

UNA MANIFESTACION MACROSCOPICA DEL PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE

Alejandro Frank y Ramón López Peña

Centro de Estudios Nucleares, UNAM
Apdo. Postal 70-543, México, D.F.

Julio Sheinbaum

Instituto de Ciencias del Mar y Limnología
Circuito Exterior, C.U., México, D.F.

(recibido julio 30, 1986; aceptado, septiembre 22, 1986)

RESUMEN

Comúnmente se considera que el principio de incertidumbre de Heisenberg tiene relevancia únicamente cuando se consideran sistemas físicos de dimensiones microscópicas. En el presente artículo analizamos su efecto en un problema clásico, consistente en un sistema compuesto por dos pelotas, una de ellas rebotando sobre la otra.

ABSTRACT

It is usually believed that Heisenberg's Uncertainty Principle has relevance only when physical systems of microscopic dimensions are considered. In this article we analyze its effect on a classical problem, consisting of a system of two balls, one of them bouncing on the other.

Una de las suposiciones básicas implícitas en la mecánica clásica es que, en principio, un sistema mecánico puede ser descrito con cualquier grado de precisión, *i.e.*, dadas las condiciones iniciales y las fuerzas que actúan entre los cuerpos, es posible especificar en todo tiempo las posiciones y velocidades futuras. Por otro lado, de acuerdo al principio de incertidumbre de Heisenberg⁽¹⁾, es imposible especificar simultáneamente y de manera precisa el valor de la posición y el momento lineal de una partícula. Este principio es reflejo de la naturaleza fundamental de los fenómenos físicos que acontecen en el mundo microscópico y su importancia e influencia son mayúsculas en campos tales como la física nuclear y la física atómica.

La razón por la cual este principio fundamental de la naturaleza no se manifiesta en forma obvia cuando estudiamos sistemas macroscópicos, pueden entenderse a partir de la forma explícita de éste⁽¹⁾:

$$\Delta X \cdot \Delta P_x \geq \hbar/2 \quad , \quad (1)$$

donde ΔX y ΔP_x son la incertidumbre en la posición y el momento lineal de la partícula y $\hbar = 1.0545 \times 10^{-27}$ erg-seg, es la constante de Planck. Ya que $P_x = mV_x$, vemos que podemos escribir (1) como

$$\Delta X \cdot \Delta V_x \geq \hbar/2m \quad , \quad (2)$$

y, para cualquier masa macroscópica, el producto de las incertidumbres en la posición y en la velocidad se vuelven despreciables. Por ejemplo, si $m = 1$ gr., la relación (2) da lugar a la condición

$$\Delta X \cdot \Delta V_x \geq .527 \times 10^{-27} \text{ cm. cm/seg.} \quad , \quad (3)$$

mientras que para la masa de un electrón, $m_e = .911 \times 10^{-27}$ gr, da lugar a

$$\Delta X \cdot \Delta V_x \geq .578 \text{ cm. cm/seg.} \quad (4)$$

Las relaciones (1) y (2) pueden interpretarse como cotas superiores a la precisión con que es posible medir simultáneamente la posición y el momento (o la velocidad) de una partícula, *i.e.*, por más refinamientos en nuestro instrumental de medición, la precisión no puede superar el límite impuesto por la igualdad en estas relaciones. De este modo, las Ecs. (3) y (4) indican el rango de incertidumbre intrínseco a la medición simultánea de posiciones y velocidades en la mecánica clásica y cuántica, respectivamente.

Los razonamientos expuestos arriba parecen indicar que los efectos de la mecánica cuántica, y por ende el principio de incertidumbre, pueden desprejiciarse por completo para sistemas clásicos. La magnitud de la incertidumbre implicada por la Ec. (3) parece ser por completo inobservable. Una consecuencia de esto es que es posible utilizar con toda confianza las ecuaciones de movimiento clásicas para describir dichos sistemas. Sin embargo, estas ecuaciones no son suficientes para la solución del problema. Como es bien sabido, es necesario especificar también las condiciones iniciales del sistema, y es aquí donde el principio de incertidumbre puede jugar un papel de gran importancia. Se menciona en libros de texto algunos ejemplos interesantes de la manifestación macroscópica de este efecto⁽²⁾. Sin embargo, estos se limitan en ocasiones a la sección de problemas o no corresponden necesariamente a los casos más ilustrativos. El ejemplo que se discute a continuación es particularmente interesante por la simplicidad del análisis y la claridad con que se manifiesta este fenómeno.

