Enseñanza *Revista Mexicana de Física* **33** *No. 1(1987) 115–137*

De la ecuación de Dirac a los espinores

G.F. Torres del Castillo

Departamento de Física-Matemática, Instituto de Ciencias de la Universidad Autónoma de Puebla, 72000 Puebla, Pue. y Departamento de Física, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, *Apdo. Postal 14-740, México, D.F.*

(recibido el 30 de junio de 1986; aceptado el 29 de octubre de 1986)

Resumen. Expresando la ecuación de Dirac en términos de espinores de dos componentes, se introduce el formalismo espinorial analizando la ecuación de Dirac en esta notación. Se presenta también el efecto de las transformaciones de Lorentz sobre los espinores y la relación de éstos con los cuadrivectores. Como un ejemplo adicional, se presentan y analizan las ecuaciones de Maxwell en la notación espinorial y se introducen los potenciales de Debye para campos sin masa libres.

Abstract. By expressing the Dirac equation in terms of two-component spinors, the spinor formalism is introduced analyzing the Dirac equation in this notation. The effect of the Lorentz transformations on the spinors and the relation of these with the four-vectors is also given. As an additional example, Maxwell's equations in the spinor notation are presented an analyzed and the Debye potentials for massless free fields are introduced.

PACS: 02.40.+m

1. Introducción

El álgebra espinorial, introducida por van der Waerden en 1929 y posteriormente desarrollada por él mismo e Infeld, ha sido una herramienta muy útil en la relatividad general durante los últimos 25 años. En la actualidad, el formalismo espinorial y otros formalismos derivados de él se emplean en diversas aplicaciones tales como la búsqueda de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein, el estudio de sus perturbaciones, el cual está vinculado con el problema de la radiación gravitacional, el estudio de los agujeros negros, así como algunos intentos para cuantizar el campo gravitacional. Varios resultados, considerados importantes, han sido obtenidos gracias a estas técnicas y difícilmente se pueden obtener de otra manera. Sin embargo, la bibliografía introductoria a este tema es relativamente escasa; de ella se pueden citar los artículos de Pirani [1], Penrose [2], Bade y Jehle [3] y las monografías de Plebański [4] y de Penrose y Rindler [5].

Usualmente los espinores se introducen como base para las representaciones irreducibles del grupo $SL(2,C)$, el cual es homomorfo al grupo de las transformaciones de Lorentz ortocronas propias. (Una presentación bastante geométrica y elemental puede hallarse en el libro de Misner, Thorne y Wheeler [6]). Los espinores aparecen también en la ecuación de Dirac para el electrón; sin embargo, usualmente en los libros donde se trata esta ecuación no se establece cuál es la naturaleza de los espinores.

En este artículo se intenta dar una introducción al formalismo espinorial, restringiéndose al uso de coordenadas cartesianas, tomando como base la ecuación de Dirac. El enfoque seguido aquí, donde se evitan muchos tecnicismos, quizá resulte conveniente para aquellos familiarizados con la ecuación de Dirac, pero esto no es un requisito. Algo que sí se requiere es un conocimiento elemental acerca de las transformaciones de Lorentz y de la notación tensorial. A lo largo de este artículo se emplea la convención de suma sobre cualquier par de índices repetidos; los índices griegos, $\mu, \nu, \ldots$, toman valores de 0 a 3, los índices latinos, $i, j, \ldots$, toman valores de 1 a 3, mientras que los índices $A, B, \ldots$, toman los valores 1 y 2.

En la sección 2 se presenta un resumen acerca de la ecuación de Dirac, siguiendo el libro de Bjorken y Drell [7], para después definir los espinores de dos componentes y expresar, en términos de ellos, algunas expresiones relacionadas con la ecuación de Dirac. En la sección 3 se considera la ley de transformación de los espinores bajo transformaciones de Lorentz propias ortocronas (es decir, que preservan el sentido del tiempo), las cuales se designan a lo largo del artículo simplemente como transformaciones propias. En la sección 4 se trata el campo electromagnético para ilustrar la utilidad del formalismo espinorial y presentar algunos resultados que no son ampliamente conocidos, tales como la clasificación algebraica del campo electromagnético (véanse también las Refs. 1, 2 y 4), los potenciales de Debye (para un tratamiento más amplio véase la Ref. 8) y las ecuaciones para campos sin masa de un espín cualquiera (véanse también las Refs. 4 y 8).

2. La ecuación de Dirac

La ecuación de Dirac para una partícula libre, expresada en forma covariante, es [7]

$$i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} - mc\psi = 0, \tag{1}$$

donde las matrices γ^μ satisfacen las relaciones de conmutación

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}; \tag{2}$$

si las x^μ son coordenadas cartesianas $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ entonces las $g^{\mu\nu}$ que aparecen en la Ec. (2) están dadas por

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

m corresponde a la masa (en reposo) de la partícula y ψ es su función de onda, la cual se representa por una columna de cuatro componentes complejas, funciones de x^μ. Las funciones de onda ψ, de cuatro componentes, reciben el nombre de espinores de Dirac o biespinores.

Las matrices γ^μ no están definidas unívocamente por (2) sino hasta una transformación de similaridad. Es decir, los conjuntos de matrices γ^μ y $\tilde{\gamma}^\mu$ satisfacen (2) si y sólo si $\tilde{\gamma}^\mu = U^{-1}\gamma^\mu U$, donde U

es alguna matriz (compleja) invertible. Esta matriz U corresponde a un cambio de base en el espacio de los espinores de Dirac. Para mantener la ecuación de Dirac en la forma (1), las matrices γ^μ deben ser constantes, por lo que las matrices U deben ser también constantes. (Estas condiciones pueden eliminarse introduciendo un término adicional en (1), en forma similar a como se introduce el campo electromagnético o los campos de Yang y Mills para permitir transformaciones locales, *i.e.*, tales que no necesariamente la transformación sea la misma en todos los puntos del espacio-tiempo. El campo de norma que se introduciría de esa manera corresponde precisamente al campo gravitacional.)

Mediante la elección apropiada de las matrices γ^μ, es posible que cada componente de ψ tenga un significado físico. Así por ejemplo, si se escoge

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix},$$

donde I es la matriz identidad 2×2 y las σ^i son las matrices de Pauli, entonces las primeras dos componentes de ψ corresponden a estados de energía positiva mientras que las dos restantes corresponden a estados de energía negativa y cada una de las componentes corresponde a alguna de las dos proyecciones del espín en la dirección z.

Asociada con ψ existe una "corriente", la cual es un cuadrivector concomponentes

$$j^\mu = c\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \tag{4}$$

donde $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$, que, como consecuencia de (1), se conserva: $\partial j^\mu/\partial x^\mu = 0$. La componente temporal de j, j^0, que físicamente se interpreta como una densidad de probabilidad, es mayor o igual a cero y vale cero si y sólo si $\psi = 0$; por lo que si $\psi \neq 0$, j^μ está dirigido hacia el futuro.

