Congreso
Investigación

Revista Mexicana de Física **33** *No. 3(1987) 389–411*

El vacío en sistemas no inerciales

F. Soto, G. Cocho, C. Villarreal

Instituto de Física. Universidad Nacional Autónoma de México,
Apdo. postal 20-364, México, D.F.

S. Hacyan, A. Sarmiento

Instituto de Astronomía, Universidad Nacional Autónoma de México,
Apdo. postal 70-264, México, D.F.

(recibido el 30 de abril de 1987; aceptado el 30 de abril de 1987)

Resumen. El presente artículo tiene como objetivo hacer una revisión somera de los intentos realizados por nuestro grupo para entender *físicamente* los efectos térmicos que aparecen en la teoría cuántica de campos en sistemas no-inerciales o en espacio-tiempo curvo. Se explora y desarrolla la idea de que el campo de vacío es el responsable directo de los efectos *térmicos* en los sistemas no inerciales: las distribuciones *térmicas* que se observan desde un sistema no inercial son el resultado de la distorsión Doppler que sufre el campo de vacío. Para hacer plausible esta idea utilizamos los resultados encontrados por T.H. Boyer [4] en la teoría estocástica de campos y posteriormente desarrollamos un formalismo que nos lleva a resultados consistentes. Mostramos también que el carácter térmico de los denominadores de la distribuciones que aparecen en la teoría de campos en sistemas no inerciales esta directamente ligado a la discretización originada por la acotación del espacio en el cual se está cuantizando el campo; esta misma limitación obliga a la desaparición de algunos de los modos de onda larga, lo cual a su vez implica la modificación de la densidad de estados en el espacio de las fases.

Abstract. The purpose of this paper is a brief presentation of the attemps made by our group on understanding the physics of the thermal effects appearing in quantum field theory in non-inertial frames or in curved spacetime. The idea of the vacuum field being directly responsible for the thermal effects in non-inertial frames is introduced and explored: The thermal distributions observed from a non-inertial frame are due to the Doppler distortion undergone by the vacuum field. To support this idea we use the results obtained by T.H. Boyer [4] in stochastic field theory, and further on we develop a formalism which leads to consistent results. We also show that the thermal character of the denominators in the distributions, appearing in quantum field theory in non-inertial frames, is directly linked to the discreteness originated by confining the space where the field is being quantized. This confinement implies the absence of some long wave modes, which in turn implies a modification of the states density in phase space.

PACS: 03.65.-w; 04.80.+x

1. Introducción

En 1974, S. Hawking demostró [16] que si se toman en cuenta algunos efectos cuánticos en el estudio de un hoyo negro de Schwarzschild, se llega a la conclusión de que éste radía como un cuerpo negro con una temperatura equivalente dada por $T = \kappa/2\pi k_B$, donde κ es la gravedad superficial del hoyo negro, k_B es la constante de Boltzmann y el sistema de unidades es tal que $\hbar = c = 1$ (este sistema de unidades se usa a lo largo de todo el artículo). Poco tiempo después, W.G. Unruh [27] y P.C.W. Davies [12] dedujeron independientemente un resultado similar para un espejo uniformemente acelerado en un campo escalar; en ese caso, la distribución espectral de la radiación es también una planckiana con una temperatura equivalente dada por $T = a/2\pi k_B$, donde a es la magnitud de la aceleración. Desde entonces se han realizado una gran cantidad de investigaciones sobre los fenómenos que resultan cuando una teoría de campo se cuantiza en un espacio-tiempo curvo o en un sistema acelerado.

En particular, se ha demostrado que el tensor de energía-momento de un campo libre sin masa y de espín s en presencia de un espejo uniformemente acelerado se puede escribir como [9, 3, 10, 5]

$$\langle T_\mu^\nu \rangle = -\frac{h(s)}{32\pi^6}\int_0^\infty \frac{\omega(\omega^2 + 4\pi^2 s^2 a^2)}{e^{\omega/a} + (-1)^{1+2S}}\, \mathrm{diag}\left[-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] d\omega, \quad (1.1)$$

donde a es la aceleración local del espejo y $h(s)$ denota el número de estados de helicidad independientes $h(s) = 1$ para $s = 0$, y $h(s) = 2$ para $s \neq 0$.

Fórmulas similares han sido encontradas para el tensor de energía-momento de un campo libre sin masa y de espín s en un universo de Einstein de radio R [14, 5]

$$\langle T_\mu^\nu \rangle = \frac{h(s)}{32\pi^6} \int_0^\infty \frac{\omega(\omega^2 + 4\pi^2 s^2/R^2)}{e^{\omega R} + (-1)^{1+2s}} \operatorname{diag}\left[-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] d\omega, \quad (1.2)$$

y en la cercanía de un hoyo negro de Schwarzschild de masa M ($\kappa = (4GM)^{-1}$)

$$\langle T_\mu^\nu \rangle = \frac{h(s)}{32\pi^6} \int_0^\infty \frac{\omega(\omega^2 + 4\pi^2 s^2 \kappa^2)}{e^{\omega/\kappa} + (-1)^{1+2s}} \operatorname{diag}\left[-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] d\omega, \quad (1.3)$$

donde $h(s)$ tiene exactamente el mismo significado que en (1.1). Las fórmulas (1.1), (1.2) y (1.3) han sido derivadas para los espines 0, 1/2 y 1.

