*Enseñanza* *Revista Mexicana de Física* **33** *No. 1(1987) 95–113*

# Geometría y dinámica de trayectorias cónicas

**E. Ley-Koo***

*Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, Apdo. Postal 20-364, 01000 México, D.F.*

(recibido el 17 de abril de 1986; aceptado el 8 de agosto de 1986)

**Resumen.** Se analiza la dinámica de partículas en movimiento a lo largo de trayectorias cónicas. El análisis se realiza usando coordenadas curvilíneas ortogonales, asociadas a cada tipo de cónica, para identificar las fuerzas y las integrales de movimiento en caso de especial interés.

**Abstract.** We analyze the dynamics of particles in movement along conical trajectories. The analysis is made using orthogonal curvilinear coordinates, associated to each type conical, in order to identify the forces and integrals of movement in cases of special interest.

**PACS: 01.40; 03.20; 02.90**

## 1. Introducción

Los movimientos más simples y comunes que se observan en la naturaleza ocurren a lo largo de trayectorias rectilíneas, parabólicas, circulares y elípticas. En los cursos introductorios e intermedios de mecánica [1, 2] es usual estudiar estos tipos de movimientos individualmente, tanto cinemática como dinámicamente. A nivel más avanzado existen estudios que destacan el lugar especial de las órbitas elípticas [3] y el papel de las integrales de movimiento para que las órbitas sean cerradas [4].

En este trabajo se presenta un tratamiento conjunto y unificado de los movimientos a lo largo de trayectorias cónicas, destacando las

---

* Asesor del Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares.

características geométricas y dinámicas comunes a los sistemas de especial interés. El análisis se realiza usando coordenadas curvilíneas ortogonales asociadas a cada tipo de curva cónica. En la sección 2 se estudian sucesivamente los casos de movimientos en trayectorias *A)* circulares, *B)* radiales, *C)* elípticas, *D)* hiperbólicas y *E)* parabólicas. El estudio de los casos $A$ y $B$ usando coordenadas polares circulares no es novedoso [1, 2], pero se incluye como punto de partida para identificar algunos sistemas de interés dinámico y como punto de comparación para el estudio de los otros casos. Concretamente, en $A$ se estudian los sistemas *i)* con velocidad angular constante, *ii)* con período cuyo cuadrado es proporcional al cubo del radio, identificando la naturaleza radial y atractiva de las fuerzas y sus magnitudes proporcional al radio e inversamente proporcional al cuadrado del radio, respectivamente. El estudio en $B$ complementa al de $A$ determinando las energías potenciales correspondientes en función de la posición radial. Para los otros casos se estudian las siguientes situaciones correspondientes: *i)* Trayectorias cónicas recorridas con velocidades cónicas constantes, reconociendo que en los casos $C$ y $D$ la fuerza involucrada es central y proporcional al radio, y que en el caso $E$ la fuerza es constante. *ii)* Trayectorias cónicas descritas bajo la acción de fuerzas dirigidas hacia un foco, reconociendo que la magnitud de esas fuerzas es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco. *iii)* Trayectorias cónicas descritas bajo la acción de fuerzas que no realizan trabajo, identificando en cada caso las características de la fuerza. Además en todos los casos y situaciones se identifican y calculan las integrales de movimiento, dándoles la interpretación geométrica apropiada.

En la sección 3 se hace una discusión de los resultados obtenidos, destacando el hecho de que la magia de las órbitas elípticas [3] es extensiva a las trayectorias cónicas. También se señalan algunos puntos de interés didáctico en el estudio y enseñanza de aspectos geométricos y dinámicos de los sistemas analizados. Finalmente, se argumenta que este tipo de tratamiento permite reconocer que la unidad de la mecánica celeste y la mecánica sobre la superficie de la Tierra se extiende para incluir la mecánica en su interior, y también que esa unidad se presenta en el caso electrostático con ambas versiones, repulsiva y atractiva.

## 2. Geometría y dinámica de cónicas. Posiciones, desplazamientos, velocidades y aceleraciones en coordenadas y trayectorias cónicas

Los conjuntos de coordenadas circulares, elípticas y parabólicas se definen a través de sus relaciones con las coordenadas cartesianas. El vector de posición de los puntos en un plano están dados por las formas alternativas [5]

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \hat{\imath}x + \hat{\jmath}y, \\
&= \hat{\imath}r\cos\psi + \hat{\jmath}r\,\mathrm{sen}\,\psi, && (1A, B) \\
&= \hat{\imath}f\cosh u\cos v + \hat{\jmath}f\,\mathrm{senh}\,u\,\mathrm{sen}\,v, && (1C, D) \\
&= \hat{\imath}\xi\eta + \hat{\jmath}(\eta^2 - \xi^2)/2, && (1E)
\end{aligned}$$

en términos de las coordenadas cartesianas $(x, y)$, circulares $(r, \psi)$, elípticas $(u, v)$ y parabólicas $(\xi, \eta)$, respectivamente. Cada valor de las coordenadas radial $(0 \le r < \infty)$, angular $(0 \le \psi \le 2\pi)$, elíptica $(0 \le u < \infty)$, hiperbólica $(0 \le v \le 2\pi)$ y parabólicas $(-\infty < \eta < \infty$ y $-\infty < \xi < \infty)$ define un círculo, una recta radial, una elipse, una hipérbola y una parábola, respectivamente. Las elipses e hiperbólicas son confocales con semieje focal $f$ y excentricidades $1/\cosh u$ y $1/\cos v$, respectivamente. El foco de las parábolas está en el origen de coordenadas y los vértices se hallan sobre el eje de ordenadas a distancias $\eta^2/2$ y $\xi^2/2$ hacia arriba y hacia abajo, respectivamente.

