Enseñanza *Revista Mexicana de Física* **33** *No. 2(1987) 265–274*

Inclinación de la órbita de un satélite geoestacionario

Dionisio Manuel Tun Molina

Area Dinámica Orbital, Sub. Exp. Sat. Nales., DGT, SCT, *Apdo. Postal 25–541, 03530 México, D.F. y Escuela Superior de Física y Matemáticas del* IPN

(recibido el 13 de agosto de 1986; aceptado el 16 de marzo de 1987)

Resumen. Se muestra la forma en que afectan las fuerzas gravitacionales del Sol, la Luna y la Tierra sobre la inclinación de la órbita de un satélite geoestacionario.

Abstract. It is shown the way the Sun, Moon and Earth's Gravitational Forces Act on the inclination of a Geo-stationary Satellite's Orbit.

PACS: 01.55.+b; 46.90.+s; 95.10.Ce

1. Introducción

Un satélite geoestacionario es aquel que visto desde la Tierra aparece como un punto fijo. Para que se logre esto, el satélite tiene que orbitar en el plano del ecuador y su velocidad angular debe ser igual a la de la Tierra, lo cual requiere que el satélite se encuentre (aproximadamente) a 42,000 Km del centro de ella y en una órbita circular.

A tales distancias, las principales perturbaciones en el satélite son producidas por el achatamiento de la Tierra y las atracciones gravitacionales del Sol y la Luna, siendo todas ellas del mismo orden de magnitud.

Para cuantificar los efectos causados por ellas, se tomará un potencial perturbador formado por el segundo armónico zonal del potencial gravitacional de la Tierra y los segundos armónicos en la expansión de cada uno de los potenciales del Sol y la Luna. Estos términos no afectan la excentricidad[1] de la órbita ni la velocidad angular del satélite, por lo cual se consideraran órbitas inicialmente circulares.

Los potenciales perturbadores se promediarán analíticamente sobre la anomalía media M, tanto del satélite como de los cuerpos perturbadores, donde M viene dado por $M = 2\pi(t - T)/P$, con P igual al período del movimiento del cuerpo en cuestión y $t - T$ igual al tiempo transcurrrido desde cierto instante T.

Al hacer estos promedios sólo sobreviven los términos de período largo. Así, para que este procedimiento sea aceptable, los tiempos característicos del movimiento del plano de la órbita del satélite deberán ser razonablemente mayores que los períodos de los cuerpos perturbadores.

Al ubicar el satélite en el espacio, se recurre a un sistema de coordenadas fijo a la Tierra, cuyo origen se encuentra en el centro de ella. El eje Z está dirigido hacia el polo norte, el eje X hacia el punto donde el Sol cruza el plano del ecuador de sur a norte en su aparente trayectoria (eclíptica) alrededor de la Tierra. A este punto lo denotaremos por Aries (Γ). El eje Y es escogido de tal forma que se tenga un sistema derecho.

Para definir el plano de la órbita del satélite se especifica el valor de Ω (Fig. 1), que es el ángulo que hay desde el eje X a la línea del nodo ascendente, es decir, la línea que va del origen al punto donde el satélite cruza de sur a norte el ecuador, y que referiremos como nodo ascendente, y también el valor de i, que es el ángulo agudo que forma el plano de la órbita con el plano del ecuador y que llamaremos inclinación de la órbita.

Además para definir la forma de la órbita en el plano señalado en el párrafo anterior se especifican los valores de ω, que es el ángulo que hay (en la dirección del movimiento del satélite) desde el nodo ascendente hasta el perigeo de la órbita y que llamaremos argumento del perigeo, a y e, que son el semieje mayor y la excentricidad de la

---

[1] Siempre que tenga un valor inicial igual a cero.