Todos estos fenómenos comparten dos características importantes:

a) El denominador "térmico" donde la temperatura está relacionada con los parámetros característicos del sistema ($T = a/2\pi k_B$ para los sistemas uniformemente acelerados, $T = 1/2\pi k_B R$ para el universo de Einstein y $T = \kappa/2\pi k_B$ para el hoyo negro).
b) Una densidad de estados "modificada" en el espacio de fases con un término adicional proporcional a s^2 (el numerador de (1.1) a (1.3)).

Cabe hacer notar que todos estos estudios tienen un carácter semiclásico, ya que el campo gravitacional de fondo no se cuantiza. Una excelente revisión del tema puede hallarse en el libro de Birrel y Davies [5].

Todos los nuevos y extraños efectos que se han encontrado en esta teoría cuántica de campos en espacio-tiempo curvo están relacionados de alguna manera con el concepto de vacío cuántico. En la teoría cuántica de campos, el vacío consiste de cuantos virtuales y su energía total es infinita; sin embargo se supone que no tiene realidad física. Para obtener información físicamente relevante de estas cantidades infinitas, se han desarrollado un sin número de técnicas complicadas y poco rigurosas que, en términos generales, han oscurecido la comprensión física profunda de los efectos involucrados.

La electrodinámica estocástica se ha desarrollado en las dos últimas décadas como una alternativa a la electrodinámica cuántica no relativista [13]. De acuerdo con esta teoría, el vacío consiste de un campo aleatorio que persiste aún a temperatura cero y por ello se le conoce como campo de punto cero. A diferencia del campo de vacío cuántico, al vacío de la electrodinámica estocástica se le atribuye una existencia física real.

Boyer [4] ha demostrado que los efectos térmicos producidos por la aceleración pueden explicarse completamente en términos de la teoría estocástica de campos (generalización de la electrodinámica estocástica). La idea central es que el espectro de energía observado en un marco de referencia en movimiento aparece distorsionado por el efecto Doppler. El espectro de energía del vacío estocástico debe ser invariante de Lorentz [2]; sin embargo no tiene porque ser invariante bajo transformaciones a sistemas no inerciales. La función de correlación que se obtiene en un sistema de referencia uniformemente acelerado es exactamente la misma que se encontraría para un sistema inercial en un baño térmico. Por tanto, el espectro planckiano observado por un detector puntual uniformemente acelerado es una distorsión Doppler del campo de punto cero y no tiene nada que ver con la radiación de partículas [18, 19].

Argumentos similares han sido esgrimidos por Sciama, Candelas y Deutsch [25], quienes señalan que los efectos térmicos generados por la aceleración se originan en las fluctuaciones del vacío cuántico, y que esto no implica la creación de partículas.

Debido a que los campos gravitacionales también producen un corrimiento en la energía, es de esperarse que el campo de punto cero sea también distorsionado por la gravitación y que efectos similares a los de la aceleración aparezcan; en efecto, éste es el caso como ha sido mostrado por Hacyan *et al.* [18, 19, 20, 21].

Con los trabajos arriba mencionados ha quedado esclarecido que los efectos térmicos de la aceleración y de la gravitación están directamente relacionados con la existencia del campo de vacío; sin embargo, queda aún por aclarar por qué los efectos generados son de carácter "térmico". Todos estos fenómenos se presentan en espacios acotados: ya sea que exista un horizonte (como en el caso de un hoyo negro o de un sistema uniformemente acelerado) o que el espacio en sí mismo sea acotado (como el campo en una caja o el universo de Einstein). Este acotamiento tiene como consecuencia que el sistema se encuentre en un estado de equilibrio y que por lo tanto tenga propiedades "térmicas"; matemáticamente esto se manifiesta en que la energía se escribe como una suma infinita numerable (sobre los números enteros o semi-enteros) de cantidades discretas que se puede, en la mayoría de los casos, representar "térmicamente".

El presente artículo tiene como objetivo hacer una revisión somera de los intentos realizados por nuestro grupo para entender físicamente los efectos térmicos que aparecen en la teoría de campos en espacios curvos. Para ello, hacemos en la sección 2 una revisión de una parte del trabajo desarrollado por T.H. Boyer en 1980 [4] y señalamos algunas posibles soluciones y algunos problemas directamente relacionados con la teoría estocástica de campos. En la sección 3 resumimos la formalización cuántica de la idea de que el campo de vacío es el ingrediente importante en la explicación de los efectos térmicos que aparecen cuando se tiene una curvatura de fondo [18]. En la sección 4 hacemos ver que el acotamiento del espacio donde se encuentra el campo obliga a que la energía se represente como una suma infinita numerable (sobre los enteros si la condiciones de frontera no están torcidas y sobre los semi-enteros si lo están), y que esa suma en general se puede escribir como una integral con un denominador "térmico" (planckiano en el caso en que la suma sea sobre los enteros y de Fermi-Dirac en el caso en que la suma sea sobre los semi-enteros) y un numerador "modificado". Por último, dedicamos la sección 5 a comentarios y conclusiones.

Cabe hacer notar que a todo lo largo del artículo nos dedicaremos principalmente al campo escalar, debido a que presenta todas las peculiaridades necesarias, sin las complicaciones de los campos de espín mayor. Para campos de espín distinto de cero remitimos al lector a los artículos de S. Hacyan y A. Sarmiento [19, 20, 21]. También quisiéramos hacer hincapié en que usamos un sistema de unidades con $\hbar = 1$ y $c = 1$.