El desplazamiento diferencial de un punto a otro en el plano se obtiene directamente de las Ecs. (1) en los diferentes sistemas de coordenadas:

$$\begin{aligned}
d\mathbf{r} &= \hat{r}\,dr + \hat{\psi}r\,d\psi, && (2A, B) \\
&= fh_e(u, v)(\hat{u}\,du + \hat{v}\,dv), && (2C, D) \\
&= h_p(\xi, \eta)(\hat{\xi}\,d\xi + \hat{\eta}\,d\eta), && (2E)
\end{aligned}$$

que están en términos de los vectores unitarios respectivos,

$$\hat{r} = \hat{\imath}\cos\psi + \hat{\jmath}\,\mathrm{sen}\,\psi, \quad \hat{\psi} = -\hat{\imath}\,\mathrm{sen}\,\psi + \hat{\jmath}\cos\psi, \tag{3A, B}$$

$$\hat{u} = (\hat{\imath}\,\mathrm{senh}\,u\cos v + \hat{\jmath}\cosh u\,\mathrm{sen}\,v)/h_e(u,v), \tag{3C}$$

$$\hat{v} = (-\hat{\imath}\cosh u\,\mathrm{sen}\,v + \hat{\jmath}\,\mathrm{senh}\,u\cos v)/h_e(u,v), \tag{3D}$$

$$\hat{\xi} = (\hat{\imath}\eta - \hat{\jmath}\xi)/h_p(\xi,\eta), \quad \hat{\eta} = (\hat{\imath}\xi + \hat{\jmath}\eta)/h_p(\xi,\eta), \tag{3E}$$

y donde

$$h_e(u,v) = \sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v} = \sqrt{\mathrm{senh}^2\,u + \mathrm{sen}^2\,v} \tag{4C, D}$$

y

$$h_p(\xi,\eta) = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}. \tag{4E}$$

Si el desplazamiento descrito por las Ecs. (2) se realiza en un intervalo diferencial de tiempo $dt$, la velocidad correspondiente toma las formas

$$\mathbf{v} = \hat{r}\dot{r} + \hat{\psi}r\dot{\psi}, \tag{5A, B}$$

$$\mathbf{v} = f h_e(u,v)(\hat{u}\dot{u} + \hat{v}\dot{v}), \tag{5C, D}$$

$$\mathbf{v} = h_p(\xi,\eta)(\hat{\xi}\dot{\xi} + \hat{\eta}\dot{\eta}), \tag{5E}$$

las cuales están en términos de las velocidades radial $\dot{r}$, angular $\dot{\psi}$, elíptica $\dot{u}$, hiperbólica $\dot{v}$, y parabólica $\dot{\xi}$ y $\dot{\eta}$, respectivamente.

A su vez el vector de aceleración en los respectivos sistemas de coordenadas toma las formas

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \hat{r}(\ddot{r} - r\dot{\psi}^2) + \hat{\psi}(z\dot{r}\dot{\psi} + r\ddot{\psi}), \tag{6A, B}$$

$$\mathbf{a} = f\left\{\hat{u}\left[h_e\ddot{u} + \frac{1}{h_e}(\cosh u\,\mathrm{senh}\,u(\dot{u}^2 - \dot{v}^2) + 2\cos v\,\mathrm{sen}\,v\dot{u}\dot{v})\right]\right.$$
$$\left.+\hat{v}\left[h_e\ddot{v} + \frac{1}{h_e}(\mathrm{sen}\,v\cos v(\dot{v}^2 - \dot{u}^2) + 2\cosh u\,\mathrm{senh}\,u\dot{u}\dot{v})\right]\right\},$$

$$\mathbf{a} = \hat{\xi}\left[h_p\ddot{\xi} + \frac{1}{h_p}(\xi(\dot{\xi}^2 - \dot{\eta}^2) + 2\eta\dot{\xi}\dot{\eta})\right] \tag{6C, D}$$

$$+\hat{\eta}\left[h_p\ddot{\eta} + \frac{1}{h_p}(\eta(\dot{\eta}^2 - \dot{\xi}^2) + 2\xi\dot{\xi}\dot{\eta})\right] \tag{6E}$$

La constricción del movimiento de una partícula de masa $m$ a lo largo de cada una de las cónicas bajo consideración queda expresada, respectivamente, por las condiciones siguientes:

$$r = r_0, \qquad \dot{r} = 0, \qquad \ddot{r} = 0, \tag{7A}$$
$$\psi = \psi_0, \qquad \dot{\psi} = 0, \qquad \ddot{\psi} = 0, \tag{7B}$$
$$u = u_0, \qquad \dot{u} = 0, \qquad \ddot{u} = 0, \tag{7C}$$
$$v = v_0, \qquad \dot{v} = 0, \qquad \ddot{v} = 0, \tag{7D}$$
$$\eta = \eta_0, \qquad \dot{\eta} = 0, \qquad \ddot{\eta} = 0. \tag{7E}$$

En tales casos los vectores de velocidad y aceleración se reducen a las formas respectivas:

$$\mathbf{v} = \hat{\psi} r_0 \dot{\psi}, \tag{5A)'$$
$$\mathbf{v} = \hat{r}\dot{r}, \tag{5B)'$$
$$\mathbf{v} = f h_e(u_0, v)\dot{v}\hat{v}, \tag{5C)'$$
$$\mathbf{v} = f h_e(u, v_0)\dot{u}\hat{u}, \tag{5D)'$$
$$\mathbf{v} = h_p(\xi, \eta,)\dot{\xi}\hat{\xi} \tag{5E)'$$

y

$$\mathbf{a} = -\hat{r} r_0 \dot{\psi}^2 + \hat{\psi} r_0 \ddot{\psi}, \tag{6A)'$$
$$\mathbf{a} = \hat{r}\ddot{r}, \tag{6B)'$$

$$\mathbf{a} = f\left\{-\frac{\hat{u}}{h_e}\cosh u_0 \operatorname{senh} u_0 \dot{v}^2 + \hat{v}\left[h_e \ddot{v} + \frac{1}{h_e}\operatorname{sen} v \cos v \dot{v}^2\right]\right\}, \tag{6C)'$$
$$\mathbf{a} = f\left\{\hat{u}\left[h_e \ddot{u} + \frac{1}{h_e}\cosh u \operatorname{senh} u \dot{u}^2\right] - \frac{\hat{v}}{h_e}\operatorname{sen} v_0 \cos v_0 \dot{u}^2\right\}, \tag{6D)'$$
$$\mathbf{a} = \hat{\xi}\left[h_p \ddot{\xi} + \frac{1}{h_p}\xi\dot{\xi}^2\right] - \frac{\hat{\eta}}{h_p}\eta_0 \dot{\xi}^2. \tag{6E)'$$