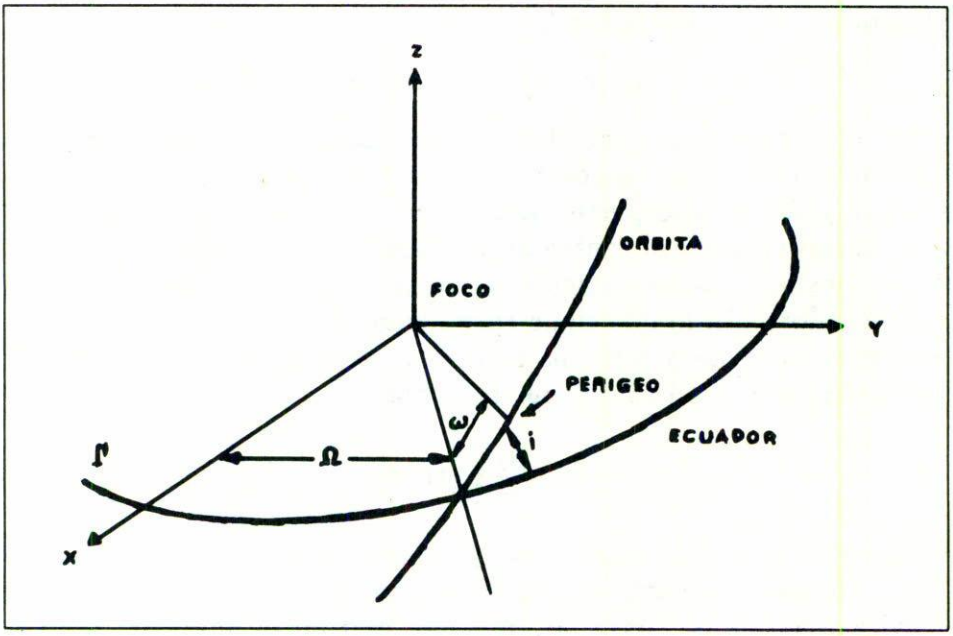

FIGURA 1.

elípse respectivamente. Estos 5 elementos y la anomalía media (a, e, i, M, ω y Ω) son conocidos como los elementos clásicos [1].

Otros elementos adicionales que se definen para órbitas geoestacionarias son [2]: $l = s - \mathrm{GHA}$, $d = \dot{l}$, $K_1 = e\cos(\omega + \Omega)$, $h_1 = e\,\mathrm{sen}(\omega + \Omega)$, $K_2 = i\cos\Omega$ y $h_2 = i\cos\Omega$, donde GHA es el ángulo que hay desde el eje X al meridiano de Greenwich (positivo en la dirección de rotación de la Tierra), s es igual a $M + \omega + \Omega$, y el punto sobre una variable denota la derivada con respecto al tiempo. En términos de estos elementos se definen en el plano X–Y los vectores de deriva $\mathbf{d} = (l - l_s, d)$, de excentricidad $\mathbf{e} = (K_1, h_1)$ y de inclinación $\mathbf{i} = (K_2, h_2)$, donde l_s es una longitud de referencia.

2. Evolución del plano orbital

Al considerar los efectos del Sol y de la Luna sobre el satélite, podemos utilizar la función [3]

$$\mu_j\{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|^{-1}-r_j^{-3}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_j)\}$$

como el potencial perturbador que producen en el punto donde se encuentra el satélite, donde $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}_j$ son los vectores de posición del satélite y del cuerpo perturbador ($j=1$ se referirá al Sol y $j=2$ a la Luna) relativo al centro de la Tierra y, además, $\mu_j = GM_j$ (G es la constante de gravitación universal y M_j la masa del cuerpo perturbador). En lo que sigue consideramos $r \ll r_j$ y sólo utilizaremos el término de orden más bajo de la expansión del potencial en potencias de r/r_j, el cual viene dado por

$$\frac{\mu_j r^2}{r_j^3}P_2(\cos\theta_j) = \frac{\mu_j}{r^5}\left\{\frac{3}{2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_j)^2 - \frac{1}{2}r^2r_j^2\right\},$$

donde θ_j es el ángulo entre $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}_j$ y $P_2(x)$ es el segundo polinomio de Legendre. Considerando además el segundo armónico del potencial gravitacional de la Tierra [4], podemos escribir el potencial perturbador como

$$\begin{aligned} U &= -\frac{\mu J_2 R_E^2}{r^3}P_2(\cos\theta_0) + \sum_{j=1,2}\frac{\mu_j r^2}{r_j^3}P_2(\cos\theta_j) \\ &= -\frac{\mu J_2 R_E^2}{2r^5}\{3(\mathbf{r}\cdot\hat{R}_0)^2 - r^2\} + \sum_{j=1,2}\frac{\mu_j}{2r_j^5}\{3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_j)^2 - r^2r_j^2\}, \end{aligned}$$

con $\mu = Gm$ (m es la masa de la Tierra), J_2 es el coeficiente del segundo armónico zonal, R_E es el radio ecuatorial de la Tierra y θ_0 es el ángulo entre $\mathbf{r}$ y el eje polar de la Tierra ($\hat{R}_0$ es un vector unitario a lo largo de éste).