2. Equivalencia entre las teorías de campo estocásticas y las teorías de campo cuánticas

En esta sección revisaremos los resultados de Boyer [4] para el caso del campo escalar. Como ya lo mencionamos en la introducción, la idea central es que el corrimiento en frecuencia, debido a aceleraciones (efecto Doppler) o a campos gravitacionales, distorsiona la distribución espectral del campo de punto cero.

Consideremos el siguiente campo escalar estocástico

$$\phi(x) = \int d^3k \, \frac{f(\omega)}{2}[a(\mathbf{k})e^{-iK\cdot x} + a^*(\mathbf{k})e^{-iK\cdot x}], \tag{2.1}$$

donde $K\cdot x = \omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$, y donde $a(\mathbf{k})$ y $a^*(\mathbf{k})$ son variables aleatorias definidas por las relaciones

$$\langle a(\mathbf{k})a(\mathbf{k}')\rangle = \langle a^*(\mathbf{k})a^*(\mathbf{k}')\rangle = 0, \tag{2.2a}$$

$$\langle a(\mathbf{k})a^*(\mathbf{k}')\rangle = \langle a^*(\mathbf{k}')a(\mathbf{k})\rangle = \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}'). \tag{2.2b}$$

La densidad espectral $f(\omega)$ del campo está dada como

$$f(\omega) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\omega/k_BT}-1}\right)\right]^{1/2}, \tag{2.3}$$

donde T es la temperatura a la que se encuentra el campo y k_B es la constante de Boltzman. Por lo tanto, la densidad espectral del campo estocástico de vacío ($T=0$) está dada como

$$f_0(\omega) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2\omega}\right)^{1/2}, \tag{2.4}$$

Boyer [4] ha mostrado que (2.4) es la única densidad espectral invariante de Lorentz.

Pensemos ahora que este campo escalar estocástico se encuentra a temperatura cero ($T = 0$) y que en él aceleramos uniformemente un detector puntual. La función de correlación r_0 "medida" por el detector ha sido calculada por Boyer [4] y resulta ser

$$r_0(\tau) = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{a}{2}\right)\operatorname{csch}^2\left(\frac{a\tau}{2}\right), \tag{2.5}$$

donde τ es el tiempo propio del detector puntual.

Tomemos ahora el caso en que el campo escalar estocástico se encuentra a una temperatura $T > 0$ y coloquemos nuevamente un detector puntual en este campo, pero ahora en reposo. La función de correlación r_T resulta ser en este caso [4]

$$r_T(t) = -\frac{1}{\pi}(\pi k_B T)^2 \operatorname{csch}^2(\pi k_B T t). \tag{2.6}$$

Es evidente que si

$$T = \frac{a}{2\pi k_B}, \tag{2.7}$$

las correlaciones (2.5) y (2.6) coinciden. Es decir, que un detector uniformemente acelerado en un campo escalar estocástico a temperatura $T = 0$ se comporta exactamente igual que si se encontrara en reposo, pero con el campo a una temperatura T dada por (2.7). Esta conclusión coincide con la obtenida utilizando la teoría cuántica de campos; tanto la teoría cuántica como la teoría estocástica predicen que un detector puntual uniformemente acelerado en el campo escalar de vacío ve al campo caliente. Esta coincidencia no se reduce al caso del campo escalar: Boyer [6] ha mostrado que se cumple también en el caso del campo electromagnético; Schomburg y Thielheim [26] lo hicieron para un espejo que se mueve en el campo electromagnético.

En general, las teorías estocásticas y cuánticas van a coincidir siempre que el cálculo cuántico involucre operadores completamente simétricos, ya que en este caso los valores esperados cuánticos son siempre iguales a los valores medios estocásticos [2, 13].

3. El campo de vacío en espacios curvos

En esta sección se resume la formalización cuántica de la idea de que la radiación producida por un hoyo negro o detectada en un sistema acelerado es exactamente de la misma naturaleza que el campo de punto cero (para más detalles, remitimos al lector al artículo de Hacyan *et al.* [18]). Empezando con la lagrangiana de un campo escalar obtenemos directamente, a partir del teorema de Noether y de la existencia de un vector de Killing temporal, un cuadrivector conservado de energía-momento. Este cuadrivector lleva de manera natural a una expresión para la densidad de energía, en términos de los valores esperados del vacío de productos simetrizados de los operadores del campo.

Consideremos un campo $\phi(x)$ en un espacio-tiempo arbitrario con métrica $g_{\alpha\beta}$. La densidad lagrangiana $\mathcal{L}(x)$ depende del campo $\phi(x)$ y de sus primeras y segundas derivadas respecto a x. Si la métrica del espacio-tiempo de fondo se deja fija, la variación de $\mathcal{L}$ con ϕ está dada por

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} = &\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}} + \partial_\mu\partial_\nu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu,\nu}}\right]\delta\phi \\ &+ \partial_\mu\left\{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu,\nu}}\overleftrightarrow{\partial}_\nu\right]\delta\phi\right\},\end{aligned} \tag{3.1}$$

donde la doble flecha indica diferenciación a la derecha menos diferenciación a la izquierda.

