

Algunas características topológicas de ecuaciones para modelos de población

M.L. Marquina y A. Calles

*Departamento de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México, Apdo. Postal 70-646,
04510 México, D.F.*

(recibido el 28 de agosto de 1986; aceptado el 18 de mayo de 1987)

Resumen. Se presenta una modificación a la muy conocida ecuación de crecimiento de poblaciones $X_{j+1} = r(1 - X_j)X_j$ que conduce a un comportamiento topológico equivalente a esta ecuación. Este resultado, lejos de ser sorprendente, se debe a la conducta universal que presentan los sistemas no lineales descubierta por Feigenbaum. En este sentido, el presente trabajo es un ejemplo sencillo, y creemos didáctico, de esta conducta universal que puede ayudar a principiantes en el estudio del fascinante mundo de los sistemas no lineales.

Abstract. The well known non-linear equation $X_{j+1} = r(1 - X_j)X_j$ is modified so that the new equation is topologically equivalent. The equivalence has to be a consequence of the universal behaviour in non-linear systems that was discovered by Feigenbaum. This work is a simple didactic example of this universality we believe can help to study the interesting world of non-linear systems.

PACS: 02.90.+p; 01.55.+b

1. Introducción

Dado que este artículo pretende ser de enseñanza hemos creído conveniente comentar brevemente primero cómo, sin ser especialistas en sistemas dinámicos no lineales, llegamos a descubrir características interesantes de estos sistemas. Esta descripción la hacemos en la siguiente sección. En la sección 3 damos los resultados con la ecuación

de población modificada y los comparamos con la ecuación usual de crecimiento de poblaciones. Dejamos para la sección 4 la parte más técnica y la justificación teórica de los resultados. Finalmente concluimos en la sección 5.

2. Descripción del problema

Los autores de este trabajo asistimos a la Tercera Escuela Mexicana de Física Estadística que se realizó en Oaxtepec, Mor., en 1985. Uno de los cursos estuvo a cargo del Profesor Leo Kadanoff de la Universidad de Chicago. En el curso que impartió sobre turbulencia relacionó este complicado fenómeno físico, que aparece en la dinámica de fluidos, con el comportamiento del crecimiento de poblaciones en función de un parámetro de crecimiento. El sencillo modelo matemático de poblaciones que presentaba, como función del parámetro de crecimiento, mostraba características de estabilidad, decaimiento y a veces hasta una conducta caótica.

La ecuación de crecimiento de poblaciones a la que nos referimos es al tiempo $j + 1$ proporcional a la población inmediatamente anterior y debe de haber un término negativo que equilibre la población cuando se exceda, el cual lo podemos suponer como proporcional al cuadrado de la población, de tal forma que la ecuación de crecimiento se escribe como

$$X_{j+1} = \alpha X_j - \beta X_j^2. \quad (1)$$

Sin perder generalidad podemos hacer un reescalamiento para escribir la ecuación como

$$X_{j+1} = r X_j (1 - X_j), \quad (2)$$

donde r es el parámetro de crecimiento de la población. Las características del resultado del proceso iterativo son fuertemente dependientes del valor del parámetro r . \square

Las características de los resultados, se nos dijo en el curso [2], son típicas de ecuaciones no lineales y simulan también el comportamiento de la dinámica en función de la velocidad para los distintos regímenes que aparecen en el fenómeno de turbulencia.

Después de tan estimulante curso los autores se preguntaron si una ecuación del estilo presentado por Leo Kadanoff pudiera modificarse tal que con el mismo parámetro a variar se pudiera llegar a situaciones más generales. Para esto modificamos el término cuadrático y en su lugar propusimos una dependencia del tipo $X_j^{\alpha+1}$, donde ahora el exponente lo variaríamos en lugar del factor r . La ecuación modificada queda como

$$X_{j+1} = rX_j(1 - X_j^\alpha). \quad (3)$$

3. Ecuaciones de población y resultados

Como es conocido, la Ec. (2) conduce a distintas situaciones dependiendo del valor del parámetro r [2]. En la Fig. 1 mostramos alguna de estas situaciones. Para $0 < r < 1$ en la Fig. 1, se observa que la especie en cuestión decae a cero. Con $1 < r < 3$ la especie se estabiliza en un valor definido, como se puede ver en la Fig. (1b). Con $3 < r < 1 + \sqrt{6}$ la población oscila entre dos valores definidos como si la recta en (1b) se hubiera desdoblado (Fig. (1c)). Para $3.45 < r < 3.54$, de la Fig. (1d) ahora parece que las dos rectas anteriores se hubieran desdoblado cada una. Este desdoblamiento de cada recta ocurre hasta valores de $r < 4$. Para $r = 4$ llegamos al régimen de caos como se ve en la Fig. (1e).