*i) Movimiento en trayectorias cónicas con velocidad cónica constante*

Los casos familiares de movimiento circular uniforme y movimiento rectilíneo uniforme corresponden a tomar una velocidad angular constante y una velocidad lineal constante, en las trayectorias respectivas:

$$\dot{\psi} = \omega, \qquad \ddot{\psi} = 0, \tag{8Ai}$$

$$\dot{r} = v_0, \qquad \ddot{r} = 0. \tag{8Bi}$$

Las contrapartes de movimiento alrededor de una elipse con velocidad hiperbólica constante, a lo largo de una hipérbola con velocidad elíptica constante y a lo largo de una parábola con velocidad parabólica constante, quedan definidas por las ecuaciones correspondientes:

$$\dot{v} = \omega, \qquad \ddot{v} = 0, \tag{8Ci}$$

$$\dot{u} = \omega, \qquad \ddot{u} = 0, \tag{8Di}$$

$$\dot{\xi} = \dot{\xi}_0, \qquad \ddot{\xi} = 0. \tag{8Ei}$$

Entonces los vectores de aceleración respectivos se reducen a

$$\mathbf{a} = -\hat{r} r_0 \omega^2, \tag{6Ai}$$

$$\mathbf{a} = 0, \tag{6Bi}$$

$$\mathbf{a} = -\frac{f(\hat{u}\cosh u_0 \operatorname{senh} u_0 - \hat{v} \operatorname{sen} v \cos v)\omega^2}{h_e(u_0, v)}, \tag{6Ci}$$

$$\mathbf{a} = \frac{f(\hat{u}\cosh u \operatorname{senh} u - \hat{v} \operatorname{sen} v_0 \cos v_0)\omega^2}{h_e(u, v_0)}, \tag{6Di}$$

$$\mathbf{a} = \frac{(\hat{\xi}\xi - \hat{\eta}\eta_0)\dot{\xi}_0^2}{h_p(\xi, \eta_0)}. \tag{6Ei}$$

La aplicación de la segunda ley de Newton permite reconocer que las fuerzas responsables de estos movimientos son, respectivamente,

$$\mathbf{F} = -m\omega^2 \mathbf{r}, \tag{9Ai, 9Ci}$$

$$\mathbf{F} = 0, \tag{9Bi}$$

$$\mathbf{F} = m\omega^2 \mathbf{r}, \tag{9Di}$$

y

$$\mathbf{F} = -m\dot{\xi}_0^2 \hat{\jmath}, \tag{9Ei}$$

donde en los casos $C$, $D$ y $E$ se ha hecho la identificación de los vectores respectivos usando las Ecs. (3) y (1). Se identifican de inmediato la ausencia de fuerzas para movimiento rectilíneo uniforme, el carácter armónico de la fuerza para los casos de movimiento circular y elíptico uniformes, la naturaleza repulsiva, radial y proporcional a la distancia de la fuerza asociada al movimiento a lo largo de la hipérbola y la constancia de la fuerza responsable del movimiento parabólico.

La constancia de las velocidades cónicas expresada en las Ecs. (8*i*), lleva asociada la variación lineal con el tiempo de las coordenadas respectivas. Esto permite escribir de inmediato los vectores de posición; y velocidad en función del tiempo:

$$\mathbf{r} = \hat{\imath} r_0 \cos\omega t + \hat{\jmath} r_0 \operatorname{sen}\omega t, \tag{1Ai}$$

$$\mathbf{v} = -\hat{\imath} r_0\omega \operatorname{sen}\omega t + \hat{\jmath} r_0\omega \cos\omega t, \tag{5Ai}$$

$$\mathbf{r} = \hat{r}(r_0 + v_0 t), \tag{1Bi}$$

$$\mathbf{v} = \hat{r} v_0, \tag{5Bi}$$

$$\mathbf{r} = \hat{\imath} f \cosh u_0 \cos\omega t + \hat{\jmath} f \operatorname{senh} u_0 \operatorname{sen}\omega t, \tag{1Ci}$$

$$\mathbf{v} = -\hat{\imath} f\omega \cosh u_0 \operatorname{sen}\omega t + \hat{\jmath} f\omega \operatorname{senh} u_0 \cos\omega t, \tag{5Ci}$$

$$\mathbf{r} = \hat{\imath} f \cos v_0 \cosh\omega t + \hat{\jmath} f \operatorname{sen} v_0 \operatorname{senh}\omega t, \tag{1Di}$$

$$\mathbf{v} = \hat{\imath} f\omega \cos v_0 \operatorname{senh}\omega t + \hat{\jmath} f\omega \operatorname{sen} v_0 \cosh\omega t, \tag{5Di}$$

$$\mathbf{r} = \hat{\imath}\eta_0\dot{\xi}_0 t + \hat{\jmath}(\eta_0^2 - \dot{\xi}_0^2 t^2)/Z \tag{1Ei}$$

y

$$\mathbf{v} = (\hat{\imath}\eta_0 - \hat{\jmath}\dot{\xi}_0 t)\dot{\xi}_0. \tag{5Ei}$$

Para identificar las constantes de movimiento, se reconoce el carácter conservativo de las fuerzas, y también su naturaleza radial o constante, según el caso.