Supongamos ahora que la métrica de fondo admite un vector de Killing ξ^α. Es decir, la métrica $g_{\alpha\beta}$ es invariante bajo una transformación infinitesimal

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu \tag{3.2}$$

mientras que ϕ y $\mathcal{L}$ varían de la manera siguiente

$$\delta\phi = \xi^{\mu}\phi_{,\mu}\,, \tag{3.3}$$

$$\delta\mathcal{L} = \xi^{\mu}\mathcal{L}_{,\mu}\,. \tag{3.4}$$

Insertando las ecuaciones (3.3) y (3.4) en (3.1) y usando que $\xi^{\alpha}_{;\alpha} = 0$, se llega a la siguiente ley de conservación para cualquier campo que satisfaga las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes:

$$J^{\mu}_{;\mu} \equiv \frac{1}{(-g)^{1/2}}\partial_{\mu}[(-g)^{1/2}J^{\mu}] = 0, \tag{3.5}$$

donde la corriente conservada es

$$J^{\alpha} = -2(-g)^{1/2}\left[\mathcal{L}\xi^{\alpha} - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\alpha}} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\alpha,\beta}}\overleftrightarrow{\partial}_{\beta}\right)(\xi^{\gamma}\phi_{,\gamma})\right] \tag{3.6}$$

y donde el punto y coma denota la derivada covariante.

Tomemos ahora el caso de un campo escalar de masa m y definamos la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = -2\frac{1}{2}(-g)^{1/2}\phi(\Box + m^2 + \varsigma R)\phi. \tag{3.7}$$

Para este caso la corriente conservada (3.6) es

$$J_{\alpha} = -\phi\overleftrightarrow{\partial}_{\alpha}(\xi^{\beta}\phi_{,\beta}). \tag{3.8}$$

En el espacio-tiempo de Minkowski existen, asociados al grupo de Poincaré, cuatro vectores de Killing constantes y linealmente independientes. Por tanto, se puede definir un tensor de energía-momento $T^{\alpha\beta}$ mediante la siguiente ecuación

$$J^{\alpha} = T^{\alpha\beta}\xi_{\beta}. \tag{3.9}$$

La conservación de la corriente J^{α} y la indepencia lineal de los vectores de Killing implican que $T^{\alpha\beta}_{;\alpha} = 0$.

Para el campo escalar de masa m que estamos tratando, el tensor de energía-momento que resulta de (3.9) y (3.7) es, en coordenadas cartesianas,

$$T_{\alpha\beta} = -\tfrac{1}{2}\phi \overleftrightarrow{\partial}_\alpha \overleftrightarrow{\partial}_\beta \phi. \qquad (3.10)$$

Sin embargo, esta definición no tiene una generalización obvia en espacio curvo. Se puede intentar una generalización ingenua de (3.10) mediante

$$T'_{\alpha\beta} = -\tfrac{1}{2}\phi \overleftrightarrow{\nabla}_\alpha \overleftrightarrow{\nabla}_\beta \phi\,, \qquad (3.11)$$

pero la divergencia de este tensor es

$$T'_{\alpha\beta}{}^{;\beta} = R_\alpha{}^\beta \phi_{;\beta}\,, \qquad (3.12)$$

que en general difiere de cero. Además, la traza de $T'_{\alpha\beta}$ no es cero para una campo sin masa.

Sin embargo, en tanto que un vector de Killing exista, J_α dada por (3.8) proporciona una definición del cuadrivector de energía-momento suficiente para muchos propósitos prácticos. El que J_α tenga una divergencia nula garantiza que la energía total

$$E = \int J_\mu \, d\sigma^\mu \qquad (3.13)$$

es independiente del espacio tridimensional (cuyo vector normal es $d\sigma^\mu$) sobre el cuál se efectúa la integración.

La órbita de un vector de Killing temporal puede ser identificada con la línea de universo $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$ de un observador cuya cuadrivelocidad es

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} = U^\alpha = (\xi^\mu \xi_\mu)^{-1/2} \xi^\alpha\,, \qquad (3.14)$$

donde τ es su tiempo propio. La densidad de energía puede ser definida sin ambigüedades como

$$e = U^\alpha J_\alpha. \qquad (3.15)$$

Usando la ecuación (3.8) se tiene

$$e = (\xi^\mu \xi_\mu)^{1/2} \left[-\phi \frac{d^2\phi}{d\tau^2} + \frac{d\phi}{d\tau}\frac{d\phi}{d\tau} \right] , \tag{3.16}$$

donde $d/d\tau = U^\beta \nabla_\beta$.

Pasamos ahora a cuantizar el campo escalar ϕ. Esto lo hacemos de una manera directa; empezando con la densidad lagrangiana (3.7) e interpretando a ϕ como un operador, llegamos a la definición

$$J_\alpha = -\langle \phi \overleftrightarrow{\partial}_\alpha (\xi^\beta \phi_{,\beta}) \rangle \tag{3.17}$$

para el valor esperado de vacío del cuadrivector de energía-momento, y

$$e = \frac{1}{2} (\xi^\mu \xi_\mu)^{1/2} \langle -\phi \frac{d^2\phi}{d\tau^2} - \frac{d^2\phi}{d^2\tau}\phi + 2 \frac{d\phi}{d\tau}\frac{d\phi}{d\tau} \rangle \tag{3.18}$$

para el valor esperado de vacío de la densidad de energía.

También es posible definir una corriente

$$n_\alpha = -i \langle \phi \overleftrightarrow{\partial}_\alpha \phi \rangle \tag{3.19}$$

con divergencia nula y sin contrapartida en la teoría cuántica. El escalar

$$n \equiv U^\alpha n_\alpha = -i \langle \phi \frac{d\phi}{d\tau} - \frac{d\phi}{d\tau}\phi \rangle \tag{3.20}$$

es, vagamente hablando, la "densidad del número de partículas" del vacío, aunque esta interpretación tiene algunos problemas como veremos más adelante.

