Investigación *Revista Mexicana de Física* **33** *No. 3(1987) 467–477*

Estudio en formulación complementaria de sistemas electromagnéticos conservativos

C. Velázquez
Departamento de Física, Escuela Técnica Superior de Arquitectura, Madrid, España
(recibido el 24 de marzo de 1986; aceptado el 4 de junio de 1987)

Resumen. A partir del carácter de coordenadas lagrangianas de las cargas eléctricas y los flujos magnéticos, se aplica la formulación complementaria a los sistemas electromagnéticos y se deducen nuevos criterios sobre la estabilidad de evoluciones estacionarias.

Abstract. From the character of Lagrangian coordinates of electric loads and magnetic flow, the complementary formulation is applied to electromagnetic systems and a new criterion about the stability of stacionary evolutions is deduced.

PACS. 03.20.+i

1. Introducción

Los métodos derivados del principio del mínimo de energía complementaria han sido desarrollados por diversos autores, quienes deducen y aplican el recíproco del principio de Hamilton al estudio de oscilaciones libres de sistemas mecánicos [1–9].

En este trabajo se intenta extender la formulación complementaria a los sistemas electromagnéticos, demostrando el carácter lagrangiano intrínseco de las cargas eléctricas q y sus momentos conjugados —flujos magnéticos ϕ — con lo cual el método analógico es sustituido por un método propio.

En el estudio de coordenadas cíclicas, las integrales lineales y homogéneas de las cargas eléctricas o los flujos magnéticos de las ecuaciones de evolución conducen, en el caso de sistemas lineales, a asociar la existencia de variables cíclicas con la singularidad de la matriz de energía magnética, duplicando la posibilidad de obtener integrales primeras de las ecuaciones de evolución.

Por último, se define la estabilidad en las evoluciones estacionarias de tipo electromagnético bajo los criterios de Routh, se demuestra que en tales evoluciones tanto la lagrangiana como la colagrangiana difieren de la hamiltoniana en una constante y se llega al establecimiento de los criterios de estabilidad con la condición de extremo estricto de la función de Lyapunov correspondiente.

2. Proposiciones

Proposición I "Las cargas eléctricas se comportan como coordenadas lagrangianas."

En efecto, las ecuaciones de Maxwell relativas a las mallas, con resistencia despreciable, son de la forma

$$A_{ij}\ddot{q}_j + S_{ij}q_j = 0, \qquad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{2.1}$$

Como dichas ecuaciones son lineales e integrodiferenciables de la forma $\theta q + f = 0$, donde θ es un operador autoadjunto de segundo orden, pueden expresarse en forma variacional dependiente de una funcional en q_j [10]. La obtención de dicha funcional se sigue de multiplicar las Ecs. (2.1) por δq_i y sumarle las ecuaciones que resulten de permutar j por i multiplicadas por δq_j, bajo la hipótesis de que $\delta q_i = \delta q_j = 0$ para $t = t_1$ y $t = t_2$ y de la simetría de los coeficientes A_{ij} y S_{ij}:

$$\delta \int_{t_2}^{t_1} L(q, \dot{q}, t)\, dt = 0 \quad \text{donde} \quad L = \tfrac{1}{2} A_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - \tfrac{1}{2} S_{ij} q_i q_j.$$

Una consecuencia de esta proposición es la definición de la colagrangiana F:

$$F(\phi, \dot{\phi}, t) = \dot{\phi}_i q_i + H(q, \phi, t).$$

Proposición II (dual de la proposición I) "Tomando como funcional la colagrangiana F, los flujos magnéticos ϕ se comportan como coordenadas lagrangianas."