Para suprimir términos de período corto, se promedia el potencial perturbador sobre la anomalía media de cada uno de los cuerpos en cuestión. Al hacerlo con la anomalía media M del satélite, las siguientes integrales se deben usar [5]:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^3}\,dM = \frac{1}{a^3(1-e^2)^{3/2}},$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^5}\mathbf{rr}\,dM = \frac{1}{2a^3(1-e^2)^{3/2}}(I-\mathbf{RR}),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^2\,dM = a^2\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)$$

y

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathbf{rr}\,dM = \frac{1}{2}a^2\{(1+4e^2)\mathbf{PP}+(1-e^2)\mathbf{QQ}\},$$

donde a y e son el semieje mayor y excentricidad de la órbita del satélite, $\mathbf{R}$ es el vector unitario normal a la órbita (definido según la regla de la mano derecha: si los dedos, excepto el pulgar, apuntan en la dirección de movimiento, el pulgar determinará la dirección del vector normal), $\mathbf{P}$ es otro vector unitario en el plano de la órbita, dirigido hacia el perigeo, y $\mathbf{Q} = \mathbf{R}\times\mathbf{P}$. I es el tensor identidad.

Integrales similares se pueden utilizar para promediar sobre las anomalías medias de los cuerpos perturbadores. Después de realizar esto, el potencial promediado viene dado por [6]

$$U = na^2U^*,$$

con

$$U^* = \omega_0(1-e^2)^{-3/2}\left\{\frac{1}{2}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}_0)^2-\frac{1}{6}\right\} + \sum_{j=1,2}\omega_j\left|\frac{1}{2}(1-e^2)(\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}_j)^2+e^2\left\{1-\frac{5}{2}(\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}_j)^2\right\}\right|,$$

con n (movimiento medio del satélite) dado por $n = 2\pi/T$, donde T es el período del satélite,

$$\omega_0 = \frac{3nJ_2R_E^2}{2a^2}, \qquad \omega_j = \frac{3\mu_j}{4na_j^2(1-e_j^2)^{3/2}},$$

a_j y e_j son el semieje mayor y excentricidad de la órbita del j-ésimo cuerpo perturbador. R_j es un vector normal del plano de la órbita.

Para estudiar la acción de este potencial sobre el satélite, se definen los siguientes vectores: $\mathbf{e} = e\mathbf{P}$ y $\mathbf{h} = (1-e^2)^{1/2}\mathbf{R}$, de tal forma que $\mathbf{e}\cdot\mathbf{h} = 0$ y $\mathbf{e}^2+\mathbf{h}^2 = 1$.

En términos de estos vectores las ecuaciones de Lagrange para los elementos clásicos toman la siguiente forma compacta y simétrica [7]:

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{h} \times \frac{\partial U^*}{\partial \mathbf{h}} + \mathbf{e} \times \frac{\partial U^*}{\partial \mathbf{e}},$$
$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{e} \times \frac{\partial U^*}{\partial \mathbf{h}} + \mathbf{h} \times \frac{\partial U^*}{\partial \mathbf{e}},$$

con $\partial/\partial\mathbf{r} \equiv \nabla_r$ el operador gradiente.

Escribiendo U^* en términos de $\mathbf{e}$ y $\mathbf{h}$, la ecuación de movimiento para este último toma la forma [6]

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{h}} = &-\omega_0(1-e^2)^{-5/2}(\mathbf{h}\cdot\mathbf{R}_0)(\mathbf{R}_0\times\mathbf{h})\\ &-\sum_{j=1,2}\omega_j(\mathbf{h}\cdot\mathbf{R}_j)(\mathbf{R}_j\times\mathbf{h}) + 5\sum_{j=1,2}\omega_j(\mathbf{e}\cdot\mathbf{R}_j)(\mathbf{R}_j\times\mathbf{e});\end{aligned}$$

considerando órbitas inicialmente circulares la relación anterior se reduce a

$$\dot{\mathbf{R}} = -\sum_{j=0}^{2}\omega_j(\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}_j)(\mathbf{R}_j\times\mathbf{R}),$$

si sólo uno de los términos del lado derecho estuviera presente, el vector normal a la órbita simplemente tendría un movimiento de regresión alrededor del correspondiente $\mathbf{R}_j$.

Para órbitas geoestacionarias, los coeficientes ω_j toman los valores

$$\omega_0 = 4.900°/\text{año}, \quad \omega_1 = 0.738°/\text{año}, \quad \omega_2 = 1.611°/\text{año},$$

de donde se concluye que los efectos sobre el satélite, producidos por el potencial perturbativo de la Tierra son mayores que los de la Luna y éstos mayores que los del Sol.