En el caso de fuerzas radiales el momento angular con respecto al centro de atracción o repulsión se conserva. Efectivamente, el cálculo de esta cantidad a partir de las Ecs. (1*i*) y (5*i*) respectivas, conduce a las expresiones

$$\boldsymbol{\ell} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = mr_0^2\omega\hat{k}, \tag{10Ai}$$

$$\boldsymbol{\ell} = mf^2\omega \operatorname{senh} u_0 \cosh u_0 \hat{k}, \tag{10Ci}$$

$$\boldsymbol{\ell} = mf^2\omega \operatorname{sen} v_0 \cos v_0 \hat{k}, \tag{10Di}$$

mostrando que su valor está fijo para cada cónica. En el caso circular es proporcional al cuadrado del radio o proporcional al área. En el caso elíptico es proporcional al producto de los semiejes mayor, $f \cosh u_0$, y menor, $f \operatorname{senh} u_0$, o sea también proporcional al área. En el caso hiperbólico es proporcional al producto de los semiejes real, $f \cos v_0$, e imaginario, $f \operatorname{sen} v_0$. Para tales fuerzas, también se pueden considerar trayectorias rectilíneas, como situaciones límites de elipses o de hipérbolas con excentricidad uno, para las cuales el momento angular es nulo.

En el caso de la fuerza constante, Ec. (9*Ei*), la componente de la cantidad de movimiento en la dirección perpendicular a la fuerza, se obtiene de la Ec. (5*Ei*):

$$P_x = m\eta_0\dot{\xi}_0, \tag{10Ei}$$

y es obviamente una constante de movimiento, proporcional a la coordenada parabólica $\eta_0$ y a la velocidad parabólica $\dot{\xi}_0$.

Las energías potenciales asociadas a las fuerzas conservativas se obtienen de inmediato de las Ecs. (9*i*):

$$V(\mathbf{r}) = \pm\tfrac{1}{2}m\omega^2 r^2 \tag{11i}$$

y

$$V(y) = m\dot{\xi}_0^2 y, \tag{11Ei}$$

donde los signos $\pm$ corresponden a las situaciones de atracción y repulsión, respectivamente. Las energías totales, sumas de energías cinética y potenciales, son también constantes de movimiento, como lo muestran sus valores calculados a partir de las Ecs. (1*i*) y (5*i*):

$$E = m\omega^2 r_0^2, \tag{12Ai}$$

$$E = \tfrac{1}{2}m\omega^2 f^2(\cosh^2 u_0 + \operatorname{senh}^2 u_0), \tag{12Ci}$$

$$E = \tfrac{1}{2}m\omega^2 f^2(-\cos^2 v_0 + \operatorname{sen}^2 v_0) \tag{12Di}$$

y

$$E = m\eta_0^2 \dot{\xi}_0^2. \tag{12Ei}$$

En el caso circular la energía es proporcional al cuadrado del radio, en el caso elíptico es proporcional a la suma de los cuadrados de los semiejes mayor y menor, en el caso hiperbólico es proporcional a la diferencia entre los cuadrados de los semiejes imaginario y real, y en el caso parabólico es proporcional a la distancia entre el vértice y el foco.

De acuerdo con la Ref. 4, las constantes de movimiento para la fuerza armónica corresponden a las componentes de un tensor simétrico de segundo rango. Ese resultado se puede extender al caso de la fuerza repulsiva, siendo

$$Q_{ij} = \tfrac{1}{2} m \dot{x}_i \dot{x}_j \pm \tfrac{1}{2} m\omega^2 x_i x_j \tag{13i}$$

los tensores para los casos respectivos. Las componentes diagonales se identifican como las energías asociadas a los movimientos en dos direcciones perpendiculares entre sí en el plano de la trayectoria cónica, y las componentes no diagonales son idénticamente nulas, como se puede verificar usando las Ecs. (1*i*) y (5*i*) para las trayectorias respectivas. La traza del tensor corresponde a la energía total del sistema (Ecs. (12*i*)), y el determinante del tensor es proporcional al cuadrado del momento angular (Ecs. (10*i*)) para cada cónica.

*ii) Movimiento en trayectorias cónicas bajo fuerza radial inversamente proporcional al cuadrado de la distancia*

En el caso de movimiento circular uniforme, si el cuadrado del período es proporcional al cubo del radio,

$$\left(\frac{2\pi}{\dot{\varphi}_0}\right)^2 = K r_0^3, \tag{8Aii}$$

o sea, si se cumple la tercera ley de Kepler, la aplicación de la segunda ley de Newton, usando la aceleración de la Ec. (6*A*′), conduce a la fuerza

$$\mathbf{F} = -\frac{4\pi^2 m \hat{r}}{k r_0^2}, \tag{9Aii}$$

que es atractiva, radial e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

El mismo tipo de fuerza se obtiene para movimientos a lo largo de las otras cónicas imponiendo la condición de que la fuerza se encuentre dirigida a uno de los focos. En los casos de trayectorias elípticas e hiperbólicas, los vectores de posición desde los focos están dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{1,2} = \mathbf{r} \pm \mathbf{f} &= \hat{\imath} f(\cosh u \cos v \pm 1) + \hat{\jmath} f \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v, \\ &= f(\cosh u \pm \cos v)(\hat{u} \operatorname{senh} u \mp \hat{v} \operatorname{sen} v)/h_e(u,v), \\ &= f(\cosh u \pm \cos v)\hat{r}_{1,2}. \end{aligned} \tag{$1f_{1,2}$}$$