En efecto, al escribir las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0,$$

las definiciones

$$\phi_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{y} \quad \dot{\phi}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

permiten establecer las siguientes transformaciones de Legendre:

$$T^* = \phi_i \dot{q}_i - T \quad \text{y} \quad V^* = \dot{\phi}_i q_i + V;$$

de donde se deducen las ecuaciones de evolución en formulación complementaria:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V^*}{\partial \dot{\phi}_i}\right) - \frac{\partial T^*}{\partial \phi_i} = 0,$$

equivalentes al principio variacional complementario:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} F\,dt = 0 \qquad \text{con} \quad F = V^* - T^*.$$

Proposición III "Si las ecuaciones de evolución

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\phi}_i}\right) + \frac{\partial F}{\partial \phi_i} = 0, \qquad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \tag{2.2}$$

que definen un sistema, admiten una integral lineal y homogénea de las cargas eléctricas

$$f_1 q_1 + f_2 q_2 + \cdots + f_n q_n = \text{const.} \tag{2.3}$$

con $f_1 = f_i(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$, existe una transformación puntual de las variables $\{\phi_i\}$ en las $\{\overline{\phi}_i\}$, tal que la $\overline{\phi}_n$ es cíclica."

En efecto, sea el sistema de $(n-1)$ ecuaciones:

$$\frac{d\phi_i}{f_1(\phi_i)} = \frac{d\phi_2}{f_2(\phi_i)} = \cdots = \frac{d\phi_n}{f_n(\phi_i)}, \qquad i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{2.4}$$

con solución $\phi_k(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n) = c$, $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Haciendo $d\overline{\phi}_n = d\phi_n / f_n$, el sistema (2.4) se transforma en

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial \overline{\phi}_n} = f_k. \tag{2.5}$$

Si la transformación $\{\phi_i\} \to \{\overline{\phi}_i\}$ es puntual, entonces

$$\overline{q}_n = \sum_1^n q_k \frac{\partial \phi_k}{\partial \overline{\phi}_n},$$

y en virtud de (2.5) y de la hipótesis inicial

$$\overline{q}_n = \sum_1^n q_k f_k = \text{const.}$$

Proposición IV (dual de la proposición III) "Si el sistema definido por las ecuaciones de evolución

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

admite una integral lineal y homogénea de los flujos magnéticos $f_1\phi_1 + f_2\phi_2 + \cdots + f_n\phi_n = \text{const.}$, siendo $f_i = f_i(q_i)$, existe una transformación puntual de las variables $\{q_i\}$ en las $\{\overline{q}_i\}$, tal que la variable $\overline{q}_n$ es cíclica."

Proposición V "Si el sistema de ecuaciones de evolución (2.2) admite una transformación puntual que lo convierte en otro con una variable ϕ cíclica, el sistema posee una integral lineal y homogénea de las variables q."

En efecto, la transformación puntual

$$\{\phi_i\} \to \{\overline{\phi}_i\} \Longrightarrow \overline{q}_i = \sum_1^n q_k \frac{\partial \phi_k}{\partial \overline{\phi}_i},$$

$$\overline{\phi}_n \text{ cíclica} \Longrightarrow \overline{q}_n = \sum_1^n q_k \frac{\partial \phi_k}{\partial \overline{\phi}_n} = \text{const.},$$

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial \overline{\phi}_n} = f_k(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n) \Longrightarrow f_1 q_1 + f_2 q_2 + \cdots + f_n q_n = \text{const.}$$

Proposición VI (dual de la proposición V) "Si el sistema electromagnético en estudio admite una transformación puntual que lo convierte en otro con una variable cíclica $\overline{q}_n$, dicho sistema posee una integral lineal y homogénea de los flujos magnéticos."

Proposición VII "La condición necesaria y suficiente para que en un sistema lineal exista un momento cíclico ϕ_i es que la matriz de los flujos sea singular."

Sea la colagrangiana del sistema

$$F = \tfrac{1}{2} C_{ij} \dot{\phi}_i \dot{\phi}_j - \tfrac{1}{2} A_{ij}^{-1} \phi_i \phi_j,$$

$$\phi_i \text{ cíclica} \Longrightarrow \frac{\partial F}{\partial \phi_i} = 0 \Longrightarrow A_{ij}^{-1} \phi_j = 0 \Longrightarrow |A_{ij}^{-1}| = 0. \tag{2.6}$$

(Condición necesaria).

Si A_{ij}^{-1} es singular, a partir de las ecuaciones de evolución y de la expresión (2.6) se obtiene una integral lineal y homogénea de las cargas q; la Proposición III indica la existencia de una variable cíclica (Condición suficiente).