La ecuación de Dirac mantiene su forma bajo una transformación de Lorentz si, simultáneamente con la transformación de las coordenadas,

$$x'^\mu = a^\mu_\nu x^\nu, \tag{5}$$

donde la matriz (a^μ_ν) satisface

$$g_{\mu\nu}a^\mu_\lambda a^\nu_\rho = g_{\lambda\rho}, \tag{6}$$

la función de onda se reemplaza por

$$\psi'(x') = S(a)\psi(x), \tag{7}$$

donde $S(a)$ es una matriz (compleja) 4×4 que satisface

$$S^{-1}(a)\gamma^\mu S(a) = a^\mu_\nu \gamma^\nu. \tag{8}$$

Para una transformación de Lorentz propia "infinitesimal",

$$a^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \Delta\omega^\mu_\nu, \tag{9a}$$

donde (debido a la Ec. (6))

$$\Delta\omega_{\mu\nu} = -\Delta\omega_{\nu\mu}, \tag{9b}$$

se halla

$$S = 1 + \tfrac{1}{8}\Delta\omega_{\mu\nu}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \tag{10}$$

A partir de esta expresión se puede obtener S para una transformación finita por medio de la exponencial.

Debido a (2), la matriz

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{11}$$

anticonmuta con $\gamma^\mu : \gamma^\mu\gamma^5 = -\gamma^5\gamma^\mu$. Por consiguiente,$[S, \gamma^5] = 0$ para todas las transformaciones de Lorentz propias, lo que implica que la representación de las transformaciones de Lorentz propias sobre los espinores de Dirac es reducible: los valores propios de γ^5 son 1 y -1, cada uno con multiplicidad (degeneración) dos, por consiguiente $L \equiv \{\psi|\gamma^5\psi = -\psi\}$ y $R \equiv \{\psi|\gamma^5\psi = \psi\}$ son subespacios de dimensión compleja dos, complementarios entre sí (cualquier espinor de Dirac ψ es la suma de un elemento de L y otro de R; de hecho, $\psi = (1+\gamma^5)\psi/2+(1-\gamma^5)\psi/2$ y usando que $(\gamma^5)^2 = 1$ se ve que $(1+\gamma^5)\psi \in R$

y $(1-\gamma^5)\psi \in L$). Cada uno de los subespacios L y R es invariante bajo las transformaciones de Lorentz propias, ya que si $\gamma^5\psi = \lambda\psi$, entonces $\gamma^5(S\psi) = \lambda S\psi$.

Escogiendo una base del espacio de los espinores de Dirac tal que las matrices γ^μ estén dadas por

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

siendo I la matriz identidad 2×2 y σ^i las matrices de Pauli, se obtiene que

$$\gamma^5 = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Las matrices (12) se obtienen de las dadas arriba, que son las empleadas por Bjorken y Drell [7], por una transformación de similaridad, mediante la matriz

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I & -I \\ I & I \end{bmatrix}.$$

Con esta elección de las matrices γ^μ, una solución de la ecuación de Dirac con $m = 0$ de la forma

$$\psi = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

satisface $\gamma^5\psi = -\psi$ y describe neutrinos "izquierdos" (con el espín en la dirección opuesta a la dirección de movimiento [9]).

Empleando las matrices γ^μ dadas en (12) y expresando a ψ en la forma

$$\psi = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

se encuentra que la ecuación de Dirac puede escribirse en términos de columnas de dos componentes como

$$\sigma^i \frac{\partial}{\partial x^i} v + I \frac{\partial}{\partial x^0} v = \frac{mc}{i\hbar} u, \tag{13a}$$

y

$$-\sigma^i \frac{\partial}{\partial x^i} u + I \frac{\partial}{\partial x^0} u = \frac{mc}{i\hbar} v.$$

La primera de estas ecuaciones es, en forma más explícita,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^1} - i\frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^1} + i\frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{\partial}{\partial x^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \frac{mc}{i\hbar} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Denotando los elementos de la matriz 2×2 que aparece en la ecuación anterior por $\partial_{A\dot{B}}$ $(A = 1, 2;\ \dot{B} = \dot{1}, \dot{2})$, es decir,

$$\begin{aligned} \partial_{1\dot{1}} &\equiv \frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{\partial}{\partial x^3}, & \partial_{1\dot{2}} &\equiv \frac{\partial}{\partial x^1} - i\frac{\partial}{\partial x^2}, \\ \partial_{2\dot{1}} &\equiv \frac{\partial}{\partial x^1} + i\frac{\partial}{\partial x^2}, & \partial_{2\dot{2}} &\equiv \frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{\partial}{\partial x^3}, \end{aligned} \tag{15}$$

y etiquetando las componentes de ψ en la forma

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^{\dot{1}} \\ \phi^{\dot{2}} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix},$$

se encuentra que la Ec. (14) equivale al par de ecuaciones

$$\partial_{A\dot{B}} \phi^{\dot{B}} = \frac{mc}{\hbar} \chi_A, \qquad A = 1, 2. \tag{16}$$

La Ec. (13*b*) puede escribirse en forma análoga a (16) si se introduce la siguiente regla para subir y bajar índices:

$$\begin{aligned} \chi_A &= \epsilon_{AB} \chi^B, & \chi^A &= \epsilon^{BA} \chi_B, \\ \phi_{\dot{A}} &= \epsilon_{\dot{A}\dot{B}} \phi^{\dot{B}}, & \phi^{\dot{A}} &= \epsilon^{\dot{B}\dot{A}} \phi_{\dot{B}}, \end{aligned} \tag{17}$$

donde las ϵ's son símbolos de Levi-Cività en dimensión dos:

$$(\epsilon_{AB}) = (\epsilon^{AB}) = (\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}) = (\epsilon^{\dot{A}\dot{B}}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

por consiguiente, $\chi_1 = \chi^2$, $\chi_2 = -\chi^1$, $\phi_{\dot{1}} = \phi^{\dot{2}}$, $\phi_{\dot{2}} = -\phi^{\dot{1}}$. Usando estas reglas y la definición (15) de $\partial_{A\dot{B}}$ se obtiene entonces que la Ec. (13*b*) equivale al par de ecuaciones

$$\partial_{A\dot{B}} \chi^A = \frac{mc}{\hbar} \phi_{\dot{B}}, \qquad \dot{B} = \dot{1}, \dot{2}. \tag{19}$$

Así, la ecuación de Dirac equivale a

$$\partial_{A\dot{B}}\phi^{\dot{B}} = \frac{mc}{\hbar}\chi_A, \qquad \partial_{A\dot{B}}\chi^{A} = \frac{mc}{\hbar}\phi_{\dot{B}}. \tag{20}$$

Las matrices γ^μ están incorporadas en esta forma de la ecuación de Dirac a través de la definición de $\partial_{A\dot{B}}$. La definición de $\partial_{A\dot{B}}$ puede sintetizarse introduciendo, junto con las matrices de Pauli σ^i, la matriz $\sigma^0 = I$. Denotando por $\sigma^\mu{}_{A\dot{B}}$ el elemento del renglón A y columna B de la matriz σ^μ, se tiene

$$\partial_{A\dot{B}} = \sigma^\mu{}_{A\dot{B}}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{21}$$

y, ya que cada una de las matrices σ^μ es hermítica,

$$\sigma^\mu{}_{A\dot{B}}{}^* = \sigma^\mu{}_{B\dot{A}}, \tag{22}$$

donde $*$ denota conjugación compleja. Los coeficientes $\sigma^\mu{}_{A\dot{B}}$ reciben el nombre de símbolos de Infeld y van der Waerden. Es fácil ver que estas cantidades satisfacen las relaciones

$$g_{\mu\nu}\sigma^\mu{}_{A\dot{B}}\sigma^\nu{}_{C\dot{D}} = 2\epsilon_{AC}\epsilon_{\dot{B}\dot{D}} \tag{23a}$$

y

$$\epsilon^{AC}\epsilon^{\dot{B}\dot{D}}\sigma^\mu{}_{A\dot{B}}\sigma^\nu{}_{C\dot{D}} = 2g^{\mu\nu}. \tag{23b}$$

En relación al efecto de γ^5, las componentes χ_A y $\phi_{\dot{A}}$ de ψ pueden llamarse componentes izquierdas y derechas de ψ, respectivamente. La ecuación de Dirac escrita en la forma (20) muestra que la masa de la partícula acopla las componentes izquierdas y derechas de ψ. Cuando $m = 0$, tal acoplamiento desaparece y se pueden considerar por separado y en forma independiente cada par de componentes. La ecuación $\partial_{A\dot{B}}\chi^A = 0$ para el espinor de dos componentes χ_A recibe el nombre de ecuación de Weyl. Esta ecuación sirve para describir neutrinos, suponiendo que su masa sea cero, los cuales son "izquierdos" en el sentido antes mencionado [9].