Si se toma la fuerza dirigida hacia el foco 1, entonces sus formas respectivas son

$$\mathbf{F} = -F(u_0,v)\hat{r}_1 = -F(u_0,v)(\hat{u} \operatorname{senh} u_0 - \hat{v} \operatorname{sen} v)/h_e(u_0,v), \tag{8Cii}$$

$$\mathbf{F} = -F(u,v_0)\hat{r}_1 = -F(u,v_0)(\hat{u} \operatorname{senh} u - \hat{v} \operatorname{sen} v_0)/h_e(u,v_0). \tag{8Dii}$$

En el caso de trayectorias parabólicas la fuerza correspondiente es de la forma

$$\mathbf{F} = -F(\xi,\eta_0)\hat{r} = -F(\xi,\eta_0)(\hat{\xi}\xi + \hat{\eta}\eta_0)/h_p(\xi,\eta_0). \tag{8Eii}$$

La aplicación de la segunda ley de Newton a estas fuerzas y las aceleraciones correspondientes de las Ecs. (6)′ conduce a ecuaciones integrables con las siguientes soluciones:

$$\dot{v} = \dot{v}_0 \frac{\cosh u_0 + 1}{\cosh u_0 + \cos v}, \tag{8Cii)'$$

$$F(u_0,v) = \frac{mf \cosh u_0 (cosh u_0 + 1)^2 \dot{v}_0^2}{(\cosh u_0 + \cos v)^2}, \tag{9Cii}$$

donde $\dot{v}_0$ es la velocidad hiperbólica en la posición $v = 0$;

$$\dot{u} = \dot{u}_0 \frac{1 + \cos v_0}{\cosh u + \cos v_0}, \tag{8Dii)'$$

$$F(u,v_0) = -\frac{mf \cos v_0 (1 + \cos v_0)^2 \dot{u}_0^2}{(\cosh u + \cos v_0)^2}, \tag{9Dii}$$

donde $\dot{u}_0$ es la velocidad elíptica en la posición $u = 0$;

$$\dot{\xi} = \dot{\xi}_0 \frac{\xi_0^2 + \eta_0^2}{\xi^2 + \eta_0^2}, \qquad (8Eii)'$$

$$F(\xi, \eta_0) = \frac{m(\xi_0^2 + \eta_0^2)^2 \dot{\xi}_0^2}{(\xi_0^2 + \eta_0^2)^2}, \qquad (9Eii)$$

donde $\dot{\xi}_0$ es la velocidad parabólica en la posición $\xi = \xi_0$. De las expresiones para la distancia al foco (Ecs. $(1f_1)$ y $(1E)$) se reconoce que las magnitudes de las fuerzas son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia. La coincidencia con la forma de la Ec. $(9Aii)$ se establece explícitamente al identificar las constantes respectivas:

$$f^3 \cosh u_0 (\cosh u_0 + 1)^2 \dot{v}_0^2 = \frac{4\pi^2}{K}, \qquad (9Cii)'$$

$$-f^3 \cos v_0 (1 + \cos v_0)^2 \dot{u}_0^2 = \frac{4\pi^2}{K}, \qquad (9Dii)'$$

$$\frac{1}{4}(\xi_0^2 + \eta_0^2)^2 \dot{\xi}_0^2 = \frac{4\pi^2}{K}. \qquad (9Eii)$$

Nótese que en el caso de trayectorias hiperbólicas la fuerza puede ser atractiva ($\pi/2 \leq v \leq 3\pi/2$) o repulsiva ($-\pi/2 \leq v \leq \pi/2$), según que el foco sea interno o externo a la rama de la hipérbola recorrida.

En el caso de la trayectoria elíptica, la Ec. $(8Cii)'$ se puede integrar para calcular el período de revolución,

$$T = \frac{2\pi \cosh u_0 \dot{v}_0}{\cosh u_0 + 1},$$

encontrando, con la equivalencia de la Ec. $(9Cii)'$, que su cuadrado es proporcional al cubo del semieje mayor de la elipse:

$$T^2 = K f^3 \cosh^3 u_0, \qquad (8Cii)''$$

o sea, la tercera ley de Kepler. Es interesante hacer notar que mientras en el caso circular es necesario invocar la tercera ley de Kepler

(Ec. (8*Aii*)) para deducir el carácter inverso al cuadrado de la distancia (Ec. (9*Aii*)), en el caso elíptico tanto este carácter de la fuerza como la tercera ley de Kepler siguen de la condición de que la fuerza está dirigida hacia el foco (Ec. (8*Cii*)).

La naturaleza radial de la fuerza lleva asociada la conservación del momento angular con respecto al centro de atracción o repulsión. Para calcular el momento angular asociado a cada trayectoria se necesitan los vectores de velocidad correspondientes, obtenidos de las Ecs. (5)′ y (8*ii*)′:

$$\mathbf{v} = \hat{\psi} 2\pi/\sqrt{kr_0}, \tag{5Aii}$$

$$\mathbf{v} = f h_e(u_0, v)\frac{\dot{v}_0(\cosh u_0 + 1)\hat{v}}{\cosh u_0 + \cos v}, \tag{5Cii}$$

$$\mathbf{v} = f h_e(u, v_0)\frac{\dot{u}_0(1 + \cos v_0)\hat{u}}{\cosh u + \cos v_0}. \tag{5Dii}$$

y

$$\mathbf{v} = h_p(\xi, \eta_0)\frac{\dot{\xi}_0(\xi_0^2 + \eta_0^2)\hat{\xi}}{\xi^2 + \eta_0^2}. \tag{5Eii}$$

Entonces los momentos angulares asociados a cada cónica

$$\boldsymbol{\ell} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = 2\pi m\sqrt{r_0/K}\,\hat{k}, \tag{10Aii}$$

$$\boldsymbol{\ell}_1 = m\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v} = \frac{2\pi m f \operatorname{senh} u_0}{\sqrt{Kf \cosh u_0}}\,\hat{k}, \tag{10Cii}$$

$$\boldsymbol{\ell}_1 = m\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v} = \frac{2\pi m f \operatorname{sen} v_0}{\sqrt{-Kf \cos v_0}}\,\hat{k}, \tag{10Dii}$$

y

$$\boldsymbol{\ell} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = -\frac{2\pi m}{\sqrt{K}}\,\eta_0 \hat{k}; \tag{10Eii}$$

haciéndose obvio que se conservan. En el caso circular su magnitud es proporcional a la raíz cuadrada del radio, en el caso elíptico es proporcional al semieje menor e inversamente proporcional a la raíz cuadrada del semieje mayor, en el caso hiperbólico es proporcional al semieje imaginario e inversamente proporcional a la raíz cuadrada del semieje real, y en el caso parabólico es proporcional a la raíz cuadrada de la distancia focal. También se pueden incluir trayectorias rectilíneas con momento angular nulo.