Consideremos el problema propuesto por Rothman⁽³⁾, que consiste en un experimento idealizado con dos pelotas idénticas de ping-pong. Supongamos que estas pelotas, perfectamente elásticas, se encuentran en una caja donde se ha creado un vacío completo. Así mismo, supondremos que podemos desprejiciar los efectos de la rotación terrestre (o que llevamos a cabo el experimento en alguno de los polos). Adherimos con pegamento una

de las pelotas en el suelo de la caja, mientras que la otra es llevada a una altura determinada sobre la otra cuidando de que los centros de ambas queden en la vertical. Idealmente, de acuerdo a la mecánica clásica, es posible dejar caer la pelota con condiciones iniciales

$$(x, y, z) = (0, 0, \ell), (V_x, V_y, V_z) = (0, 0, 0) \quad , \quad (5)$$

con lo cual la solución del problema es que la segunda pelota rebotará por siempre verticalmente sobre la otra. Sin embargo, debido al principio de incertidumbre, las condiciones iniciales (5) son imposibles de llevar a cabo en la práctica, ya que violan la condición (1) en las tres direcciones (x, y, z) de movimiento. Llamemos x a la dirección en que impartimos inadvertidamente velocidad transversal a la pelota. De igual modo, ℓ denotará altura real a la que la soltamos. Usaremos la mecánica clásica para determinar el tiempo necesario para que la pelota caiga y golpee a la otra; lo que es perfectamente válido, como se mencionó antes. Este cálculo da como resultado (ver figura)

$$t_0 = \sqrt{\frac{2(\ell - 2a)}{g}} \quad , \quad (6)$$

donde a es el radio de la pelota. Interpretaremos a x y a V_x como la posición y la velocidad iniciales de nuestra pelota. Demostraremos a continuación que el desplazamiento horizontal mínimo en la trayectoria de la pelota se produce cuando se satisface la condición

$$|\Delta V_x \cdot t_0| = |\Delta X| \quad (7)$$

Para ello, basta en el caso general llevar a cabo un cálculo simple de minimización sujeto a la restricción (2). Denotaremos por X_1 este desplazamiento y por tanto

$$X_1 = \Delta X + t_0 \cdot \Delta V_x \quad , \quad (8)$$

donde ΔX y ΔV_x pueden tener signos opuestos o iguales. En el primer caso la demostración es inmediata pues el valor mínimo de X_1 es obviamente 0. En el segundo caso, minimizamos la función

$$F = X_1 - \lambda(\Delta X \cdot \Delta V_x - \hbar/2m) \quad , \quad (9)$$

siendo λ un multiplicador de Lagrange. Haciendo $\frac{\partial F}{\partial \Delta X} = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial \Delta V_x} = 0$, llegamos de nuevo a la condición (7). Claramente, el primer caso^x corresponde a la condición más favorable (el desplazamiento horizontal inicial ΔX cancela el corrimiento $\Delta V_x \cdot t_0$ durante la caída) pero hemos incluido el caso general por completez. Usando la condición (7) en (2), encontramos

$$\Delta V_x = \sqrt{\frac{\hbar}{2mt_0}} \quad , \quad (10)$$

para la velocidad transversal que minimiza la desviación de la pelota, de acuerdo al principio de incertidumbre. Para ilustrar el efecto de (10) supondremos un caso particular en que $\ell = 10$ a. Ya que para una pelota de ping-pong⁽⁴⁾ $m = 2.5$ gr. y $a = 1.905$ cm, las relaciones (6) y (10) implican

$$t_0 = .19 \text{ seg.} \quad , \quad (11.a)$$

$$\Delta V_x = 3.33 \times 10^{-14} \text{ cm/seg.} \quad (11.b)$$

Aunque extremadamente pequeña, la velocidad transversal (11.b) es suficiente para provocar que la pelota solo efectúe un número pequeño de botes antes de salir despedida. Para llevar a cabo este cálculo basta llevar a cabo un análisis de índole geométrico, ya que debido a la pequeñez de (11.b), podemos substituir las parábolas que constituyen las trayectorias en los rebotes, por líneas rectas. En la figura mostramos las variables que utilizamos para llevar a cabo el cálculo. Estas son: a) El