En términos de χ_A y $\phi_{\dot{B}}$, las componentes de la corriente j^μ dadas en la Ec. (4) se expresan por

$$j^\mu = c\sigma^\mu_{A\dot{B}}(\chi^A \chi^{\dot{B}} + \phi^A \phi^{\dot{B}}), \tag{24}$$

donde

$$\chi^{\dot{A}} \equiv \chi^A * \qquad \text{y} \qquad \phi^A \equiv \phi^{\dot{A}} * . \tag{25}$$

Es fácil ver que cualquier cuadrivector de la forma $v^\mu = \sigma^\mu_{A\dot{B}}\xi^A\xi^{\dot{B}}$ es luxoide: $g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = 0$. De hecho, usando la Ec. (23a) se tiene

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu &= g_{\mu\nu}\sigma^\mu_{A\dot{B}}\xi^A\xi^{\dot{B}}\sigma^\nu_{C\dot{D}}\xi^C\xi^{\dot{D}} \\ &= 2\epsilon_{AC}\xi^A\xi^C\epsilon_{\dot{B}\dot{D}}\xi^{\dot{B}}\xi^{\dot{D}} = 0. \end{aligned}$$

Por lo que la Ec. (24) revela que la corriente j^μ es la suma de dos cuadrivectores que se encuentran sobre el cono de luz, lo cual no es evidente en la Ec. (4). En el caso de neutrinos descritos por la ecuación de Weyl, $j^\mu = c\sigma^\mu_{A\dot{B}}\chi^A\chi^{\dot{B}}$; que corresponde a un flujo con la velocidad de la luz.

Recíprocamente, cualquier cuadrivector luxoide real, v^μ, dirigido hacia el futuro (*i.e.*, $v^0 > 0$) se puede expresar en la forma $v^\mu = \sigma^\mu_{A\dot{B}}\xi^A\xi^{\dot{B}}$. En efecto, si v^μ satisface $g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = 0$, entonces definiendo $v_{A\dot{B}} \equiv v_\mu\sigma^\mu_{A\dot{B}}/2$, se tiene de las Ecs. (23) que $v^\mu = \sigma^\mu_{A\dot{B}}v^{A\dot{B}}$ y que $g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = 0$ equivale a $\epsilon_{AC}\epsilon_{\dot{B}\dot{D}}v^{A\dot{B}}v^{C\dot{D}} = 0$ lo que significa que el determinante de la matriz $(v^{A\dot{B}})$ es cero y por consiguiente $v^{A\dot{B}}$ es de la forma $v^{A\dot{B}} = \xi^A\varsigma^{\dot{B}}$ (los renglones de $(v^{A\dot{B}})$ son proporcionales entre sí, lo mismo que sus columnas). El que v^μ sea real implica que $(v^{A\dot{B}})$ es una matriz hermítica: $v^{A\dot{B}} = v^{B\dot{A}}*$; de donde resulta que $\varsigma^{\dot{B}}$ es proporcional a $\xi^{\dot{B}}$ $(\equiv \xi^B*)$. Si la componente v^0 es mayor que cero, el factor de proporcionalidad debe ser también mayor que cero y absorbiendo este factor, redefiniendo ξ^A, se obtiene el resultado indicado.

3. Transformación de los espinores

Por construcción, las componentes $\phi^{\dot{A}}$ y χ_A se transforman separadamente bajo una transformación de Lorentz propia. Explícitamente, para una transformación de Lorentz propia "infinitesimal", empleando las matrices γ^μ dadas en (12), de la Ec. (10) se tiene

$$S = 1 - \frac{1}{2}\Delta\omega_{0i}\begin{bmatrix}\sigma^i & 0\\ 0 & -\sigma^i\end{bmatrix} - \frac{i}{4}\epsilon_{ijk}\Delta\omega^{ij}\begin{bmatrix}\sigma^k & 0\\ 0 & \sigma^k\end{bmatrix}. \tag{26}$$

Expresando a ψ en la forma

$$\psi = \begin{bmatrix} i\chi_1\\ i\chi_2\\ \phi^{\dot{1}}\\ \phi^{\dot{2}}\end{bmatrix},$$

y similarmente para ψ' se obtiene, usando (26), que cada par de componentes de ψ se transforma de acuerdo a

$$\begin{bmatrix}\chi'_1\\ \chi'_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}(\Delta\omega_{03} + i\Delta\omega_{12}) & -\frac{1}{2}(\Delta\omega_{01} + i\Delta\omega_{23}) + \frac{i}{2}(\Delta\omega_{02} + i\Delta\omega_{31})\\ -\frac{1}{2}(\Delta\omega_{01} + i\Delta\omega_{23}) - \frac{i}{2}(\Delta\omega_{02} + i\Delta\omega_{31}) & 1 + \frac{1}{2}(\Delta\omega_{03} + i\Delta\omega_{12})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{bmatrix} \tag{27a}$$

$$\begin{bmatrix}\phi'^{\dot{1}}\\ \phi'^{\dot{2}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2}(\Delta\omega_{03} - i\Delta\omega_{12}) & \frac{1}{2}(\Delta\omega_{01} - i\Delta\omega_{23}) - \frac{i}{2}(\Delta\omega_{02} - i\Delta\omega_{31})\\ \frac{1}{2}(\Delta\omega_{01} - i\Delta\omega_{23}) + \frac{i}{2}(\Delta\omega_{02} - i\Delta\omega_{31}) & 1 - \frac{1}{2}(\Delta\omega_{03} - i\Delta\omega_{12})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi^{\dot{1}}\\ \phi^{\dot{2}}\end{bmatrix} \tag{27b}$$

o equivalentemente, tomando en cuenta que $\phi^{\dot{1}} = -\phi_{\dot{2}}$, $\phi^{\dot{2}} = \phi_{\dot{1}}$,

$$\begin{bmatrix}\phi'_{\dot{1}}\\ \phi'_{\dot{2}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}(\Delta\omega_{03} - i\Delta\omega_{12}) & -\frac{1}{2}(\Delta\omega_{01} - i\Delta\omega_{23}) - \frac{i}{2}(\Delta\omega_{02} - i\Delta\omega_{31})\\ -\frac{1}{2}(\Delta\omega_{01} - i\Delta\omega_{23}) + \frac{i}{2}(\Delta\omega_{02} - i\Delta\omega_{31}) & 1 + \frac{1}{2}(\Delta\omega_{03} - i\Delta\omega_{12})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{\dot{1}}\\ \phi_{\dot{2}}\end{bmatrix} \tag{27c}$$

Así, notando que la matriz en (27c) es la conjugada de la de (27a), incluso para una transformación de Lorentz propia finita, se tiene

$$\chi'_A = L_A^{\ B}\chi_B \tag{28a}$$

y

$$\phi'_{\dot{A}} = L_{\dot{A}}^{\dot{B}} \phi_{\dot{B}}, \tag{28b}$$

con

$$L_{\dot{A}}^{\dot{B}} = L_A^B * . \tag{28c}$$

Esto significa que bajo una transformación de Lorentz propia, las componentes χ_A se transforman mediante una cierta matriz compleja (L_A^B), mientras que las componentes $\phi_{\dot{A}}$ se transforman mediante la conjugada de (L_A^B), lo cual es consistente con las relaciones (25) (conjugando la Ec. (28*a*) y usando (25) y (28*c*) se obtiene la Ec. (28*b*)).