Las fuerzas son también conservativas y las energías potenciales asociadas a las situaciones atractiva y repulsiva son, respectivamente,

$$V(\mathbf{r}) = \mp \frac{4\pi^2 m}{K r_c}, \tag{11ii}$$

siendo $r_c = r$ o $r_1$.

Las energías totales se conservan para cada trayectoria, y sus valores se obtienen de las Ecs. (5*ii*) y (11*ii*), tomando las formas siguientes:

$$E = -\frac{2\pi^2 m}{K r_0} < 0, \tag{12Aii}$$

$$E = -\frac{2\pi^2 m}{K f \cosh u_0} < 0, \tag{12Cii}$$

$$E = \frac{2\pi^2 m}{-K f \cos v_0} > 0 \tag{12Dii}$$

y

$$E = 0. \tag{12Eii}$$

En los casos circular, elíptico e hiperbólico la energía es inversamente proporcional al radio, al semieje mayor y al semieje real, respectivamente.

En el caso de la fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, además del momento angular (Ecs. (10*ii*)) y de la energía total (Ecs. (12*ii*)), el vector de Runge-Lenz,

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\ell}_c \times \mathbf{v} + \frac{4\pi^2 m \hat{r}_c}{K}, \tag{13ii}$$

es también una constante del movimiento, siendo $r_c$ el vector de posición desde del centro de atracción (repulsión) y la constante $K$ positiva (negativa). Usando las Ecs. (10*ii*), (5*ii*) y (1) para los vectores de momento angular, velocidad y posición se establece de inmediato que el vector de Runge-Lenz toma las formas

$$\mathbf{R} = 0, \tag{13Aii}$$

$$\mathbf{R} = \frac{4\pi^2 m\hat{r}}{K}, \tag{13Bii}$$

$$\mathbf{R} = \frac{4\pi^2 m\hat{\imath}}{K\cosh u_0}, \tag{13Cii}$$

$$\mathbf{R} = \frac{4\pi^2 m\hat{\imath}}{K\cosh v_0} \tag{13Dii}$$

y

$$\mathbf{R} = -\frac{4\pi^2 m\hat{\jmath}}{K}, \tag{13Eii}$$

para las respectivas trayectorias, mostrando que efectivamente es un vector constante, en la dirección del eje focal en el sentido del punto de mayor aproximación al foco de atracción (repulsión) al mismo foco y con una magnitud proporcional a la excentricidad de la cónica correspondiente. Comparando las Ecs. (13*Cii*) con (12*Cii*) y (13*Dii*) con (12*Dii*) se establece la relación entre la energía y la magnitud del vector de Runge-Lenz:

$$E = \mp|\mathbf{R}|/2f. \tag{12ii)'}$$

La validez de esta relación se extiende a los siguientes casos: *A)* del círculo con $f \to 0$, $\cosh u_0 \to \infty$ y $f\cosh u_0 = r_0$; *B)* de trayectorias rectas con $\cosh u_0 = 1$ y $2f = r_0$ distancia de máxima separación en el caso atractivo, y con $\cos v_0 = 1$ y $2f = r_0$ distancia de mayor aproximación en el caso repulsivo; y *E)* de trayectorias parabólicas con $\cosh u_0 = 1$ (o $\cos v_0 = -1$) y $f \to \infty$, como se puede verificar de las respectivas Ecs. (12*ii*).

*iii) Movimiento en trayectorias cónicas bajo fuerzas que no realizan trabajo*

La condición de que la fuerza que mantiene a una partícula constreñida a moverse a lo largo de una trayectoria no realice trabajo se satisface si la fuerza es normal a la trayectoria en todos los puntos. Esta es la situación en los casos de movimiento circular uniforme, específicamente en los casos de las Ecs. (9$Ai$) y (9$Aii$).

Para las otras cónicas, esa condición, usando la segunda ley de Newton con las aceleraciones correspondientes de las Ecs. (6)$'$, toma las formas siguientes:

$$\mathbf{F} = \hat{u}F(u_0, v) = mf\left\{-\frac{\hat{u}}{h_e}\cosh u_0 \operatorname{senh} u_0 \dot{v}^2 + \hat{v}\left[h_e\ddot{v} + \frac{1}{h_e}\operatorname{sen} v \cos v \dot{v}^2\right]\right\}, \tag{8$Ciii$}$$

$$\mathbf{F} = \hat{v}F(u, v_0) = mf\left\{\hat{u}\left[h_e\ddot{u} + \frac{1}{h_e}\cosh u \operatorname{senh} u \dot{u}^2\right] - \frac{\hat{v}}{h_e}\operatorname{sen} v_0 \cos v_0 \dot{u}^2\right\}, \tag{8$Diii$}$$

$$\mathbf{F} = \hat{\eta}F(\xi, \eta_0) = m\left\{\hat{\xi}\left[h_p\ddot{\xi} + \frac{1}{h_p}\xi\dot{\xi}^2\right] - \frac{\hat{\eta}}{h_p}\dot{\xi}^2\right\}. \tag{8$Eiii$}$$