La normal a la eclíptica puede considerarse fija y con una inclinación de 23.44° respecto al eje polar de la Tierra (eje Z). La normal a la órbita de la Luna tiene una inclinación de 5.15° respecto a la normal a la órbita de la eclíptica y precesa alrededor de ella con un período de 18.6 años.

Si definimos el vector

$$\mathbf{Q} = \sum_{j=0}^{2} \omega_j (\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}_j) \mathbf{R}_j,$$

entonces la ecuación para **R** toma la forma

$$\dot{\mathbf{R}} = -\mathbf{Q} \times \mathbf{R}.$$

Así, **R** tiene, instantáneamente, un movimiento de precesión alrededor de **Q** con una frecuencia angular igual a $|\mathbf{Q}|$, donde **Q** no permanece constante en dirección ni en magnitud. Sin embargo para cambios de unos pocos grados en la dirección de **R**, puede considerarse que este tiene un movimiento de precesión alrededor del valor medio de **Q**. Por ello, para describir el movimiento de la normal a la órbita, **R**, es necesario que determinemos las coordenadas del vector **Q**, para lo cual haremos uso de que en marzo de 1969, el eje polar de la Tierra, la normal a la eclíptica y la normal a la órbita de la Luna fueron coplanares.

Sea $\mathbf{R}_0 = (0,0,1)$ y $\mathbf{R}_1 = (0, -\operatorname{sen}(\epsilon), \cos(\epsilon))$, con $\epsilon = 23.44°$, entonces las componentes de $\mathbf{R}_2$ las podemos calcular de la relación

$$\dot{\mathbf{R}}_2 = -\omega \mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2,$$

con $\omega = 2\pi/(18.6 \text{ años})$.

Si denotamos por X_2, Y_2, Z_2 las componentes del vector $\mathbf{R}_2$, la ecuación anterior se descompone en un sistema de 3 ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned}
\dot{X}_2 &= \omega Z_2 \operatorname{sen}(\epsilon) + \omega Y_2 \cos(\epsilon), \\
\dot{Y}_2 &= -\omega X_2 \cos(\epsilon), \\
\dot{Z}_2 &= -\omega X_2 \operatorname{sen}(\epsilon);
\end{aligned}$$

resolviendo para la variable X_2 se tiene

$$\ddot{X}_2 + \omega^2 X_2 = 0,$$

cuya solución es de la forma

$$X_2 = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha);$$

para las otras componentes se obtiene

$$Y_2 = B + A\cos(\omega t + \alpha)\cos(\epsilon)$$

y

$$Z_2 = C + A\cos(\omega t + \alpha)\,\mathrm{sen}(\epsilon),$$

con A, B, C y α constantes por determinar.

Escogiendo nuestro origen del tiempo en marzo de 1969, se tiene

$$X_2(t = 0) = 0,$$
$$Y_2(t = 0) = -\,\mathrm{sen}(\epsilon + \gamma)$$

y

$$Z_2(t = 0) = \cos(\epsilon + \gamma),$$

donde $\gamma = 5.15°$ es el ángulo entre la normal a la eclíptica y la normal a la órbita de la Luna.

Las condiciones anteriores nos permiten escribir las componentes del vector $\mathbf{R}_2$ como

$$X_2(t) = -\,\mathrm{sen}(\gamma)\,\mathrm{sen}(\omega t),$$
$$Y_2(t) = -\,\mathrm{sen}(\epsilon)\cos(\gamma) - \mathrm{sen}(\gamma)\cos(\epsilon)\cos(\omega t)$$

y

$$Z_2(t) = \cos(\epsilon)\cos(\gamma) - \mathrm{sen}(\gamma)\,\mathrm{sen}(\epsilon)\cos(\omega t).$$