Con los elementos que tenemos es posible desarrollar ahora un formalismo que permite evaluar directamente la densidad de energía o la densidad del número de partículas medidas por un detector que se mueve en una órbita de Killing. Los resultados ya han sido derivados [18, 19] y son

$$n = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\omega\, \omega [\tilde{D}^+(\omega, \tau) - \tilde{D}^-(\omega, \tau)] , \tag{3.21}$$

$$e = \frac{1}{\pi} (\xi^\mu \xi_\mu)^{1/2} \int_0^\infty d\omega\, \omega^2 [\tilde{D}^+(\omega, \tau) + \tilde{D}^-(\omega, \tau)] , \tag{3.22}$$

donde

$$\tilde{D}^{\pm}(\omega,\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma\, e^{i\omega\sigma} D^{\pm}(\tau + \tfrac{1}{2}\sigma, \tau - \tfrac{1}{2}\sigma)\,, \tag{3.23}$$

siendo

$$D^{\pm}(\tau + \tfrac{1}{2}\sigma, \tau - \tfrac{1}{2}\sigma) = \langle \phi(\tau \pm \tfrac{1}{2}\sigma)\phi(\tau \mp \tfrac{1}{2}\sigma)\rangle \tag{3.24}$$

las funciones de Wightman.

La frecuencia ω es la medida por el detector con tiempo propio τ y con cuadrivelocidad U^{μ}. Por lo tanto, la densidad de partículas $f(\omega,\tau)$ está dada como

$$f(\omega,\tau) = \frac{1}{4\pi^2\omega}[\tilde{D}^{+}(\omega,\tau) - \tilde{D}^{-}(\omega,\tau)] \tag{3.25}$$

y la densidad de energía por modo es

$$de = (\xi^{\mu}\xi_{\mu})^{1/2}\frac{\omega^2}{\pi}[\tilde{D}^{+}(\omega,\tau) + \tilde{D}^{-}(\omega,\tau)]\, d\omega. \tag{3.26}$$

De tal manera que la densidad de partículas debe evaluarse con el valor esperado del conmutador del campo (*i.e.*, con la función de Pauli-Jordan-Schwinger), mientras que la densidad de energía involucra el anticonmutador (*i.e.*, la función de Hadamard).

Daremos ahora los resultados (para el detalle del cálculo consúltese la referencia 18) que se obtienen para dos ejemplos muy importantes: Un observador uniformemente acelerado y un hoyo negro bidimensional de Schwarzschild.

Observador uniformemente acelerado.

La línea de universo de un observador uniformemente acelerado está dada por

$$t = \frac{\operatorname{senh}(a\tau)}{a}, \tag{3.27a}$$

$$x = \frac{\cosh(a\tau)}{a}, \tag{3.27b}$$

donde τ es su tiempo propio y a es su aceleración. El vector de Killing es, en este caso, la cuadrivelocidad del observador

$$U^a = a(x,t,0,0). \tag{3.28}$$

Se obtiene

$$f(\omega,t) = \frac{1}{(2\pi)^3}, \tag{3.29a}$$

$$de = (\xi^\mu \xi_\mu)^{1/2} \frac{\omega^3}{\pi^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1} \right] d\omega. \tag{3.29b}$$

La primera de estas dos ecuaciones expresa simplemente el hecho de que hay una partícula por cada celda del espacio de fases; esto es una consecuencia de la normalización usada para las funciones de onda y no tiene ningún significado físico. La densidad de energía (3.29b), por el contrario, tiene una contribución planckiana aparte de la contribución de punto cero.

Hoyo negro de Schwarzschild bidimensional.

La métrica es, en este caso

$$ds^2 = \frac{2M}{r} e^{-r/2M}\, du\, dv, \tag{3.30}$$

donde M es la masa del hoyo negro, r es la coordenada radial, y u y v son las coordenadas de Kruskal. La métrica admite un vector de Killing temporal de magnitud $(\xi^\mu \xi_\mu)^{1/2} = (1 - 2M/r)^{1/2}$. Se escoge un detector puntual en reposo en $r = r_0$, cuya línea de universo está dada por las ecuaciones paramétricas

$$u = e^{\alpha\tau}, \tag{3.31a}$$

$$v = -\beta e^{\alpha\tau}, \tag{3.31b}$$

donde τ es el tiempo propio,

$$\alpha = \frac{(1 - 2M/r_0)^{-1/2}}{4M} \tag{3.32a}$$

y

$$\beta = 16M^2 \left(\frac{r_0}{2M} - 1\right) e^{r_0/2M}. \qquad (3.32b)$$

El resultado que se obtiene [18, 19] es

$$n = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega, \qquad (3.33a)$$

$$e = \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)^{1/2} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \omega \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{2\pi\omega/\alpha} - 1}\right] d\omega. \qquad (3.33b)$$

Al igual que en el caso de la aceleración uniforme, encontramos una partícula por celda en el espacio de fases (como consecuencia de la normalización) y para la energía tenemos la contribución del campo de punto cero más una contribución planckiana.

Como se puede ver claramente de los dos ejemplos anteriores, el campo de punto cero se "distorsiona", dando un término adicional planckiano, pero en ninguno de los dos casos se crean partículas.