Si en cambio ahora mantenemos r fijo en la Ec. (3) (digamos $r = 4$) y variamos el parámetro α en el intervalo $[0, 1]$ obtendremos los resultados mostrados en las gráficas de la Fig. 2 [3]. Observamos que para distintos valores del parámetro α tenemos, al igual que antes, decaimiento, estabilidad, doble estabilidad y finalmente caos.

Por otro lado, nos gustaría mencionar que hay que tener precaución con las Ecs. (2) y (3) en virtud de que no tienen una derivada de Schwarz con signo no bien definido. Para más detalles se puede consultar la Ref. 4.

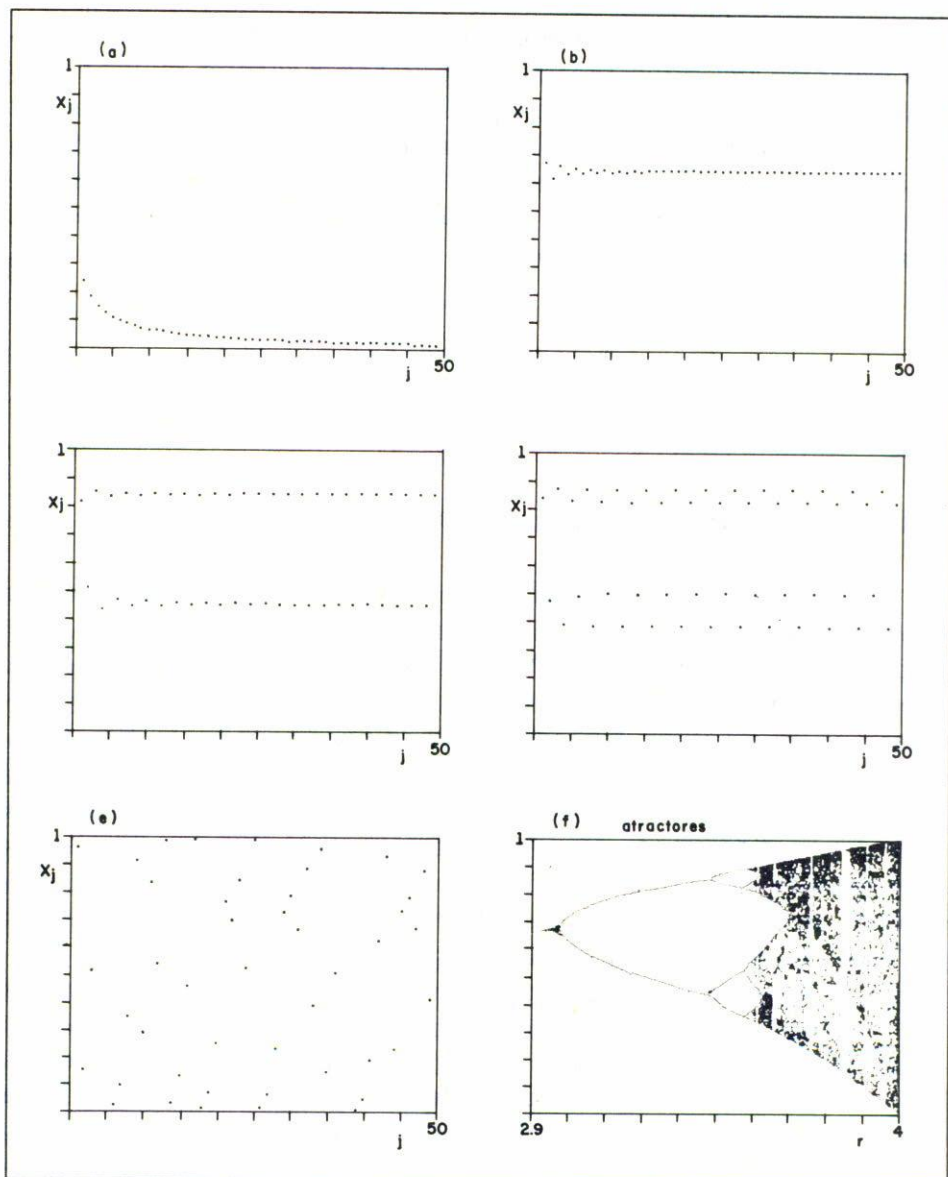


FIGURA 1. Se grafica la Ec. (2) para diferentes valores del parámetro r . En (a) $r = 1$, (b) $r = 1.5$, (c) $r = 3.3$, (d) $r = 3.5$ y en (e) $r = 4$; (f) atractores como función de r .