De la Ec. (26) (o (27)) se ve que el generador infinitesimal de una transformación de Lorentz propia sobre las componentes de ψ, que es $S - 1$, tiene traza cero, pero en general no es hermítico ni antihermítico. Por consiguiente, la única condición sobre (L_B^A) para que represente una transformación de Lorentz propia finita es que su determinante valga uno (recuérdese que $\det e^M = e^{\operatorname{tr} M}$). (El determinante de la matriz dada en (27*a*) es uno a primer orden en las $\Delta\omega_{\mu\nu}$). El conjunto de matrices complejas 2×2 cuyo determinante es igual a uno, con la operación de multiplicación matricial usual es un grupo que se denota por $SL(2, C)$. La condición $\det(L_B^A) = 1$ hace que los ocho números reales que forman la matriz (L_B^A) dependan de solamente seis números reales independientes; al igual que las transformaciones de Lorentz propias. (Cabe senalar que si solamente se consideran rotaciones en el espacio, $\Delta\omega_{ij} = 0$, $\Delta\omega_{ij} \neq 0$, las matrices (L_B^A) son unitarias, es decir, $(L_B^A) \in SU(2)$ grupo que, como se sabe, está relacionado con el grupo de rotaciones en dimensión tres $SO(3)$ [10]).

Usando las Ecs. (22) y (28*c*) se puede constatar que la matriz dada por

$$a^\mu_\nu = \tfrac{1}{2} \sigma^\mu{}_{A\dot{B}} \sigma_{\nu C\dot{D}} L^{CA} L^{\dot{D}\dot{B}} \tag{29}$$

es una matriz 4×4 real, la cual, debido a las Ecs. (23*a*) y (23*b*), satisface

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} a^{\mu}_{\lambda} a^{\nu}_{\rho} &= \tfrac{1}{4} g_{\mu\nu} \sigma^{\mu}{}_{A\dot{B}} \sigma_{\lambda C\dot{D}} L^{CA} L^{\dot{D}\dot{B}} \sigma^{\nu}_{E\dot{F}} \sigma_{\rho G\dot{H}} L^{GE} L^{\dot{H}\dot{F}} \\ &= \tfrac{1}{2} \epsilon_{AE} \epsilon_{\dot{B}\dot{F}} L^{CA} L^{GE} L^{\dot{D}\dot{B}} L^{\dot{H}\dot{F}} \sigma_{\lambda C\dot{D}} \sigma_{\rho G\dot{H}} \\ &= \tfrac{1}{2} \det(L^{RS}) \det(L^{\dot{R}\dot{S}}) \epsilon^{CG} \epsilon^{\dot{D}\dot{H}} \sigma_{\lambda C\dot{D}} \sigma_{\rho G\dot{H}} \\ &= \det(L^{RS}) \det(L^{\dot{R}\dot{S}}) g_{\lambda\rho}, \end{aligned}$$

lo que significa que si $\det(L^{RS}) = 1$, entonces la matriz (a^{μ}_{ν}) dada en (29) es una transformación de Lorentz (véase la Ec. (6)), la cual, como puede verificarse, es propia. Además, la transformación de Lorentz (29) construida a partir de (L^{A}_{B}) es justamente aquella que da origen a (L^{A}_{B}); esto puede verse fácilmente sustituyendo la transformación infinitesimal dada en (27*a*) en la Ec. (29), con lo que se obtiene, despreciando términos cuadráticos en $\Delta\omega_{\mu\nu}$, $a^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \Delta\omega^{\mu}_{\nu}$, que es precisamente la transformación considerada en (9*a*).

En otras palabras, la Ec. (29), que es análoga a (8), establece una relación entre la matriz (L^{A}_{B}) que, en el caso de la ecuación de Dirac, transforma las componentes de ψ y la transformación de Lorentz propia que actúa sobre las coordenadas y las componentes de cualquier cuadrivector. Es decir, una transformación de Lorentz propia queda determinada por su acción sobre los espinores de dos componentes. Sin embargo, la relación entre las matrices (L^{A}_{B}) pertenecientes a $SL(2,C)$ y las transformaciones de Lorentz propias no es biyectiva sino que a cada transformación de Lorentz propia le corresponden dos elementos de $SL(2,C)$. De hecho, de la Ec. (29), o de (8), se ve que las matrices (L^{A}_{B}) y $(-L^{A}_{B})$ corresponden a una misma matriz (a^{μ}_{ν}).

El que las matrices (L^{A}_{B}), que transforman los índices espinoriales, tengan determinante igual a uno equivale a que, para cualquier par de espinores ξ_A y ς_A, la forma bilineal

$$\xi_1 \varsigma_2 - \xi_2 \varsigma_1 = \epsilon^{AB} \xi_A \varsigma_B = \epsilon_{AB} \xi^A \varsigma^B = \xi^A \varsigma_A = -\xi_A \varsigma^A$$

sea invariante (en el sentido que $\xi'^A \varsigma'_A = \xi^A \varsigma_A$). Otra forma de expresar esta condición es

$$\epsilon_{AB} L^A_C L^B_D = \epsilon_{CD}. \tag{30}$$

Estas dos propiedades, equivalentes entre sí, implican que en el "espacio de espín" S, definido como el espacio vectorial complejo de dimensión dos cuyos elementos son los espinores con componentes de la forma ς^A, existe un "producto interior" el cual es invariante bajo las transformaciones de Lorentz propias pero que, a diferencia de un producto interior usual, es antisimétrico; con ϵ_{AB} jugando el papel de tensor métrico (compárese (30) con (6)). En forma similar, en el espacio $S^\bullet$, formado por los espinores cuyas componentes son de la forma $\varsigma^{\dot{A}}$, existe un producto interior antisimétrico tal que a cada par de espinores con componentes $\varsigma^{\dot{A}}$ y $\xi^{\dot{A}}$ le asocia el producto (complejo) $\epsilon_{\dot{A}\dot{B}} \varsigma^{\dot{A}} \xi^{\dot{B}}$, el cual es invariante bajo las transformaciones de Lorentz propias.

En vista de la Ec. (28a), las componentes "contravariantes" de un espinor de dos componentes deben transformarse de acuerdo a

$$\chi'^A = (L^{-1})^A_B \chi^B,$$

donde L^{-1} es la matriz inversa de (L^A_B), *i.e.*, $(L^{-1})^A_B L^B_C = \delta^A_C$; pero, de la Ec. (30) se obtiene que $(L^{-1})^A_B = -L^A_B$, por lo tanto

$$\chi'^A = -L^A_B \chi^B, \tag{31}$$

lo cual equivale a $\chi'^A = L^{BA} \chi_B$. Esta última relación puede obtenerse directamente de (28a) subiendo el índice libre A; por consiguiente, las Ecs. (28) contienen todas las reglas de transformación de las componentes con un índice espinorial bajo transfomaciones de Lorentz propias, tomando en cuenta las reglas para subir y bajar índices.