Quisiéramos terminar esta sección haciendo notar que las expresiones (3.23) y (3.24) difieren de las usadas normalmente (veáse por ejemplo, la sección 3.3 del libro de Birrel y Davies [5]). En efecto, la mayoría de autores utilizan la función de Wightman de frecuencias positivas o la función de Green o de Feynman para el cálculo de la densidad de energía, con la única justificación de que las contribuciones de los términos de frecuencias negativas son eliminadas; sin embargo, nuestros resultados (esta sección y la referencia [18]) muestran que esto es equivalente a cortar arbitrariamente la energía del campo de punto cero.

La generalización de estos resultados para espín distinto de cero ha sido realizada por Hacyan y Sarmiento [19, 20, 21]. También se han estudiado sistemas en rotación [20, 21].

4. La representación térmica en espacios acotados

En las dos secciones anteriores hemos hecho ver que los efectos "térmicos" de la aceleración y de los campos gravitacionales son una manifestación del campo de punto cero; sin embargo, para campos de espín $s > 0$, la distribución que aparece no sólo es de Planck o de Fermi-Dirac (en lo que al denominador respecta), sino que presenta un numerador "modificado"; es decir, la densidad de estados en el espacio de fases cambia (veánse las fórmulas (1.1) a (1.3) en la primera sección). En esta sección hacemos ver que el acotamiento del espacio en el cual se encuentra el campo es fundamental para la aparición de estas dos características.

Sea A una cantidad conservada que puede ser representada como una serie infinita numerable de términos discretos. En particular, supongamos que A puede ser escrita como

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} ng(n^2), \tag{4.1}$$

con $g(0)$ una constante finita.

Ejemplos de esta representación son la energía del punto cero E_0 de un campo escalar sin masa y de espín cero en una caja unidimensional ($E_0 \approx \sum_{n=0}^{\infty} n$) y la energía del punto cero del campo electromagnético libre entre dos placas conductoras paralelas ($E_0 \approx \sum_{n=0}^{\infty} n^3$).

Si desarrollamos $g(n^2)$ como serie de potencias

$$g(n^2) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r n^{2r} \tag{4.2}$$

y la sustituimos en (4.1), obtenemos después de intercambiar la suma sobre n y la suma sobre r

$$A = \sum_{r=0} a_r \sum_{n=0}^{\infty} n^{2r+1} = \frac{1}{2} \sum_{r=0} a_r \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^{2r+1}. \tag{4.3}$$

Usando la fórmula de Poisson [22]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi\, f(\phi) e^{2\pi i k\phi}; \tag{4.4}$$

la suma sobre n en la expresión (4.3) se puede poner como

$$\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n|^{2r+1}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}d\phi\,|\phi|^{2r+1}+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}d\phi\,|\phi|^{2r+1}e^{2\pi ik\phi}. \tag{4.5}$$

Usando la expresión explícita [23] de la transformada de Fourier de la distribución $|\phi|^{2r+1}$ y la definición de la función de Riemann $\varsigma(m)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-m}$, obtenemos

$$\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n|^{2r+1}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}d\phi\,|\phi|^{2r+1}-2(-1)^{r}\frac{\Gamma(2r+2)}{(2\pi)^{2r+2}}\varsigma(2r+2). \tag{4.6}$$

Por otro lado [24]

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\omega^{2r+1}}{e^{2\pi\omega}-1}d\omega=\frac{\Gamma(2r+2)}{(2\pi)^{2r+1}}\varsigma(2r+2), \tag{4.7}$$

así que

$$\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n|^{2r+1}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}d\phi\,|\phi|^{2r+1}-2(-1)^{r}\int_{0}^{\infty}\frac{\omega^{2r+1}}{e^{2\pi\omega}-1}d\omega. \tag{4.8}$$

Insertando (4.2) y (4.8) en (4.1) obtenemos

$$A=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}d\phi\,|\phi|g(\phi^{2})-2\int_{0}^{\infty}\frac{\omega g(-\omega^{2})}{e^{2\pi\omega}-1}d\omega. \tag{4.9}$$

Vemos claramente que el segundo término consiste de una planckiana con una temperatura $T=\hbar/(2\pi k_B)$ y una densidad de estados en el espacio de fases modificada $g(-\omega^2)$.

Si la cantidad conservada A se puede escribir como una suma infinita sobre el conjunto de los semienteros

$$A=\sum_{n=1/2,3/2,\ldots}^{\infty}ng(n^{2}) \tag{4.10}$$

la podemos reescribir como

$$A = \sum_{n=0,1,\ldots}^{\infty} \left[\frac{n}{2} g\left(\frac{n^2}{4}\right) - n g(n^2) \right] \tag{4.11}$$

y, usando (4.2), obtener

$$A = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2} (-1)^r a_r [1 - 2^{-(2r+1)}] \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi \, |\phi|^{2r+1} + 2 \int_0^{\infty} \frac{\omega g(-\omega^2)}{e^{2\pi\omega} + 1} \, d\omega. \tag{4.12}$$

En este caso, el segundo término consiste de un denominador térmico de Fermi-Dirac con una temperatura $T = (\hbar / 2\pi k_B)$ y de un numerador con una densidad en el espacio de fases modificada $g(-\omega^2)$.

Resumiendo: Si las condiciones de frontera de un problema no están torcidas (untwisted), la suma que se obtiene se realiza sobre el conjunto de los enteros y se encuentra un denominador planckiano, mientras que si las condiciones de frontera están torcidas (twisted) la suma se realiza sobre el conjunto de los semi-enteros y el denominador de la distribución es de Fermi-Dirac. El numerador "modificado" se debe a que las condiciones de frontera o de periodicidad cortan los modos de onda larga.