Si suponemos una órbita ecuatorial ($\mathbf{R} = \mathbf{R}_0$) se tienen las siguientes expresiones para las componentes de $\mathbf{Q}$ (después de sustituir los valores de $\mathbf{R}_0$, $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$, e ignorando términos de orden $\mathrm{sen}^2(\gamma)$):

$$Q_x = -\tfrac{1}{2}\omega_2\,\mathrm{sen}(2\gamma)\cos(\epsilon)\,\mathrm{sen}(\omega t),$$
$$Q_y = -\tfrac{1}{2}\omega_1\,\mathrm{sen}(2\epsilon) - \tfrac{1}{2}\omega_2\,\mathrm{sen}(2\epsilon)\cos^2(\gamma) - \tfrac{1}{2}\omega_2\,\mathrm{sen}(2\gamma)\cos(2\epsilon)\cos(\omega t)$$

y

$$Q_z = \omega_0 + \omega_1 \cos^2(\epsilon) + \omega_2 \cos^2(\epsilon)\cos^2(\gamma) - \tfrac{1}{2}\omega_2 \,\mathrm{sen}(2\epsilon)\,\mathrm{sen}(2\gamma)\cos(\omega t),$$

en las que al sustituir los valores adecuados se tiene:

$$Q_x = -0.132\,\mathrm{sen}(\omega t)^\circ/\text{año},$$
$$Q_y = -0.852 - 0.098\cos(\omega t)^\circ/\text{año}$$

y

$$Q_z = 6.86 - 0.105\cos(\omega t)^\circ/\text{año}.$$

Luego, la ecuación de movimiento de la normal a la órbita viene dada por:

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_0 \times \mathbf{Q} = -Q_y\hat{\mathbf{i}} + Q_x\hat{\mathbf{j}}$$
$$\dot{R}_x = -Q_y, \qquad \dot{R}_y = Q_x.$$

3. Resultados y conclusiones

La evolución de una órbita circular ha sido analizada y se obtuvo que el achatamiento de la Tierra hace que la normal a la órbita tenga un movimiento de precesión alrededor del eje polar de la Tierra. El Sol afecta de la misma manera pero la precesión es alrededor de la normal a la eclíptica y la Luna induce la precesión alrededor de la normal a su órbita.

Puesto que para el control de un satélite geoestacionario es usual referirse al vector $\mathbf{i}$ definido en la parte final de la introducción de este trabajo, relacionaremos el vector normal a la órbita con él. Este vector ($\mathbf{i}$) se encuentra sobre el plano del ecuador y su dirección es del origen al nodo ascendente de la órbita del satélite, por lo que estará 90° adelantado con respecto a la proyección sobre el plano ecuatorial del vector $\mathbf{R}$; de la definición del vector $\mathbf{i}$ se concluye que su magnitud i es la inclinación de la órbita respecto al plano ecuatorial.

Ahora bien, como $\mathbf{R}$ es un vector unitario

$$\cos i = R_z.$$

Luego, $R_x^2 + R_y^2 = 1 - R_z^2 = 1 - \cos^2 i = \operatorname{sen}^2 i \simeq i^2$ para valores de $i \ll 1$. Luego, las relaciones buscadas son:

$$R_x = H_2 \qquad \text{y} \qquad R_y = -K_2.$$

Por lo tanto, la evolución del vector de inclinación está dada por:

$$\dot{H}_2 = -Q_y = (0.852) + (0.098)\cos(\omega t)^\circ/\text{año},$$
$$\dot{K}_2 = -Q_x = (0.132)\operatorname{sen}(\omega t)^\circ/\text{año},$$

o

$$K_2 = -\frac{0.132}{\omega}\cos(\omega t) + K_0^\circ/\text{año},$$
$$H_2 = (0.852)t + \frac{0.098}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t) + H_0^\circ/\text{año},$$

con K_0 y H_0 constantes de integración.

Así, mediante la selección adecuada del valor de la inclinación de la órbita y del nodo ascendente de ella, es posible alcanzar una inclinación objetivo al cabo de cierto tiempo T, por la pura evolución del vector $\mathbf{i}$. Esto fue aprovechado en la puesta en órbita del segundo satélite del sistema Morelos al colocársele en una órbita de 3° de inclinación y con su nodo ascendente en 270° para que después de 3 años la inclinación de su órbita sea casi cero. Al hacer esto se evitará corregir durante estos 3 años los efectos aquí considerados.

Referencias

1. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2a. edición, Addison-Wesley (1980) p. 479.
2. R.E. Balsam and B.M. Anzel, *Journal of Spacecraft and Rockets* **6** (1969) 805.
3. A.E. Roy, *Orbital Motion*, 2a. edición, Adam Hilger Ltd, Bristol (1982) 159.
4. W.M. Kaula, *Theory of Satellite Geodesy*, Blaisdell Publishing Company, (1966) 8–9.
5. Musen, *J. Geophys. Res.* **66** (1961) 2797.
6. Allan and Cook, *Proc. Roy. Soc. Londs. A* **280** (1964) 97.
7. Allan and Ward, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **59** (1963) 669.