Estas ecuaciones son integrables y sus soluciones dan las velocidades cónicas con que se describen las trayectorias y las fuerzas de constricción correspondientes:

$$\dot{v} = \frac{\dot{v}_0 \operatorname{senh} u_0}{h_e(u_0, v)}, \tag{8$Ciii$)$'$}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= -\frac{\hat{u}mf\dot{v}_0^2 \cosh u_0 \operatorname{senh}^3 u_0}{h_e^3(u_0, v)} \\ &= -\hat{u}mf^4 \cosh u_0 \operatorname{senh}^3 u_0 \dot{v}_0^2/(r_1 r_2)^{3/2},\end{aligned} \tag{9$Ciii$}$$

$$\dot{u} = \frac{\dot{u}_0 \operatorname{sen} v_0}{h_e(u, v_0)}, \tag{8$Diii$)$'$}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= -\frac{\hat{v}mf\dot{u}_0^2 \operatorname{sen}^3 v_0 \cos v_0}{h_e^3(u, v_0)} \\ &= -\hat{v}mf^4 \operatorname{sen}^3 v_0 \cos v_0 \dot{u}_0^2/(r_1 r_2)^{3/2},\end{aligned} \tag{9$Diii$}$$

$$\dot{\xi} = \dot{\xi}_0\sqrt{\frac{\xi_0^2 + \eta_0^2}{\xi^2 + \eta^2}}, \tag{8$Eiii$)$'$}$$

$$\mathbf{F} = -\frac{\hat{\eta} m \eta_0 \dot{\xi}_0^2(\xi_0^2 + \eta_0^2)}{h_p^3(\xi,\eta)} = -\frac{\hat{\eta} m \eta_0 \dot{\xi}_0^2(\xi_0^2 + \eta_0^2)}{\sqrt{8r^3}}. \qquad (9Eiii)$$

La fuerza de constricción es inversamente proporcional al cubo del promedio geométrico de las distancias a los focos para las elipses y las hipérbolas, y es inversamente proporcional a la potencia 3/2 de la distancia al foco para las parábolas.

Mientras en las situaciones *i)* y *ii)* las fuerzas son centrales y en consecuencia hay conservación de momento angular, en la presente situación las fuerzas de las Ecs. (9*iii*) no son centrales y no hay momento angular que se conserve. Cabe preguntar si existe otra cantidad que se conserve en vez del momento angular. La respuesta es afirmativa y se da a continuación considerando sucesivamente los casos de trayectorias elípticas e hiperbólicas, y parabólicas. Los vectores de velocidad respectivos, obtenidos de las Ecs. (5)′ y (8*iii*)′, son

$$\mathbf{v} = f\dot{v}_0 \operatorname{senh} u_0 \hat{v}, \qquad (5Ciii)$$

$$\mathbf{v} = f\dot{u}_0 \operatorname{sen} v_0 \hat{u} \qquad (5Diii)$$

y

$$\mathbf{v} = \dot{\xi}_0\sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}\,\hat{\xi}, \qquad (5Eiii)$$

mostrando que tienen magnitudes fijas y direcciones variables. Los momentos angulares con respecto a los focos se obtienen a su vez de las Ecs. (1) y (5*iii*) y toman las formas:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\ell}_1 &= \mathbf{r}_1 \times m\mathbf{v} \\ &= mf^2\dot{v}_0(\cosh u_0 + \cos v)\operatorname{senh}^2 u_0 \hat{k}/h_e(u_0,v), \qquad (10Ciii)_1 \\ \boldsymbol{\ell}_2 &= \mathbf{r}_2 \times m\mathbf{v} \\ &= mf^2\dot{v}_0(\cosh u_0 - \cos v)\operatorname{senh}^2 u_0 \hat{k}/h_e(u_0,v), \qquad (10Ciii)_2 \\ \boldsymbol{\ell}_1 &= \mathbf{r}_1 \times m\mathbf{v} \\ &= mf^2\dot{u}_0(\cosh u + \cos v_0)\operatorname{senh}^2 v_0 \hat{k}/h_e(u,v_0), \qquad (10Diii)_1 \\ \boldsymbol{\ell}_2 &= \mathbf{r}_2 \times m\mathbf{v} \\ &= mf^2\dot{u}_0(\cosh u - \cos v_0)\operatorname{senh}^2 v_0 \hat{k}/h_e(u,v_0) \qquad (10Diii)_2 \end{aligned}$$

y

$$\boldsymbol{\ell} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = -\tfrac{1}{2} m\eta_0 \dot{\xi}_0 \sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}\sqrt{\xi^2 + \eta_0^2}\,\hat{k}. \qquad (10Eiii)$$

Aunque los momentos angulares $\boldsymbol{\ell}_1$ y $\boldsymbol{\ell}_2$ no se conservan individualmente en las trayectorias elípticas e hiperbólicas, su producto escalar sí es una constante del movimiento:

$$\boldsymbol{\ell}_1 \cdot \boldsymbol{\ell}_2 = m^2 f^4 \dot{v}_0^2 \operatorname{senh}^4 u_0, \qquad (10Ciii)$$

$$\boldsymbol{\ell}_1 \cdot \boldsymbol{\ell}_2 = m^2 f^4 \dot{u}_0^2 \operatorname{sen}^4 v_0. \qquad (10Diii)$$

En el caso de la parábola si se toma el producto vectorial de la velocidad (Ec. ($5Eiii$)) y el momento angular (Ec. ($10Eiii$)),

$$\mathbf{v} \times \boldsymbol{\ell} = \tfrac{1}{2} m\eta_0 \dot{\xi}_0^2 (\xi_0^2 + \eta_0^2)\hat{\eta}\sqrt{\xi^2 + \eta_0^2},$$

se reconoce que

$$\frac{\mathbf{v} \times \boldsymbol{\ell}}{h_p(\xi, \eta_0)} = \frac{1}{2} m\eta_0 \dot{\xi}_0^2 (\xi_0^2 + \eta_0^2)\hat{\eta} = \frac{1}{2}\Lambda\hat{\eta} \qquad (10Eiii)'$$

es un vector cuya magnitud $\Lambda/2$ se conserva.