Proposición VIII (dual de la proposición VII) "En los sistemas lineales la condición necesaria y suficiente para la existencia de una variable cíclica, q_i, es que la matriz de las cargas eléctricas sea singular"

Proposición IX "Si un sistema electromagnético admite coordenadas cíclicas en la representación complementaria, una parte de la energía electrostática del sistema inicial puede considerarse energía magnética del sistema reducido."

Sea un sistema electromagnético con tres grados de libertad y ϕ_3 cíclica. La colagrangiana F es de la forma

$F = V_e^* - T_m^* = \frac{1}{2} C_{rs}\dot{\phi}_r\dot{\phi}_s - \frac{1}{2} A_{ij}^{-1}\phi_i\phi_j, \quad r,s \in \{1,2,3\},\ i,j \in \{1,2\}.$

Si $\partial F/\partial \phi_3 = 0 \Longrightarrow \partial F/\partial\dot{\phi}_3 = k_3 \Longrightarrow k_3 = \partial V_e^*/\partial\dot{\phi}_3 = C_{3i}\dot{\phi}_i + C_{33}\dot{\phi}_3 \Longrightarrow \dot{\phi}_3 = C_{33}^{-1}k_3 - \gamma_{3i}\dot{\phi}_i$, donde $\gamma_{3i} = C_{33}^{-1}C_{3i} \Longrightarrow V_e^* = C_{ij}^*\dot{\phi}_i\dot{\phi}_j/2 + C_{33}^{-1}k_3^2/2$, siendo $C_{ij}^* = C_{ij} - C_{33}^{-1}C_{3i}C_{3j}$.

Para el sistema reducido

$$\begin{aligned} R^*(\phi_i\dot{\phi}_i k_3) &= k_3\dot{\phi}_3 + F \\ &= -\tfrac{1}{2}C_{33}^{-1}k_3^2 - \dot{\phi}_i\gamma_{3i}k_3 - \tfrac{1}{2}A_{ij}^{-1}\phi_i\phi_j + \tfrac{1}{2}C_{ij}^*\dot{\phi}_i\dot{\phi}_j. \end{aligned}$$

La energía eléctrica del sistema reducido es $V^* = C_{ij}^*\dot{\phi}_i\dot{\phi}_j/2$ y la magnética $T^* = C_{33}^{-1}k_3^2/2 + \gamma_{3i}q_3\dot{\phi}_i + A_{ij}^{-1}\phi_i\phi_j/2$.

Se observa que parte de la energía eléctrica V_e^* del sistema total puede considerarse como energía magnética del sistema reducido, verificándose $T_m^* + V_e^* = T^* + V^* - \gamma_{\alpha i}q_\alpha\dot{\phi}_i$.

Proposición X (dual de la proposición IX) "Si un sistema electromagnético admite coordenadas cíclicas en la representación lagrangiana, una parte de la energía magnética del sistema inicial puede considerarse energía electrostática en el sistema reducido."

3. Conclusiones

3.1. Siempre que la matriz de la energía eléctrica V en la formulación clásica, o de la energía magnética T^* en la complementaria, sea singular, puede tratarse el problema en coordenadas cíclicas y aplicar la teoría de Routh para su resolución.
3.2. La formulación complementaria, hecha en función de los flujos magnéticos ϕ, es más conveniente en el estudio de sistemas electromagnéticos cuando dominan las capacitancias.
3.3. Una vez demostrado por las proposiciones I y II el carácter lagrangiano de las cargas eléctricas y los flujos magnéticos, se puede plantear de dos formas el estudio de un sistema electromagnético conservativo en la formulación complementaria:

3.3.1. Tomando como coordenadas libres las cargas q y como funcional la lagrangiana L, y llegando a la formulación complementaria mediante transformaciones de Legendre.
3.3.2. Directamente, tomando como coordenadas los flujos magnéticos ϕ y como funcional la colagrangiana F.

4. Estabilidad de evoluciones estacionarias

Diremos que la evolución de un sistema electromagnético conservativo es estacionaria, si las coordenadas no cíclicas del sistema permanecen constantes a lo largo de la evolución. Esta definición supone la posibilidad de dos tipos de evoluciones estacionarias según se tomen como coordenadas lagrangianas las cargas eléctricas o los flujos magnéticos.