Los cuadrivectores y tensores de cualquier rango pueden representarse mediante componentes con índices espinoriales, usando los símbolos de Infeld y van der Waerden, de tal manera que el efecto de una transformación de Lorentz se obtenga de la regla de transformación para los índices espinoriales. Por ejemplo, si v^μ son las componentes de un cuadrivector, entonces bajo la transformación de Lorentz dada en (29), las nuevas componentes serán $v'^\mu = a^\mu_\nu v^\nu$. Expresando a v^ν y v'^μ mediante sus componentes espinoriales, $v^\nu = \sigma^\nu_{A\dot{B}} v^{A\dot{B}}$ y $v'^\mu = \sigma^\mu_{A\dot{B}} v'^{A\dot{B}}$, usando (23*a*) y (17) se tiene

$$\begin{aligned}\sigma^\mu_{A\dot{B}} v'^{A\dot{B}} &= \tfrac{1}{2}\sigma^\mu_{A\dot{B}}\sigma_{\nu C\dot{D}} L^{CA} L^{\dot{D}\dot{B}} \sigma^\nu_{R\dot{S}} v^{R\dot{S}} \\ &= \sigma^\mu_{A\dot{B}} L^{CA} L^{\dot{D}\dot{B}} \epsilon_{CR}\epsilon_{\dot{D}\dot{S}} v^{R\dot{S}} = \sigma^\mu_{A\dot{B}} L^A_R L^{\dot{B}}_{\dot{S}} v^{R\dot{S}},\end{aligned}$$

es decir

$$v'^{A\dot{B}} = L^A_R L^{\dot{B}}_{\dot{S}} v^{R\dot{S}} \tag{32}$$

(compárese con (31)). De acuerdo a esta última ecuación, cualquier cuadrivector puede interpretarse como una suma de productos tensoriales de espinores con un índice sin punto por espinores con un índice con punto (véase la Ec. (24)). Esta identificación es también aplicable al considerar transformaciones impropias. (Los símbolos de Infeld y van der Waerden pueden considerarse así como unisomorfismo entre el espacio de los cuadrivectores (complexificado) y el producto tensorial $S \otimes S^\bullet$.) El espacio de los espinores de Dirac, por otra parte, corresponde a la suma directa $S \oplus S^\bullet$.

Junto con las transformaciones de Lorentz propias, las transformaciones impropias, y específicamente la operación de inversión espacial $\mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}$, juegan un papel importante. De la Ec. (8) y las relaciones de conmutación (2) resulta que $P = \lambda\gamma^0$, donde λ es una constante, representa el efecto sobre los espinores de Dirac de la operación de inversión espacial. Usando la expresión de γ^0 dada en (12) y escribiendo

$$\psi = \begin{bmatrix} i\chi_A \\ \phi^{\dot{B}} \end{bmatrix},$$

se ve que P, la operación de paridad, tiene el efecto de aplicar el subespacio R sobre L y viceversa. En otras palabras, P "intercambia derecha e izquierda".

Si se escoge $P = i\gamma^0$, el efecto de P sobre las componentes de ψ está dada por

$$\begin{aligned} \chi_1 &\mapsto -\phi_{\dot{2}}, & \chi_2 &\mapsto \phi_{\dot{1}}, \\ \phi_{\dot{1}} &\mapsto -\chi_2, & \phi_{\dot{2}} &\mapsto \chi_1. \end{aligned} \tag{33}$$

Para objetos mixtos, como $\partial_{A\dot{B}}$, el efecto de P se obtiene cambiando cada índice 1 por $\dot{2}$ e intercambiando el signo, cada índice 2 por $\dot{1}$, cada índice $\dot{1}$ por 2 e invirtiendo el signo y cada índice $\dot{2}$ por 1. Así, por ejemplo, $\partial_{1\dot{1}} \mapsto \partial_{2\dot{2}}$, $\partial_{1\dot{2}} \mapsto -\partial_{1\dot{2}}$, $\partial_{2\dot{1}} \mapsto -\partial_{2\dot{1}}$, $\partial_{2\dot{2}} \mapsto \partial_{1\dot{1}}$, que, en vista de la Ec. (15), corresponde al efecto esperado para la inversión espacial.

4. El campo electromagnético

Como es sabido, las ecuaciones de Maxwell expresadas en forma covariante son [11]

$$\frac{\partial f^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu \tag{34}$$

y

$$\frac{\partial * f^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0, \tag{35}$$

donde $f^{\mu\nu}$ son las componentes del tensor de campo electromagnético: $f^{\mu\nu} = -f^{\nu\mu}$, $\mathbf{E} = (f^{01}, f^{02}, f^{03})$, $\mathbf{B} = (f^{23}, f^{31}, f^{12})$, j^μ denota las componentes de la cuadricorriente eléctrica y $*f^{\mu\nu} \equiv \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{\rho\sigma}/2$ (por consiguiente, $\mathbf{E} = (*f^{32}, *f^{13}, *f^{21})$, $\mathbf{B} = (*f^{01}, *f^{02}, *f^{03})$).

Definiendo las componentes espinoriales del campo electromagnético por

$$F_{AB\dot{C}\dot{D}} \equiv \sigma^\mu{}_{A\dot{C}} \sigma^\nu{}_{B\dot{D}} f_{\mu\nu}, \tag{36}$$

se tiene, debido a las Ecs. (17) y (23*b*),

$$f^{\mu\nu} = \tfrac{1}{4} \sigma^\mu{}_{A\dot{C}} \sigma^\nu{}_{B\dot{D}} F^{AB\dot{C}\dot{D}}, \tag{37}$$

y por la antisimetría de $f^{\mu\nu}$:

$$F_{AB\dot{C}\dot{D}} = -F_{BA\dot{D}\dot{C}}. \tag{38}$$

Debido a que cada índice espinorial toma solamente dos valores, es posible expresar las componentes del campo electromagnético en una forma compacta y conveniente. Si ψ_{AB} son componentes espinoriales cualesquiera, entonces $\psi_{AB} - \psi_{BA}$ son antisimétricas y deben ser múltiplo de ϵ_{AB} (en otras palabras, cualquier matriz 2×2 antisimétrica es un múltiplo de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$). Específicamente, $\psi_{AB} - \psi_{BA} = (\psi_{12} - \psi_{21})\epsilon_{AB}$, como puede comprobarse dando valores a A y B; equivalentemente,

$$\psi_{AB} - \psi_{BA} = (\epsilon^{RS}\psi_{RS})\epsilon_{AB}. \tag{39}$$

Aplicando este resultado a las componentes espinoriales del campo electromagnético se tiene

$$F_{AB\dot{C}\dot{D}} = \tfrac{1}{2}(F_{AB\dot{C}\dot{D}} + F_{BA\dot{C}\dot{D}}) + \tfrac{1}{2}(F_{AB\dot{C}\dot{D}} - F_{BA\dot{C}\dot{D}});$$

empleando ahora (38) y (39)

$$\begin{aligned} F_{AB\dot{C}\dot{D}} &= \tfrac{1}{2}(F_{AB\dot{C}\dot{D}} - F_{AB\dot{D}\dot{C}}) + \tfrac{1}{2}(F_{AB\dot{C}\dot{D}} - F_{BA\dot{C}\dot{D}}) \\ &= \tfrac{1}{2}(\epsilon^{\dot{R}\dot{S}}F_{AB\dot{R}\dot{S}})\epsilon_{\dot{C}\dot{D}} + \tfrac{1}{2}(\epsilon^{RS}F_{RS\dot{C}\dot{D}})\epsilon_{AB} \\ &= F_{AB}\epsilon_{\dot{C}\dot{D}} + F_{\dot{C}\dot{D}}\epsilon_{AB}, \end{aligned} \tag{40}$$

donde

$$F_{AB} \equiv \tfrac{1}{2}\epsilon^{\dot{R}\dot{S}}F_{AB\dot{R}\dot{S}} \quad \text{y} \quad F_{\dot{C}\dot{D}} \equiv \tfrac{1}{2}\epsilon^{RS}F_{RS\dot{C}\dot{D}}. \tag{41}$$