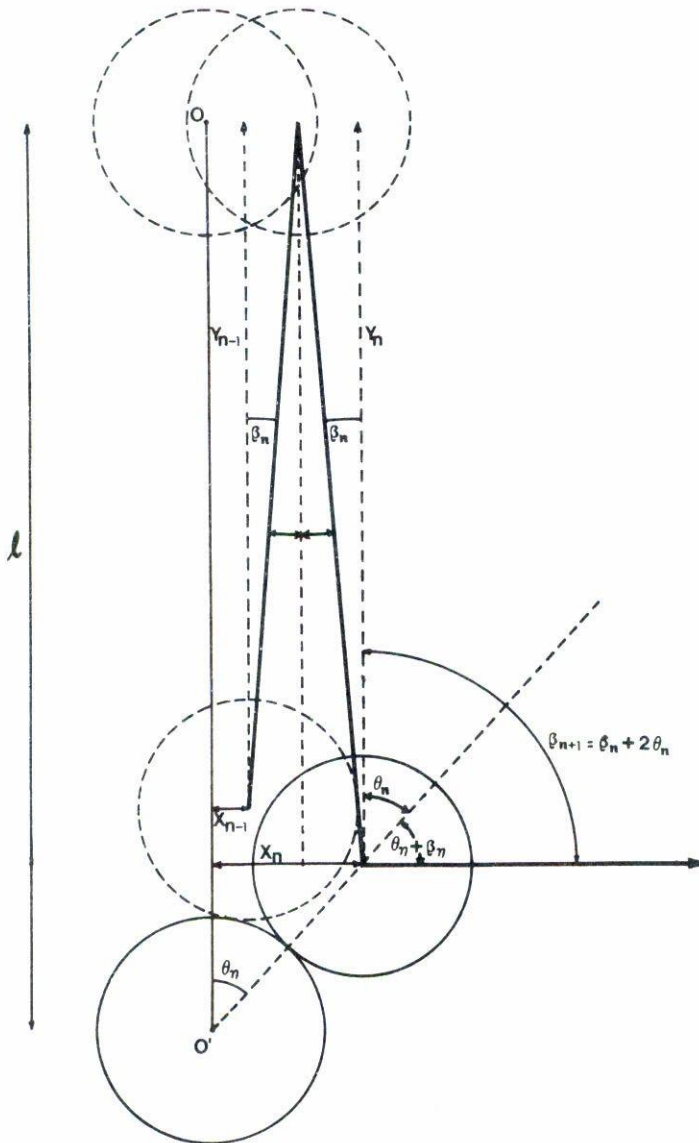


Fig. 1. Los parámetros que especifican la trayectoria de la pelota, en la aproximación de líneas rectas substituyendo las parábolas.

desplazamiento horizontal X_n a partir del origen 0, donde el subíndice n se refiere al número de rebotes llevados a cabo hasta ese momento. En el caso más favorable, $X_1 = 0$, como se explicó arriba. b) Los desplazamientos verticales Y_n medidos desde la línea horizontal superior que une las posiciones de altura máxima de la pelota. De nuevo, en el caso más favorable, $Y_1 = \ell - 2a$. c) Los ángulos θ_n , medidos entre la vertical $\overline{00'}$, y la línea que une a $0'$ con el punto de contacto entre las pelotas. Esta variable permite calcular en forma conveniente el máximo número de rebotes, como veremos más adelante. d) Los ángulos β_n , que definimos como los ángulos formados entre la vertical y las trayectorias (líneas gruesas) de la pelota. El ángulo β_1 es nuestra condición inicial, calculando en base a la condición (7).