Proposición XI "Si la evolución es estacionaria para los flujos magnéticos, se verifica que $H - F = \text{const.}$"

Sea un sistema con n grados de libertad, definido por los flujos

$$\{\phi_i, \phi_\alpha\}, \qquad i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \quad \alpha \in \{1+m, \ldots, n\},$$

siendo ϕ_α coordenadas cíclicas y $F = \dot{\phi}_i q_i + H$.

$$\text{Evolución estacionaria} \Longrightarrow \phi_i = \text{const.} \Longrightarrow \dot{\phi}_i = 0;$$

$$\phi_\alpha \text{ cíclicas} \Longrightarrow \frac{\partial H}{\partial \phi_\alpha} = 0 \Longrightarrow \dot{q}_\alpha = 0 \Longrightarrow q_\alpha = \text{const.}$$
$$\Longrightarrow \dot{\phi}_\alpha = \text{const.} \Longrightarrow F = \text{const.} + H.$$

Proposición XII (dual de la proposición XI) "Si una evolución es estacionaria con respecto a las cargas eléctricas, se verifica que $H + L = \text{const.}$"

Propositióin XIII "En toda evolución estacionaria, las coordenadas no cíclicas permanecen constantes y las cíclicas varían linealmente con el tiempo."

La primera parte de la proposición es consecuencia directa de la definición de evolución estacionaria; para demostrar la segunda, consideremos la colagrangiana

$$F = \tfrac{1}{2} C_{rs} \dot{\phi}_r \dot{\phi}_s - \tfrac{1}{2} A_{ij}^{-1} \phi_i \phi_j,$$
$$i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}, \qquad \alpha, \beta \in \{m+1, \ldots, n\}, \quad r, s \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

$$\text{Movimiento estacionario} \Longrightarrow \phi_i = \phi_i^\circ \Longrightarrow \dot{\phi}_i = 0,$$

$$\phi_\alpha \text{ cíclicas} \Longrightarrow \dot{q}_\alpha = \frac{\partial F}{\partial \phi_\alpha} = 0 \Longrightarrow q_\alpha = q_\alpha^\circ \Longrightarrow$$
$$q_\alpha^\circ = \frac{\partial F}{\partial \dot{\phi}_\alpha} = C_{\alpha i} \dot{\phi}_i + C_{\alpha\beta} \dot{\phi}_\beta \Longrightarrow$$
$$\dot{\phi}_\beta = \dot{\phi}_\beta^\circ \Longrightarrow \phi_\beta = \int_{t_0}^{t} \dot{\phi}_\beta \, dt = \dot{\phi}_\beta^\circ (t - t_0).$$

Se observa que un pequeño cambio en las condiciones iniciales $\phi_i^\circ, q_i^\circ, q_\alpha^\circ$, suponen un cambio también pequeño en la velocidad generalizada del flujo cíclico $\dot{\phi}_\alpha$, mientras que un pequeño cambio en dicha velocidad produce en el transcurso del tiempo un gran cambio en el flujo ϕ_α correspondiente.

5. Criterios de estabilidad de evoluciones estacionarias

Primer criterio "Una evolución en el estado inicial $\phi_i^\circ, q_i^\circ, q_\alpha^\circ$ ($i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $\alpha \in \{m+1, \ldots, n\}$) es una evolución estable con respecto a los flujos magnéticos si la función $\Psi = F - \sum q_i \dot{\phi}_i$ presenta un extremo estricto en dicho estado."

En efecto, la función $\Psi(\phi_i, q_i, q_\alpha)$ satisface las condiciones del teorema de Lyapunov relativo a la integral primera de las ecuaciones de evolución:

1. Es una integral primera del sistema
$$q_i = \frac{\partial F}{\partial \dot{\phi}}, \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial F}{\partial \phi_i}, \qquad i \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$
2. Introduciendo las desviaciones
$$\eta_i = \phi_i - \phi_i^\circ, \qquad \xi_i = q_i - q_i^\circ, \qquad \xi_\alpha = q_\alpha - q_\alpha^\circ,$$
la integral primera $\Psi(\phi_i + \eta_i, q_i + \xi_i, q_\alpha)$ en el punto $\eta_i = 0$, $\xi_i = 0$, presenta un extremo estricto, ya que por ser una evolución estacionaria $\dot{\phi}_i = 0$, implica
$$\Psi = F = H + \text{const.}$$
siendo H una forma cuadrática finita.