Las componentes F_{AB} y $F_{\dot{C}\dot{D}}$ resultan ser simétricas ya que $F_{BA} = \epsilon^{\dot{R}\dot{S}}F_{BA\dot{R}\dot{S}}/2 = -\epsilon^{\dot{S}\dot{R}}F_{BA\dot{R}\dot{S}}/2$, lo cual debido a (38) es igual a $\epsilon^{\dot{S}\dot{R}}F_{AB\dot{S}\dot{R}}/2 = F_{AB}$. Similarmente se puede ver que $F_{\dot{C}\dot{D}} = F_{\dot{D}\dot{C}}$. Por otra parte, con las $f^{\mu\nu}$ siendo reales, de (36) y (22) se tiene que $F_{AB\dot{C}\dot{D}}* = F_{CD\dot{A}\dot{B}}$, de donde, junto con la igualdad $\epsilon^{RS}* = \epsilon^{\dot{R}\dot{S}}$, se concluye que

$$F_{AB}* = F_{\dot{A}\dot{B}}, \tag{42}$$

es decir, todas las componentes $f^{\mu\nu}$ están contenidas en las tres componentes espinoriales independientes (complejas) F_{AB}. En forma explícita, usando (41) y (36), se halla que

$$F_{11} = -(E_x - iB_x) + i(E_y - iB_y),$$
$$F_{12} = F_{21} = E_z - iB_z \tag{43}$$

y

$$F_{22} = (E_x - iB_x) + i(E_y - iB_y).$$

Denotando por $*F_{AB}$ y $*F_{\dot{C}\dot{D}}$ las componentes espinoriales asociadas a $*f^{\mu\nu}$ (*e.g.*, $*F_{AB} = \epsilon^{\dot{R}\dot{S}}\sigma^{\mu}_{\ A\dot{R}}\sigma^{\nu}_{\ B\dot{S}} * f_{\mu\nu}/2$) se obtiene la relación

$$*F_{AB} = -iF_{AB}, \qquad *F_{\dot{A}\dot{B}} = iF_{\dot{A}\dot{B}}. \tag{44}$$

Por lo tanto, sustituyendo (40) en (37), se obtiene

$$f^{\mu\nu} = \tfrac{1}{4}\sigma^{\mu}_{\ A\dot{C}}\sigma^{\nu}_{\ B\dot{D}}(F^{AB}\epsilon^{\dot{C}\dot{D}} + F^{\dot{C}\dot{D}}\epsilon^{AB}); \tag{45}$$

y en forma similar, usando (44),

$$*f^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}\sigma^{\mu}_{\ A\dot{C}}\sigma^{\nu}_{\ B\dot{D}}(F^{AB}\epsilon^{\dot{C}\dot{D}} - F^{\dot{C}\dot{D}}\epsilon^{AB}). \tag{46}$$

(Por supuesto, algo similar se cumple para cualquier tensor real antisimétrico de rango dos en lugar de $f^{\mu\nu}$).

Sustituyendo ahora (45) en las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas (34) y usando la Ec. (21) se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}&\left[\frac{1}{4}\sigma^{\mu}_{\ A\dot{C}}\sigma^{\nu}_{\ B\dot{D}}(F^{AB}\epsilon^{\dot{C}\dot{D}} + F^{\dot{C}\dot{D}}\epsilon^{AB})\right]\\ &= \frac{1}{4}\sigma^{\mu}_{\ A\dot{C}}\partial_{B\dot{D}}(F^{AB}\epsilon^{\dot{C}\dot{D}} + F^{\dot{C}\dot{D}}\epsilon^{AB}) = \frac{4\pi}{c}j^{\mu}.\end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados de esta ecuación por $g_{\mu\nu}\sigma^{\nu}_{\ R\dot{S}}$ y usando la Ec. $(23a)$ se obtiene entonces

$$\frac{1}{2}\epsilon_{AR}\epsilon_{\dot{C}\dot{S}}\partial_{B\dot{D}}(F^{AB}\epsilon^{\dot{C}\dot{D}} + F^{\dot{C}\dot{D}}\epsilon^{AB}) = \frac{4\pi}{c}g_{\mu\nu}\sigma^{\nu}_{\ R\dot{S}}j^{\mu}.$$

Equivalentemente, debido a que $\epsilon_{CS}\epsilon^{CD} = \delta_S^D$ y a la Ec. (17),

$$-\frac{1}{2}\partial_{B\dot{S}}F_R^B - \frac{1}{2}\partial_{R\dot{D}}F_{\dot{S}}^{\dot{D}} = \frac{4\pi}{c}j_{R\dot{S}}, \tag{47}$$

donde $J_{R\dot{S}} \equiv \sigma^\nu_{R\dot{S}}j_\nu$ son las componentes espinoriales de la corriente. Dado que las componentes j_ν son reales, las componentes $J_{R\dot{S}}$ son hermíticas: $J_{R\dot{S}}* = J_{S\dot{R}}$.

Procediendo en forma similar, sustituyendo (46) en las ecuaciones de Maxwell homogéneas (35), se obtiene

$$-\tfrac{1}{2}\partial_{B\dot{S}}F_R^B + \tfrac{1}{2}\partial_{R\dot{D}}F_{\dot{S}}^{\dot{D}} = 0. \tag{48}$$

Así, de (47) y (48), se ve que las ecuaciones de Maxwell equivalen a $\partial_{\dot{S}}^B F_{RB} = (4\pi/c)J_{R\dot{S}}$ y $\partial_R^{\dot{D}}F_{\dot{S}\dot{D}} = (4\pi/c)J_{R\dot{S}}$; pero, dado que cada una de estas ecuaciones es la conjugada de la otra (véase la Ec. (42)), se halla finalmente que las ecuaciones de Maxwell equivalen a las cuatro ecuaciones complejas

$$\partial_{\dot{C}}^A F_{AB} = \frac{4\pi}{c}J_{B\dot{C}}. \tag{49}$$

Como ejemplo de la utilidad de la formulación espinorial para las ecuaciones de Maxwell, a continuación se expresa el campo electromagnético sin fuentes en términos de un potencial escalar (potencial de Debye). Como es sabido, las ecuaciones de Maxwell homogéneas (35) implican la existencia de un cuadripotencial A_μ para el campo electromagnético, de tal manera que, en una región sin fuentes, cada componente cartesiana A_μ satisface la ecuación de ondas. De las Ecs. (49) resulta que un campo electromagnético sin fuentes puede también expresarse en términos de un solo potencial escalar complejo (en lugar de cuatro potenciales reales) que satisface la ecuación de ondas.