Pasaremos a analizar algunos ejemplos:

i. Campo escalar libre y sin masa ϕ dentro de una caja unidimensional de longitud L.

Imponiendo las condiciones de frontera periódicas

$$\phi(x = L) = \phi(x = 0), \tag{4.13}$$

la energía de punto cero está dada por

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{2} \hbar \frac{2\pi}{L} \sum_{n=0}^{\infty} n = \frac{\pi}{L} \left[\int_0^{\infty} \phi \, d\phi - \frac{2}{(2\pi)^2} \varsigma(2) \right] \\ &= \frac{\pi L}{(2\pi)^2} \left[\int_0^{\infty} k \, dk - 2 \int_0^{\infty} \frac{k \, dk}{e^{kL} - 1} \right], \end{aligned} \tag{4.14}$$

donde $k = 2\pi\omega/L$.

Para la densidad de energía ρ se tiene

$$\rho \equiv \frac{E_0}{L} = \frac{1}{4\pi}\left[\int_0^\infty k\,dk - 2\int_0^\infty \frac{k\,dk}{e^{kL}-1}\right]. \tag{4.15}$$

El segundo término corresponde a la representación térmica de la energía potencial negativa de Casimir.

ii. Campo electromagnético entre dos placas metálicas paralelas separadas una distancia L.

Este problema fué originalmente discutido por Casimir [8]. El campo se anula en la superficie de ambas placas y por lo tanto se tienen condiciones de periodicidad normales [5] y

$$E_0 \sim -\sum_{n=0}^{\infty} n^3 \rightarrow \int_0^\infty k^3\,dk - 2\int_0^\infty \frac{k^3\,dk}{e^{kL}-1}. \tag{4.16}$$

Igual que en el caso unidimensional, el último término es una representación térmica de la energía potencial negativa de Casimir.

iii. Campo electromagnético entre una placa metálica y una placa dieléctrica paralelas y separadas una distancia L.

Este problema ha sido discutido por Boyer [1]. El campo se anula en la placa conductora, pero tiene un valor máximo en la placa dieléctrica. Por lo tanto, se tienen condiciones de periodicidad torcidas (twisted) [5]. La densidad de energía ρ_0 del campo de vacío es en este caso

$$\rho_0 = 2\int_0^\infty \frac{\nu^3\,d\nu}{e^{\nu L}+1} + \text{término divergente}. \tag{4.17}$$

Nótese que el denominador de Fermi-Dirac está relacionado con las condiciones de periodicidad torcidas.

iv. Universos de Einstein.

La densidad de energía ρ_0 del vacío de un campo libre sin masa de espín s en un universo de Einstein de radio R es [14]:

a) $s = 0$

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{R^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{2R} \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\left[\int_0^{\infty} k^3\,dk + \int_0^{\infty}\frac{k^3\,dk}{e^{2\pi kR}-1}\right]. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Nótese que en este caso la energía potencial es positiva.

b) $s = 1/2$

Ford [14] ha obtenido para este problema

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{R^3}(2)\sum_{n=1/2,3/2,\ldots}^{\infty}\frac{1}{2R}n\left(n^2-\frac{1}{4}\right) \\ &= \int_0^{\infty}\frac{k\left(k^2+1/4R^2\right)}{e^{kR}+1}\,dk + \text{términos divergentes.} \end{aligned} \tag{4.19}$$

La densidad de estados del espacio de fases modificada $k^2 + (4R^2)^{-1}$ está relacionada con la ausencia del término $n = 1/2$ en (4.19).

c) $s = 1$

$$\rho_0 = \frac{1}{2\pi^2 R^3}(2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2R}n(n^2-1). \tag{4.20}$$

El factor 2 que precede a la suma en (4.19) y (4.20) se debe a los dos estados de helicidad para el caso en que el espín s es distinto de cero. La degeneración $n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$ muestra la ausencia del término de onda larga debido a las condiciones de periodicidad sobre la esfera tridimensional.

De la ecuación (4.20) podemos escribir

$$\rho_0 = \frac{1}{2\pi^2}\left\{\int_0^\infty k\left[k^2+\frac{1}{R^2}\right]dk + \int_0^\infty \frac{k(k^2+1/R^2)}{e^{kR}-1}\,dk\right\}. \quad (4.21)$$

Nótese que la modificación que sufre la densidad de estados del espacio de fases $k^2 \to k^2 + 1/R^2$ se debe a la degeneración $n^2 - 1$ en (4.20), que a su vez se debe a la falta de la contribución de la onda larga $n = 1$.

Podemos resumir los resultados de la presente sección diciendo que si una variable A se puede escribir como una suma infinita numerable de términos (sobre los números enteros o sobre los semienteros) también se puede representar como una integral "térmica" con un denominador planckiano (enteros) o de Fermi-Dirac (semienteros) y con un numerador que contiene una densidad modificada de estados en el espacio de las fases. El denominador térmico está asociado con la discreción de la suma sobre n y la densidad de estados modificada con la ausencia de contribuciones de onda larga (n pequeña).