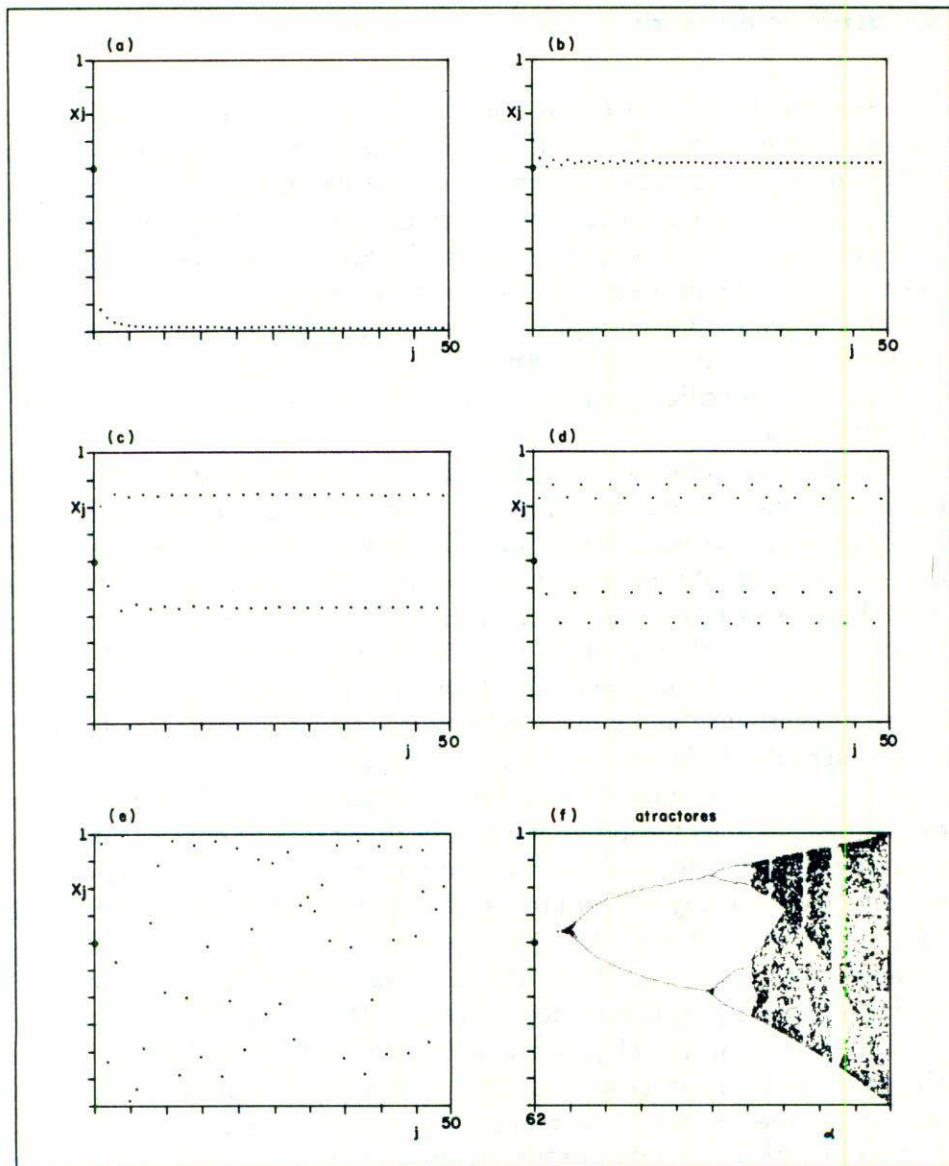


FIGURA 2. Se grafica la Ec. (3) para diferentes valores del parámetro α y $r = 4$. En (a) $\alpha = 0.1$, (b) $\alpha = 0.2$, (c) $\alpha = 0.8$, (d) $\alpha = 0.83$ y en (e) $\alpha = 0.999$; (f) atractores como función de α .