Definiendo $x_{A\dot{B}} \equiv \sigma^\mu{}_{A\dot{B}}x_\mu$, se halla que al actuar sobre una función, $\partial_{A\dot{B}} = 2\partial/\partial x^{A\dot{B}}$; por lo que las ecuaciones de Maxwell sin fuentes equivalen a

$$\epsilon^{RA}\frac{\partial}{\partial x^{R\dot{C}}}F_{AB} = 0. \tag{50}$$

Haciendo $C = 1$ en la Ec. (50) se tiene el par de ecuaciones:

$$(B=1)\frac{\partial}{\partial x^{1\mathrm{i}}}F_{21} - \frac{\partial}{\partial x^{2\mathrm{i}}}F_{11} = 0,$$
$$(B=2)\frac{\partial}{\partial x^{1\mathrm{i}}}F_{22} - \frac{\partial}{\partial x^{2\mathrm{i}}}F_{12} = 0.$$

La primera de estas ecuaciones implica la existencia de una función (compleja) M tal que $F_{11} = \partial M/\partial x^{1\mathrm{i}}$ y $F_{21} = \partial M/\partial x^{2\mathrm{i}}$. Similarmente, de la segunda ecuación se ve que $F_{12} = \partial N/\partial x^{1\mathrm{i}}$ y $F_{22} = \partial N/\partial x^{2\mathrm{i}}$, donde N es alguna función. Entonces, debido a la simetría de F_{AB}, $0 = F_{21} - F_{12} = \partial M/\partial x^{2\mathrm{i}} - \partial N/\partial x^{1\mathrm{i}}$, lo que a su vez implica la existencia de una función compleja H tal que $M = \partial H/\partial x^{1\mathrm{i}}$ y $N = \partial H/\partial x^{2\mathrm{i}}$, luego, de las relaciones anteriores, $F_{11} = (\partial/\partial x^{1\mathrm{i}})(\partial H/\partial x^{1\mathrm{i}})$, $F_{12} = (\partial/\partial x^{1\mathrm{i}})(\partial H/\partial x^{2\mathrm{i}})$, $F_{22} = (\partial/\partial x^{2\mathrm{i}})(\partial H/\partial x^{2\mathrm{i}})$, o en forma abreviada

$$F_{AB} = \frac{\partial}{\partial x^{A\mathrm{i}}}\frac{\partial H}{\partial x^{B\mathrm{i}}}. \tag{51}$$

El potencial H correspondiente a un campo dado no está definido unívocamente; de (51) se ve fácilmente que los potenciales H y

$$H' = H + a_A(x^{1\dot{2}}, x^{2\dot{2}})x^{A\mathrm{i}} + b(x^{1\dot{2}}, x^{2\dot{2}}), \tag{52}$$

donde a_1, a_2 y b son funciones complejas arbitrarias de dos variables, corresponden a un mismo campo.

Sustituyendo (51) en (50) con $C = 2$ se halla la condición que debe satisfacer el potencial H para que F_{AB} sea solución de las ecuaciones de Maxwell:

$$\epsilon^{RA}\frac{\partial}{\partial x^{R\dot{2}}}\frac{\partial}{\partial x^{A\mathrm{i}}}\frac{\partial H}{\partial x^{B\mathrm{i}}} = 0.$$

Conmutando las derivadas se obtiene $(\partial/\partial x^{B\mathrm{i}})(\epsilon^{RA}\partial/\partial x^{R\dot{2}}) \times \partial H/\partial x^{A\mathrm{i}} = 0$, lo que significa que $\epsilon^{RA}\partial/\partial x^{R\dot{2}}(\partial H/\partial x^{A\mathrm{i}}) = f(x^{1\dot{2}}, x^{2\dot{2}})$. Expresando a f en la forma $f = \partial h^A/\partial x^{A\dot{2}}$, donde h^1 y h^2 son funciones de $x^{1\dot{2}}$ y $x^{2\dot{2}}$ (lo cual siempre es posible y en una infinidad de formas distintas), y reemplazando H por $H' = H + h_A x^{A\dot{1}}$, el cual produce el mismo campo que H (véase la Ec. (52)), para H' se tiene, $\epsilon^{RA}\partial/\partial x^{R\dot{2}}(\partial H'/\partial x^{A\dot{1}}) = \epsilon^{RA}\partial/\partial x^{R\dot{2}}(\partial H/\partial x^{A\dot{1}}) + \epsilon^{RA}\partial h_A/\partial x^{R\dot{2}} = f - \partial h^R/\partial x^{R\dot{2}} = 0$. Por lo tanto, notando que $\epsilon^{RA}\partial/\partial x^{R\dot{2}}\partial/\partial x^{A\dot{1}} = (1/4)(\nabla^2 - (1/c^2)\partial^2/\partial t^2) \equiv (1/4)\Box$, cualquier solución de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes puede expresarse en la forma (51), donde H satisface la ecuación de ondas

$$\Box H = 0. \tag{53}$$

Así por ejemplo, el campo de una carga puntual estática dado por $\mathbf{E} = q\mathbf{r}/r^3$, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, que, de acuerdo a (43), tiene las componentes espinoriales

$$\begin{aligned} F_{11} &= -q(x - iy)/r^3, \\ F_{12} &= qz/r^3 \end{aligned} \tag{54}$$

y

$$F_{22} = q(x + iy)/r^3,$$

es generado por el potencial

$$H = -4qr/(x + iy). \tag{55}$$

Vale la pena señalar que este potencial expresado en coordenadas esféricas es separable: $H = -4q\csc\theta e^{-i\phi}$. La función de θ, $\csc\theta$, satisface la ecuación asociada de Legendre con $|m| = 1$ y $\ell(\ell+1) = 0$; lo que significa que $\ell = 0$ o $\ell = -1$, mientras que la función de ϕ, $e^{-i\phi}$, corresponde a $m = -1$. Claramente $\csc\theta e^{-i\phi}$ no es un armónico esférico ya que diverge a lo largo del eje z; sin embargo, el campo generado por este potencial solamente diverge en el origen.

En el caso de una onda plana que se propaga en la dirección z, $B_x = -E_y$, $B_y = E_x$, $B_z = E_z = 0$ y los campos sólo dependen de $(t-z)$ (es decir, son funciones de $x^{2\dot{2}}$ solamente). Entonces, $F_{11} = F_{12} = 0$, $F_{22} = 2(E_x + iE_y)$, siendo F_{22} una función compleja arbitraria, f, de $x^{2\dot{2}}$ (que depende, entre otras cosas, del tipo de polarización de la onda). Este campo se puede generar por el potencial $H = (x^{2\mathrm{i}})^2 f(x^{2\dot{2}})/2 \sim (x+iy)^2 f(t-z)/2$.