En los ejemplos considerados la discreción se debe al confinamiento en el espacio de configuración; existe también el ejemplo trivial de los sistemas térmicos en el espacio euclidiano cuadridimensional, donde el confinamiento se efectúa en la dirección temporal $\tau(t \to i\tau)$ y donde, lógicamente, el resultado final coincide con el térmico. Para sistemas con $s > 0$, las condiciones de frontera o de periodicidad imponen la ausencia de modos de onda larga y son por lo tanto responsables de la modificación que sufre la densidad de estados en el espacio de fases

Si bien se requiere aún mucho trabajo sobre los problemas de la presente sección, la discusión presentada sugiere que el confinamiento de un sistema es el principal ingrediente en la representación térmica de los problemas gravitacionales y cosmológicos. Este confinamiento implica que el sistema alcanza una especie de equilibrio y que de éste se derivan las propiedades termodinámicas.

Es notable también que aun cuando se pueda definir una temperatura a partir del término exponencial de los denominadores de Planck o de Fermi-Dirac, tanto $\hbar$ como k_B están ausentes. El denominador térmico y la densidad de estados modificada dependen solamente de la presencia de ondas con momento angular en el espacio-tiempo acotado. La física cuántica aparece solamente a través de $\hbar$ como un factor multiplicativo en T_{μ}^{ν}, que proviene de la normalización asociada con la energía de punto cero $\hbar\omega/2$ de cada modo. Estrictamente hablando, podríamos decir que este problema no es cuántico ni térmico.

5. Conclusiones

La principales conclusiones de nuestro trabajo son las siguientes:

La radiación que se produce en los campos gravitacionales o en los sistemas acelerados es de la misma naturaleza que el campo de punto cero. La discusión acerca del carácter real o virtual del campo de punto cero y de sus posibles efectos rebasa los límites de este trabajo (veáse 13 y las referencias ahí contenidas)

El acotamiento del espacio en el que se encuentra el campo lo lleva a un estado de equilibrio y por lo tanto a tener una distribución espectral de tipo térmico (de Planck o de Fermi-Dirac). En términos de la teoría de la información, podríamos decir que el confinamiento implica "ignorancia absoluta" acerca de lo que sucede en las regiones más allá del horizonte. El confinamiento de los sistemas es por tanto el principal ingrediente en la representación térmica de los problemas gravitacionales y cosmológicos.

Es también el confinamiento el responsable de la modificación de la densidad de estados en el espacio de fases, ya que tiene como consecuencia la ausencia de modos de onda larga.

Aun cuando ya lo hicimos notar al final de la sección 4, quisieramos insistir sobre el hecho de que el problema no parece ser térmico y tampoco cuántico, ya que k_B aparece sólo en la identificación de la temperatura y $\hbar$ sólo a través de la normalización asociada con la energía $\hbar\omega/2$ de los modos del campo de punto cero.

Por último, quisiéramos remarcar también la analogía que existe entre la aparición de efectos térmicos debidos al confinamiento en sistemas no inerciales y el tratamiento euclidiano de la teoría de campos a temperatura distinta de cero [11].

Referencias

1. T.H. Boyer, *Phys. Rev. A* **9** (1974) 2078.
2. T.H. Boyer, *Phys. Rev. D* **11** (1975) 790.
3. T.S. Bunch, *Phys. Rev. D* **18** (1978) 1844.
4. T.H. Boyer, *Phys. Rev. D* **21** (1980) 2137.
5. N.D. Birrel y P.C.W. Davies, "Quantum Fields in Curved Spaces", Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
6. T.H. Boyer, *Phys. Rev. D* **29** (1984) 1089.
7. T.H. Boyer, *Phys. Rev. D* (to be published).
8. H.B.G. Casimir, *Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap. Proc. B* **51** (1948) 793.
9. P. Candelas y D. Deutsch, *Proc. R. Soc. A* **254** (1977) 79.
10. P. Candelas y J.S. Dowker, *Phys. Rev. D* **19** (1979) 2902.
11. G. Cocho, F. Soto, S. Hacyan y A. Sarmiento, "Thermal Representation of the Energy Density in Bounded Spaces", preprint IFUNAM, 1987.
12. P.C.W. Davies, *J. Phys. A* **8** (1975) 609.
13. L. de la Peña en "Stochastic Processes Applied to Physics and Other Related Fields", editado por B. Gómez *et al.* World Scientific Publishing Co., Singapore, 1983.
14. L.H. Ford, *Phys. Rev. D* **11** (1975) 3370.
15. I.S. Gradshteyn y I.M. Ryzhik, "Table of Integrals Series and Products", Academic Press, Nueva York, 1965.
16. S.W. Hawking, *Nature* **248** (1974) 30.
17. S.W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **43** (1975) 199.
18. S. Hacyan, A. Sarmiento, G. Cocho y F. Soto, *Phys. Rev. D* **32** (1985) 914.
19. S. Hacyan, *Phys. Rev. D* **32** (1985) 3216.
20. S. Hacyan, *Phys. Rev. D* **33** (1986) 3630.
21. S. Hacyan y A. Sarmiento, *Phys. Lett B* **179** (1986) 287.
22. M.J. Lighthill, "Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions", Cambridge University Press, 1958.

23. J. Levoine; "Transformation de Fourier des Pseudo-Functions", CNRS, París 1963.
24. W. Magnus, F. Oberhettinger y P.P. Soni, "Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics", Springer-Verlag New York Inc. 1966.
25. D.W. Sciama, P. Candelas y D. Deutsch, *Adv. Phys.* **30** (1981) 327.
26. W.K. Schomburg y K.O. Thielheim, *Lett. N. Cim.* **38** (1983) 329.
27. W.G. Unruh, *Phys. Rev. D* **10** (1984) 3194.