigma^2\xi}$, $i^2 = -1$ y aplicando B.3, tendremos

$$\rho_N(\xi) = \prod_{j=1}^N \rho_j(\xi) = \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^N \left[\frac{\sigma^2}{1+i\sigma^2\xi}\right]^N$$

para un conjunto de muestras estadísticamente idénticas. Aplicando la transformada de Fourier inversa, obtendremos la distribución de potencia correspondiente a la superposición de las muestras ⁽⁵⁾:

$$\rho_N(I) = \frac{1}{\sigma^{2N}} \cdot \frac{I^{N-1}}{(N-1)!} \cdot \text{EXP}\left(-\frac{I}{\sigma^2}\right) \cdot u(I)$$

a. Normalización:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_N(I) dI = \frac{1}{\sigma^{2N}(N-1)!} \int_0^{\infty} I^{N-1} \cdot \text{EXP}\left(-\frac{I}{\sigma^2}\right) dI = \frac{\Gamma(N)}{(N-1)!} = 1$$

b. Potencia promedio

$$\bar{I}_N = \int_{-\infty}^{\infty} I \rho_N(I) dI = \frac{1}{\sigma^{2N}(N-1)!} \int_0^{\infty} I^N \cdot \text{EXP}\left(-\frac{I}{\sigma^2}\right) dI = \frac{\sigma^2(N+1)\Gamma(N+1)}{\sigma^{2N}(N-1)!}$$

$$\bar{I}_N = N\sigma^2$$

c. Varianza:

$$\epsilon_N^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (I - \bar{I}_N)^2 \rho_N(I) dI = \frac{1}{\sigma^{2N} (N-1)!} \int_0^{\infty} (I - \bar{I}_N)^2 I^{N-1} \text{EXP} \left(-\frac{I}{\sigma^2} \right) dI$$

$$\epsilon_N^2 = N(\sigma^2)^2$$

d. Fluctuación relativa:

$$c_N = \frac{\epsilon_N}{\bar{I}_N} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

e. Comportamiento límite para $N=1$: $\rho_1(I) = \frac{1}{\sigma^2} \text{EXP} \left(-\frac{I}{\sigma^2} \right) u(I)$,

$$\bar{I}_1 = \sigma^2 \quad , \quad \epsilon_1^2 = \bar{I}_1^2 \quad , \quad c_1 = 1$$

f. Función de distribución de probabilidades

Definición:

$$\Phi(I) = \int_{-\infty}^I \rho_N(I) dI = \frac{1}{\sigma^{2N} (N-1)!} \int_0^I I^{N-1} \text{EXP} \left(-\frac{I}{\sigma^2} \right) dI$$

$$\Phi(I) = - \text{EXP} \left(-\frac{I}{\sigma^2} \right) \left[1 + \dots + \frac{I^{N-2}}{\sigma^{2(N-2)} (N-2)!} + \frac{I^{N-1}}{\sigma^{2(N-1)} (N-1)!} \right]_0^I$$

$$\Phi(I) = 1 - \text{EXP} \left(-\frac{I}{\sigma^2} \right) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{I^k}{\sigma^{2k} k!} u(I)$$

Comportamiento asintótico:

$$\Phi(0) = 0 \quad , \quad \Phi(\infty) = 1 \quad , \quad \Phi(I)|_{N=1} = 1 - \text{EXP} \left(-\frac{I}{\sigma^2} \right)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Phi(I) = 1 - \lim_{N \rightarrow \infty} \text{EXP} \left(-\frac{I}{\sigma^2} \right) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{I^k}{\sigma^{2k} k!} = 1 - \text{EXP} \left(-\frac{I}{\sigma^2} \right) \text{EXP} \frac{I}{\sigma^2}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Phi(I) = 0$$

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece sinceramente los comentarios del Dr. Peter Barlai y del profesor Fernando Medina (Grupo de Óptica y Teoría de la Información, Departamento de Física, Universidad de Antioquia) respecto al contenido de este artículo.

REFERENCIAS

1. Franks, L.E., *Signal Theory*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
2. Vander Lugt, A. *Coherent Optical Processing*. Proc. IEEF (62), 1300, 1974
Skolnik, M., *Radar Handbook*. McGraw-Hill, New York, 1970.
Poor, V., *Robust Matched Filters*. IEEE Trans. Inf. Theory, vol IT-29, No. 5, 677, Sep. 1983.
Milne, P.J. *et al.* An Application of Walsh functions to the monitoring of electrocardiograph signals. 1972 *Proceedings Applications of Walsh functions* Washington D.C., AD744650.
3. Davenport, W. and W. Root. *An introduction to the theory of random signals and noise*. McGraw-Hill, New York, 1958.
4. North, D.O. "An analysis of the factors which determine signal/noise discrimination in pulsed-carrier systems" *Proc. IEEE*, 1016, July 1963.
5. Hsu, H.P. *Análisis de Fourier*. Fondo Educativo Interamericano S.A., México 1973.
6. Skolnik, M. *Introduction to radar systems*. Mc Graw-Hill, New York, 1962.
7. Kreysig, E. *Introducción a la estadística matemática*. Principios y métodos. Limusa-Wiley S.A., México, 1973.
8. Parzen, E. *Procesos Estocásticos*. Paraninfo, Madrid, 1972.