4. Justificación teórica

La explicación teórica de por qué la Ec. (3), teniendo el mismo comportamiento que la Ec. (2), tiene una respuesta general es que dentro de la teoría del comportamiento de sistemas no lineales [4], se sabe que cualquier ecuación que tenga un máximo, tal y como sucede con nuestras ecuaciones, presenta el fenómeno del desdoblamiento del período. El cual describimos a continuación.

Grafiquemos por ejemplo la ecuación cuadrática $f(x) = rx(1 - x)$ para $r = 2$ en función de x . En la Fig. 3 se muestra la recta $y = x$ que nos va a auxiliar para seguir el proceso iterativo en la solución del problema.

El proceso iterativo de la Ec. (2) está representado por la línea quebrada que se mueve vertical y horizontalmente en la Fig. 3. Comenzamos con un valor arbitrario para x , digamos x_0 , y el valor de la función la obtenemos de la intersección vertical con la función $f(x)$, luego nos movemos horizontalmente hasta la recta $y = x$, esto equivale a hacer el valor de la función el nuevo punto a substituir, y otra vez nos movemos vertical y horizontalmente hasta encontrar el punto convergente que nos da la solución del problema. Desde luego la intersección de la curva $f(x)$ con la recta $y = x$ nos da la solución para el punto en el cual se estabiliza la iteración de la Ec. (2). Se dice que el resultado es periódico y este punto estable se conoce como un atractor de período 1. Cuando r toma un valor algo superior a 3 aparece que no hay un punto estable como describimos, sino que aparecen dos puntos en los que el proceso iterativo oscila. Esto lo podemos ver en la Fig. 4 en donde se ha graficado la función $f(x)$ en (a) y $f^2(x)$ (f aplicada dos veces) en (b) y otra vez $y = x$ para cuando $r = 3.14$. En el proceso iterativo de la Fig. (4a) se puede observar cómo el proceso oscila entre dos valores para x alrededor del punto que interseca la recta $y = x$ con $f(x)$. Esto debe ser así, puesto que al haber dos puntos estables éstos tienen que serlo de la función f aplicada dos veces para que los puntos se vayan alternando en el proceso iterativo. Entonces en la curva de la Fig. (4b) las intersecciones $y = x$ deben de ser ahora los puntos estables que