Otras cantidades relacionadas con el campo electromagnético tienen también una expresión simple en términos de las componentes espinoriales. Por ejemplo, de las Ecs. (45), (46), (23*a*) y (17), resulta que los dos invariantes del campo electromagnético están dados por

$$\begin{aligned} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} &= \tfrac{1}{2}(F_{AB}F^{AB} + F_{\dot{C}\dot{D}}F^{\dot{C}\dot{D}}) \\ &= \mathrm{Re}(F_{AB}F^{AB}) = 2\,\mathrm{Re}(\det(F_{AB})) \end{aligned} \tag{56}$$

y

$$\begin{aligned} f_{\mu\nu} * f^{\mu\nu} &= \frac{1}{2i}(F_{AB}F^{AB} - F_{\dot{C}\dot{D}}F^{\dot{C}\dot{D}}) \\ &= \mathrm{Im}(F_{AB}F^{AB}) = 2\,\mathrm{Im}(\det(F_{AB})). \end{aligned} \tag{57}$$

De hecho, de la Ec. (43) se tiene

$$\begin{aligned} \det(F_{AB}) &= -(E_x - iB_x)^2 - (E_y - iB_y)^2 - (E_z - iB_z)^2 \\ &= -(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} - \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}) + 2i\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}. \end{aligned}$$

Similarmente, se halla que el tensor de energía e impulso del campo electromagnético [11], dado por $T_{\mu\nu} = -(f_{\mu\rho}f_\nu^{\ \rho} - (1/4)f_{\rho\sigma}f^{\rho\sigma}g_{\mu\nu})/4\pi$, corresponde a

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi}\sigma_\mu^{A\dot{B}}\sigma_\nu^{C\dot{D}}F_{AC}F_{\dot{B}\dot{D}}. \tag{58}$$

Los dos invariantes del campo electromagnético son cero, *i.e.*, $\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}$ y $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = 0$ —característico de radiación electromagnética—, si y sólo si $\det(F_{AB}) = 0$, lo cual equivale a que F_{AB} sea de la forma $F_{AB} = \alpha_A\beta_B$ (un renglón de (F_{AB}) es proporcional al otro y una columna de (F_{AB}) es proporcional a la otra), pero dado que las componentes de F_{AB} son simétricas, $F_{AB} = F_{BA}$, β_A debe ser proporcional a α_A: $\beta_A = \lambda\alpha_A$, donde λ es una función de valores complejos. Por consiguiente, $F_{AB} = \lambda\alpha_A\alpha_B$. Las componentes $k^\mu \equiv \sigma^\mu_{\ A\dot{B}}\alpha^A\alpha^{\dot{B}}$ forman un cuadrivector luxoide que determina la dirección de propagación de la radiación. De la Ec. (58) se tiene que, en este caso,

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi}|\lambda|^2 k_\mu k_\nu.$$

En el caso en que $\det(F_{AB}) \neq 0$ existe una expresión para F_{AB} similar a la dada arriba. Sea ς^A (las componentes de) un espinor arbitrario, entonces, suponiendo *e.g.* que $F_{11} \neq 0$, $F_{AB}\varsigma^A\varsigma^B = F_{11}(\varsigma^1)^2 + 2F_{12}\varsigma^1\varsigma^2 + F_{22}(\varsigma^2)^2 = (\varsigma^2)^2 \times \{F_{11}(\varsigma^1/\varsigma^2)^2 + 2F_{12}(\varsigma^1/\varsigma^2) + F_{22}\} = (\varsigma^2)^2 F_{11}[(\varsigma^1/\varsigma^2) - z_1] \times [(\varsigma^1/\varsigma^2) - z_2]$, donde $z_{1,2} = [-2F_{12} \pm \sqrt{(2F_{12})^2 - 4F_{11}F_{22}}]/2F_{11} = [-F_{12} \pm \sqrt{-\det(F_{AB})}]/F_{11}$. Luego $F_{AB}\varsigma^A\varsigma^B = F_{11}(\varsigma^1 - z_1\varsigma^2)(\varsigma^1 - z_2\varsigma^2)$, lo cual puede expresarse en la forma $(\alpha_A\varsigma^A)(\beta_B\varsigma^B)$ (haciendo, por ejemplo, $\alpha_1 = F_{11}$, $\alpha_2 = -z_1F_{11}$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = -z_2$). Por lo tanto, $F_{AB}\varsigma^A\varsigma^B = (\alpha_A\beta_B)\varsigma^A\varsigma^B = (\alpha_A\beta_B + \alpha_B\beta_A)\varsigma^A\varsigma^B/2$; de donde, debido a que F_{AB} es simétrico y ς^A es arbitrario, se concluye que $F_{AB} = (\alpha_A\beta_B + \alpha_B\beta_A)/2$. Los espinores α_A y β_A definen dos direcciones luxoides llamadas direcciones principales de F_{AB}: $k^\mu = \sigma^\mu_{A\dot{B}}\alpha^A\alpha^{\dot{B}}$, $\ell^\mu = \sigma^\mu_{A\dot{B}}\beta^A\beta^{\dot{B}}$. Si estas direcciones son distintas (lo que equivale a que las raíces z_1 y z_2 sean distintas y a que $\det(F_{AB}) \neq 0$) se dice que el campo es algebraicamente general; mientras que si estas direcciones coinciden (lo que equivale a $\det(F_{AB}) = 0$) se dice que el campo es algebraicamente especial, que es el caso tratado arriba. Para el campo dado en la Ec. (54), las dos direcciones principales en cada punto son radiales, una saliendo del origen y la otra dirigida hacia el origen.

Un campo sin masa de espín s ($s = 1/2, 1, 3/2, \ldots$) se representa mediante un espinor de $2s$ índices, totalmente simétrico, $\phi_{AB\cdots L}$ o $\phi_{\dot{A}\dot{B}\cdots\dot{L}}$ (dependiendo de la helicidad del campo, es decir de que el campo sea "izquierdo" o "derecho"). Las ecuaciones para estos campos libres son

$$\partial^A_{\dot{R}}\phi_{AB\cdots L} = 0$$

y

$$\partial^{\dot{A}}_R\phi_{\dot{A}\dot{B}\cdots\dot{L}} = 0.$$

Estas ecuaciones se reducen a la ecuación de Weyl cuando $s = 1/2$ y a las ecuaciones de Maxwell sin fuentes (49) cuando $s = 1$. Siguiendo un procedimiento similar al empleado arriba, se demuestra que un campo sin masa libre de espín s puede expresarse en términos de un potencial de Debye, por ejemplo en la forma

$$\phi_{AB\cdots L} = \frac{\partial}{\partial x^{A\dot{1}}} \frac{\partial}{\partial x^{B\dot{1}}} \cdots \frac{\partial H}{\partial x^{L\dot{1}}},$$

donde (usando la libertad residual para escoger el potencial) H satisface la ecuación de ondas $\Box H = 0$.

Agradecimientos

El autor agradece el apoyo del Sistema Nacional de Investigadores.

Referencias

1. F.A. Pirani, *Introduction to gravitational theory*, in *Lectures on General Relativity*, S. Deser y K.W. Ford (eds.) (1964) Brandeis Summer Institute, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1965).
2. R. Penrose, *Ann. Phys.* **10** (1960) 171.
3. W.L. Bade y H. Jehle, *Rev. Mod. Phys.* **25** (1953) 714.
4. J.F. Plebañski, *Spinors, tetrads and forms*, monografía del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México, D.F. (1974).
5. R. Penrose y W. Rindler, *Spinors and Space-time*, Vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge (1984).
6. C.W. Misner, K.S. Thorne y J.A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, San Francisco (1973).
7. J.D. Bjorken y S.D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, Mc Graw-Hill, New York (1964).
8. R. Penrose, *Proc. Roy. Soc. London A* **284** (1965) 159.
9. J.D. Bjorken y S.D. Drell, *op cit.* p. 258.
10. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Cambridge, Mass. (1950).
11. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2a. Ed., Wiley, New York (1975), Cap. 12.