Desde luego la energía de la partícula, que es simplemente la energía cinética, también se conserva y se puede escribir en las formas alternativas siguientes:

$$E = \frac{1}{2} m f^2 \dot{v}_0^2 \operatorname{senh}^2 u_0 = \frac{\boldsymbol{\ell}_1 \cdot \boldsymbol{\ell}_2}{2mf^2 \operatorname{senh}^2 u_0}, \qquad (11Ciii)$$

$$E = \frac{1}{2} m f^2 \dot{u}_0^2 \operatorname{sen}^2 v_0 = \frac{\boldsymbol{\ell}_1 \cdot \boldsymbol{\ell}_2}{2mf^2 \operatorname{sen}^2 v_0}, \qquad (11Diii)$$

y

$$E = \frac{1}{2} m(\xi_0^2 + \eta_0^2)\dot{\xi}_0^2 = \frac{\Lambda}{2\eta_0}. \qquad (11Eiii)$$

## 3. Discusión

En la sección 2 se ha realizado con cierto detalle el estudio geométrico y dinámico de las trayectorias cónicas para los casos descritos en la introducción. El uso de coordenadas curvilíneas ortogonales basadas en las cónicas permite destacar la unidad de los métodos geométricos y dinámicos en que se basó el análisis de cada caso; la misma numeración de las ecuaciones correspondientes a cantidades geométricas, cinemáticas y dinámicas equivalentes intenta también reflejar esa unidad.

Se puede señalar que los casos de trayectorias elípticas e hiperbólicas son los más generales, pues a partir de esos se pueden recuperar los casos de trayectorias circulares, rectilíneas y parabólicas como situaciones límite. De hecho, esto queda ilustrado específica y cuantitativamente en la discusión sobre el vector de Runge-Lenz, y el lector lo puede hacer extensivo a las diversas cantidades de interés reconociendo los límites respectivos en las ecuaciones correspondientes. Conviene hacer notar que esas relaciones límite tienen un origen geométrico y se traducen en correspondencias dinámicas. A primera vista, podría parecer que el caso *Ei)* es dinámicamente diferente de los otros casos *i)*, pero la relación geométrica está presente y su correspondencia dinámica también se puede reconocer. Efectivamente, las coordenadas parabólicas se pueden obtener como la situación límite de coordenadas elípticas cuando el origen de coordenadas se traslada a uno de los focos, el otro foco se aleja al infinito y las excentricidades tienden a uno, de modo que $fu^2 \to \eta^2$ y $fv^2 \to \xi^2$. Para la situación dinámica correspondiente, la fuerza armónica de la Ec. $(11Ai)$, dirigida hacia el centro de atracción que también se alejó al infinito, en la vecindad del nuevo origen se reduce a la fuerza constante

$$\mathbf{F} = -m\dot{v}^2 f\hat{f} = -m\dot{\xi}_0^2\hat{f}, \qquad (9Ei)'$$

usando la Ec. $(6Ci)$ y la relación entre las coordenadas hiperbólicas y parabólicas, siendo $\hat{f}$ el vector unitario en la dirección del eje focal. Por otra parte, inclusive los casos de trayectorias hiperbólicas siguen de los casos de trayectorias elípticas bajo las transformaciones $\cosh^2 u_0 \rightleftharpoons \cos^2 v_0$, $\operatorname{senh}^2 u_0 \rightleftharpoons -\operatorname{sen}^2 v_0$, que corresponden a una continuación analítica de las funciones en las ecuaciones de $C$ para obtener las ecuaciones correspondientes de $D$. En conclusión, hemos mostrado que la magia asociada a las órbitas elípticas en la Ref. 3 y las constantes de movimiento estudiadas en la Ref. 4 tienen una validez que se extiende a todas las trayectorias cónicas.

Normalmente los casos *i)* y *ii)* se estudian independientemente [1, 2]. En el caso gravitacional, los casos *Ei)* y *ii)* corresponden a las situaciones de movimiento sobre la superficie de la Tierra y en el espacio exterior, identificándose las respectivas constantes de proporcionalidad, $\dot{\xi}_0^2 = g$, acelaración de la gravedad en la Ec. ($9Ei$), y $4\pi^2/k = GM$, producto de la constante de gravitación universal y masa de la Tierra en la Ec. ($9Aii$). De hecho los casos *i)* y *ii)* también se unifican en el caso gravitacional al reconocer que el campo en el interior de una distribución homnogénea de masa en un volumen esférico de radio $R$ es un campo armónico y en la Ec. ($9Ai$) la constante de proporcionalidad es $\omega^2 = GM/R^3$. Al considerar el caso electrostático se presentan las situaciones tanto de atracción como de repulsión, con la substituci'on de constantes $GMm \to -q_1q_2$, producto de cargas eléctricas, y se pueden ilustrar todos los tipos de trayectorias estudiados en *i)* y *ii)*.

En los casos *iii)* el uso de las coordenadas asociadas a cada tipo de cónica conduce de manera natural a la determinación de las fuerzas que sin realizar trabajo mantienen al móvil sobre la trayectoria correspondiente.

## Referencias


1. R. Resnick and D. Halliday, *Physics for Students of Science and Enginnering*, Cap. 16, (Wiley, New York, 1960).
2. W. Hauser, *Introducción a los Principios de Mecánica*, Cap. 7, (UTEHA, México, 1969).
3. M. Berrondo, J. Flores y O. Novaro, *Rev. Mex. Fís.* **23** (1974) E13.
4. Abhas Mitra, *Am. J. Phys.* **53** (1985) 1175.
5. G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Second Edition, Cap. 2 (Academic Press, New York, 1970).