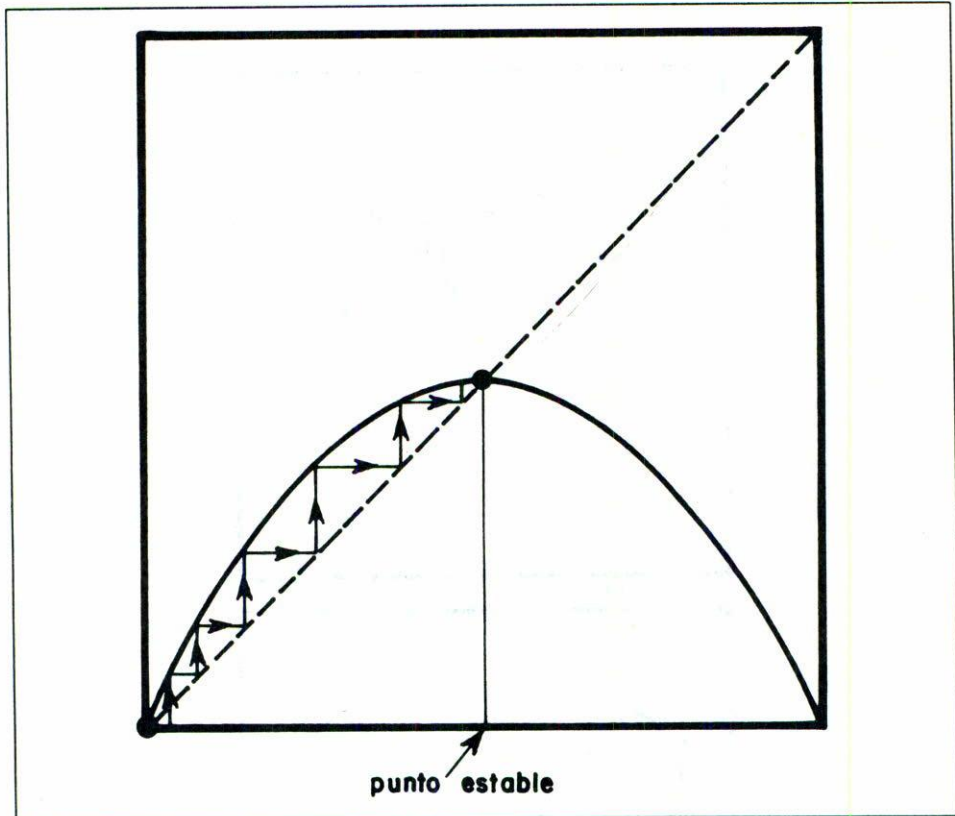


FIGURA 3. Se muestra $f(x) = rx(1-x)$ y $y = x$ para seguir el proceso iterativo cuando $r = 2$.

aparecen en la Fig. (4a). Similarmente el máximo de la función

$$f(x) = rx(1 - x^\alpha) \quad (4)$$

la obtenemos de igualar a cero su primera derivada:

$$f'(x) = r[1 - (1 + \alpha)x^\alpha].$$

$$f'(x_m) = 0$$

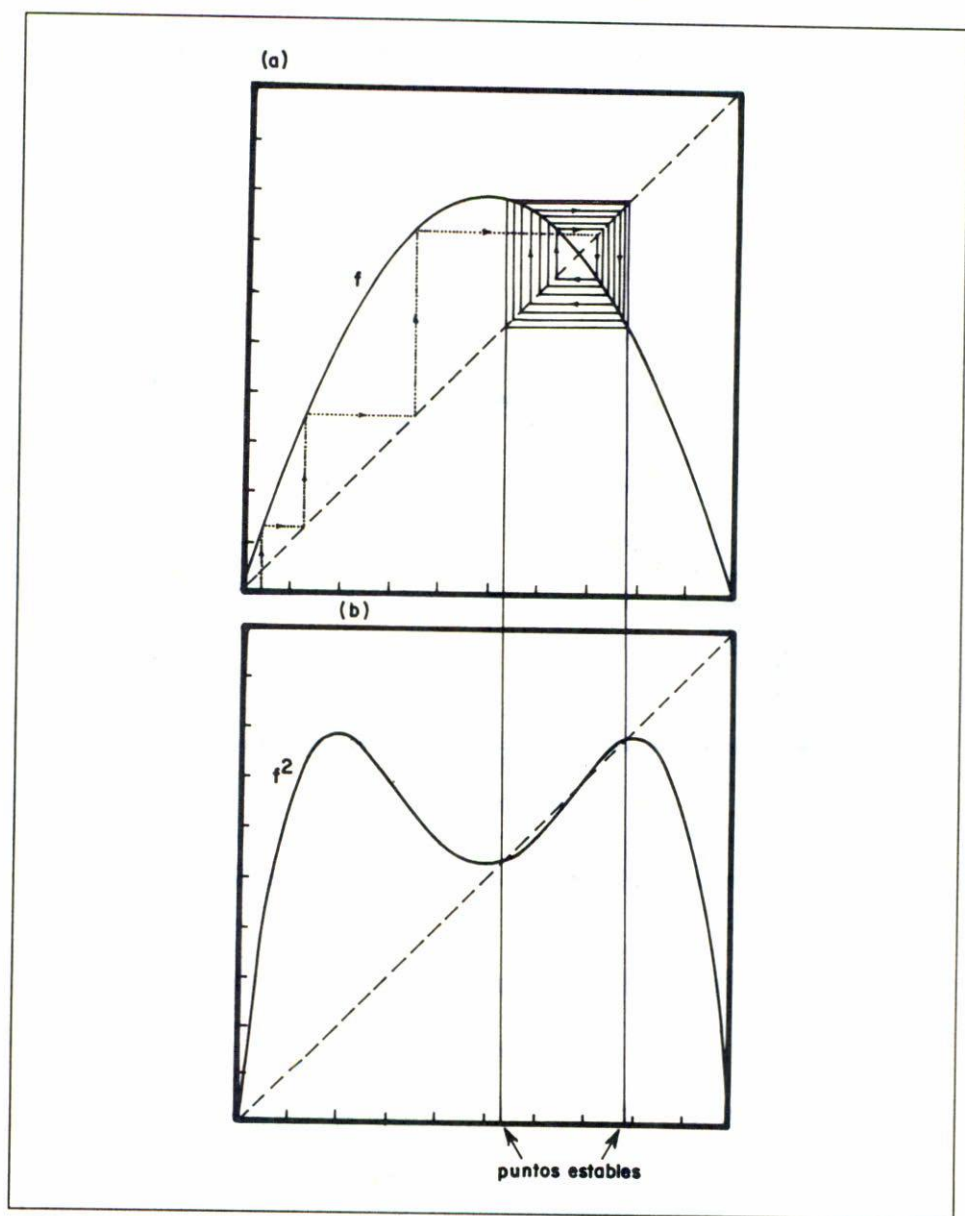


FIGURA 4. Se grafica en (a) $f(x) = rx(1 - x)$ y $y = x$ y en (b) $f^2(x)$ y $y = x$ con $r = 3.14$ para encontrar el atractor de período 2.

se cumple cuando $x_m = 1/\alpha(1 + \alpha)$, y el desarrollo alrededor del máximo es

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{r\alpha}{(1 + \alpha)^{1+1/\alpha}} - \frac{1}{2}(1 + \alpha)^{1/\alpha} \alpha r (x - x_m)^2 + \dots \\ &= r\alpha \left[\frac{1 - \alpha}{2(1 + \alpha)^{1+1/\alpha}} + x - \frac{1}{2}(1 + \alpha)^{1/\alpha} x^2 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Aquí podemos decir que para r fijo la relación $(\alpha/2)(1 + \alpha)^{1/\alpha}$ es equivalente al papel de r en la ecuación cuadrática original. Haciendo el desarrollo

$$(1 + \alpha)^{1/\alpha} = \frac{5}{2} - \frac{\alpha}{2} + \dots, \quad (7)$$

la ecuación queda

$$f(x) = r\alpha \left[\frac{1 - \alpha}{2(1 + \alpha)^{1+1/\alpha}} + x - \frac{1}{4}(5 - \alpha + \dots)x^2 + \dots \right], \quad (8)$$

y para $\alpha \rightarrow 0$ (pero distinta de cero)

$$f(x) = r\alpha \left(\frac{1}{2} + x - \frac{5}{4}x^2 + \dots \right) \quad (10)$$

vemos que r y α son equivalentes directamente. Con esto hemos justificado plenamente el por qué de la equivalencia de las Figs. 1 y 2 y, por lo tanto, hemos entendido la equivalencia topológica de las Ecs. (2) y (3) en función de los parámetros r y α respectivamente.

En el caso de que hiciéramos la iteración con la Ec. (10), los términos superiores al cuadrático tienden más rápidamente a cero pues hay que recordar que tenemos $r < 1$, de tal forma que esperamos dominen los términos escritos explícitamente, lo que nos permite hacer la comparación directa con el equivalente de la Ec. (2).

5. Conclusiones

En la búsqueda de ecuaciones de crecimiento de poblaciones más generales, se encontraron propiedades topológicas interesantes,

dentro de la conducta universal de sistemas dinámicos no lineales. Dichas propiedades no son obvias "a primera vista" y resultan motivantes para entender y estudiar algunas de las características de sistemas no lineales.

En particular se mostró y entendió la equivalencia que a veces presentan parámetros aparentemente tan disímiles como son factores y exponentes.

Agradecimientos

Los autores desean dar las gracias a R. Soto por su contribución para el entendimiento teórico de este problema. De igual forma dan las gracias a G. Martínez y R. Pérez por sus comentarios respecto a este trabajo cuando se presentó en el Congreso Nacional de Enseñanza de la Física organizado por la SMF en Hermosillo, Sonora.

Referencias

1. R. May, *Nature* **261** (1976) 459; M.J. Feigenbaum, *Los Alamos Science*, Summer (1980) 4; D.R. Hofstadter, *Scientific American*, November (1981) 22; Antonio F. Rañada, *Investigación y Ciencia* **114** (1986) 12.
2. Leo P. Kadanoff, *Phys. Today*, Dec 1983; Lourdes Esteve P. *Revista Ciencias* **8**, nov. 1985.
3. M.J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* **19**, 1 (1978) 25; M.J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* **21**, 6 (1979) 669.
4. P. Collet and J.P. Eckman, "Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems", Birkhauser, Basel, 1980.