De la figura, vemos que se satisfacen las siguiente ecuaciones:

$$Y_n + 2a\cos\theta_n = \ell \quad , \quad (12.a)$$

$$\tan\theta_n = X_n/(\ell - y_n) \quad , \quad (12.b)$$

$$\tan\beta_n \approx (X_n - X_{n-1})/2Y_{n-1} \quad , \quad (12.c)$$

$$\beta_{n+1} = \beta_n + 2\theta_n \quad . \quad (12.d)$$

Para resolver este sistema de ecuaciones, aprovechamos que los ángulos β_n y θ_n son pequeños (con la excepción de los últimos, antes de que la pelota salga despedida) por lo que desarrollamos las tangentes y el coseno en (12) hasta orden cuadrático en los ángulos. Conservando términos hasta ese orden, llegamos mediante las primeras tres relaciones a la condición:

$$\beta_n = (\theta_n - \theta_{n-1})/(\ell/a - 2) \quad , \quad (13)$$

que junto con (12.d) nos lleva a la ecuación

$$\beta_{n+1} - 2\left(\frac{\ell-a}{a}\right) \beta_n + \beta_{n-1} = 0 \quad . \quad (14)$$

Esta ecuación de recurrencia puede ser resuelta en forma exacta, proponiendo una solución de tipo $\beta_n = A \cosh(n\gamma)$, lo que determina las constantes A y γ si es que especificamos la condición inicial β_1 . Para el caso $\ell=10a$, encontramos de las Ecs. (11)

$$\beta_1 = \frac{t_0 \Delta V}{\ell - 2a} x = 4.15 \times 10^{-16} \text{ rad} \quad . \quad (15)$$

Al substituir la forma de β_n en (14) encontramos

$$\cosh \gamma = \frac{\ell-a}{a} = 9 \quad , \quad (16.a)$$

y de (15)

$$A = 4.6 \times 10^{-17} \quad . \quad (16.b)$$

Para resolver el problema, vemos que

$$\beta_{n+1} = \frac{A}{2} (e^{(n+1)\gamma} + e^{-(n+1)\gamma}) \approx \frac{A}{2} e^{(n+1)\gamma} \quad , \quad (17.a)$$

de donde

$$\beta_{n+1} = e^\gamma \beta_n \approx 18 \beta_n \quad . \quad (17.b)$$

Ya que de (16.a) $\gamma \approx 2.89$, el error introducido en (17) es despreciable para toda n. Por último, de las Ecs. (12.d), (13) y (17.b) encontramos

$$\theta_n \approx 1/2 (e^\gamma - 1) = 17/2 \beta_n \quad , \quad (18.a)$$

y

$$\theta_{n+1} \approx 17 \theta_n \quad (n \geq 2) \quad , \quad (18.b)$$

que es la ecuación de recurrencia buscada. La relación (18.b) es válida para $n \geq 2$, ya que $\theta_1 = 0$ en el caso considerado, lo que de (12.d) implica $\beta_1 = \beta_2$. De (18.a) encontramos

$$\theta_2 = 3.52 \times 10^{-15} \text{ rad} \quad . \quad (19.a)$$

Actuando recursivamente con (18.b) encontramos finalmente

$$\theta_n \approx (17)^{n-1} \theta_2 \quad . \quad (19.b)$$

La condición de que la pelota bote un número total de N veces se especifica por la relación

$$\theta_N = 90^\circ = 1.57 \text{ rad} \quad , \quad (20)$$

y comparando (19.b) y (20) encontramos

$$N \approx 12 \quad , \quad (21)$$

para el máximo número de botes compatible con el principio de incertidumbre. Este resultado es consistente con las afirmaciones de Rothman⁽³⁾.

Hemos querido presentar la solución completa de este sistema clásico simple, para ilustrar la forma como el principio de incertidumbre da lugar a una solución completamente diferente a la esperada desde el punto de vista clásico. Esto será siempre el caso, cuando el sistema sea tal que cualquier desviación en las condiciones iniciales provoquen una desviación grande en las trayectorias solución. Estos problemas son bien conocidos y se insertan dentro de la teoría matemática conocida como la teoría de catástrofes⁽⁵⁾.

AGRADECIMIENTO

Agradecemos a R. Lemus y a M. Bolton su ayuda técnica.

REFERENCIAS

1. Shiff L. I., *Quantum Mechanics*, McGraw-Hill (1968).
2. Ver por ejemplo, Dicke R. H. and Wittke J.P., *Introduction to Quantum Mechanics*, Addison-Wesley (1960, pág. 35, problema 2.2 y Eisberg R. y Resnick R., *Física Cuántica*, Limusa (1979), pág. 111, problema 27.
3. Rothman M.A., *The Laws of Physics*, Basic Books (1964).
4. *Enciclopedia Británica*.
5. Gilmore R., *Catastrophe Theory for Scientist and Engineers*, John Wiley (1981).