Segundo criterio "Una evolución en el estado inicial $q_i^\circ, \phi_i^\circ, \phi_\alpha^\circ$ es una evolución estable con respecto a las cargas eléctricas si la función $\Psi' = L + \sum \phi_i \dot{q}_i$ presenta un extremo estricto en dicho estado."

Efectivamente, $\Psi'(q_i, \phi_i, \phi_\alpha)$ es una integral primera del sistema de ecuaciones
$$\dot{\phi}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial \phi_i},$$

e introduciendo las desviaciones

$$\xi_i = q_i - q_i^\circ, \quad \eta_i = \phi_i - \phi_i^\circ, \quad \eta_\alpha = \phi_\alpha - \phi_\alpha^\circ,$$

la integral primera

$$\Psi'(q_i + \xi_i, \phi_i + \eta_i, \phi_\alpha)$$

en el punto $\xi_i = 0$, $\eta_i = 0$, presenta un extremo estricto por ser una evolución estacionaria $\dot{q}_i = 0$, lo que conduce a

$$\Psi' = L = \text{const.} - H.$$

Tercer criterio "Una evolución en estado inicial $\phi_i^\circ, \dot{\phi}_i^\circ = 0, q_\alpha^\circ$, es una evolución estable con respecto a los flujos magnéticos si la energía magnética del sistema reducido es un extremo estricto en el punto $\phi_i = \phi_i^\circ$."

En efecto, la colagrangiana F puede escribirse en la forma

$$F = \tfrac{1}{2} C_{ij}^* \dot{\phi}_i \dot{\phi}_j - \Gamma^*,$$

siendo Γ^* la energía magnética reducida.

Sustituyendo F en las ecuaciones

$$q_i = \frac{\partial F}{\partial \dot{\phi}_i}, \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial F}{\partial \phi_i},$$

quedan reducidas a

$$\frac{\partial \Gamma^*}{\partial \phi_i}, \qquad q_i = q_i^\circ,$$

y por ser la evolución estacionaria

$$\dot{\phi}_i = 0 \Longrightarrow \Gamma^* = F = H + \text{const.}$$

Cuarto criterio "Una evolución en estado inicial $q_i^\circ, \dot{q}_i^\circ = 0, \phi_\alpha^\circ$, es una evolución estable con respecto a las cargas eléctricas si la energía eléctrica del sistema reducido es un extremo estricto en el punto $q_i = q_i^\circ$."

En efecto, la lagrangiana L puede escribirse como

$$L = \tfrac{1}{2} A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \Pi,$$

siendo Π la energía eléctrica del sistema reducido. Sustituyendo L en las ecuaciones

$$\dot{\phi}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \qquad -\dot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial \phi_i},$$

se convierten en

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \qquad \phi_i = \phi_i^\circ,$$

y si la evolución es estacionaria

$$-\Pi = L = \text{const.} - H \Longrightarrow \Pi = H - \text{const.}$$

Referencias

1. E. Reissner, *Journal of Mathematics and Physics* **27** (1948) 159.
2. K. Washizu, *International Journal of Solids and Structure* **2** (1966) 27.
3. G. Gladwell, G. Zimmermann, *Journal of Sound and Vibrational* **3** (1966) 233.
4. R.A. Toupin, *Trans. ASME* **74** (1952) 151.
5. S.H. Crandall, *Proceedings of the 9th International Congress of Applied Mechanics* **5** (Bruxelles, 1975) 80.
6. R.L. Sakaguchi, R. Tabarrok, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **2** (1970) 233.
7. Z.M. Elias, *Journal of Applied Mechanics*, (March 1973) 93.
8. C. Velázquez, *Anales de Ingeniería Mecánica* **1** (1983) 7.
9. G.C. Constantelos, *Il Nuevo Cimento* **84**B Nov. (1984) 91.
10. D.G.B. Edelen, *Non local Variations and Invariance of Fields.* T-1.2. p. 16.