

Oscilaciones armónicas: Un experimento completo

F. Morales Leal

*Instituto de Investigación en Materiales, Departamento de Bajas
Temperaturas, Universidad Nacional Autónoma de México,
04510 México, D.F.*

A. Porta y J.L. Sandoval

*Laboratorio de Acústica, Departamento de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México, 04510 México, D.F.*

(recibido el 14 de febrero de 1986; aceptado el 2 de junio de 1987)

Resumen. En este trabajo se describe un método experimental simple e instructivo para estudiar las oscilaciones en un conjunto masa-resorte. Con él, se analizan las oscilaciones libres, amortiguadas y forzadas determinando algunos de sus parámetros característicos tales como la resistencia mecánica del medio, el factor de calidad y otros. Las gráficas experimentales de cada movimiento son comparadas con las obtenidas teóricamente por simulación en computadora. Se discute también la precisión del método y se sugiere como un práctica para los distintos niveles de las licenciaturas en física e ingeniería, dado que su versatilidad permite que se ajuste a los objetivos de diferentes cursos.

Abstract. A simple and instructive method to study oscillations of a mass-spring system is described. The free, damped, and forced motions are analyzed in detail; and some characteristic parameters, such as the mechanical resistance, the quality factor and others, are given. The experiment plots are compared to the theoretical movements simulated by computer. The method's precision is discussed and its uses as an experiment for several levels in physics and engineering is suggested, because of its versatility may permit to be used with distinct objectives in different courses.

PACS: 01.50.Pa

1. Introducción

Los cursos introductorios de física comúnmente tratan el estudio de movimientos oscilatorios tales como péndulos, resortes, analogías eléctricas, etc. El estudiante generalmente no tiene dificultad para entender los conceptos fundamentales del péndulo; presumiblemente porque existen experimentos adecuados del oscilador armónico (referido OA) sin embargo, tiene en general una experiencia restringida, ya que encuentra dificultad para realizar un experimento confiable, simple y que le permita entender los conceptos fundamentales involucrados.

Una cantidad que es fácil de determinar en un OA es el periodo de oscilación. En este sentido, han sido reportados algunos trabajos [1, 2, 3] para casos particulares. Hard [3], por ejemplo, presenta un análisis para resortes suaves donde un modelo específico se verifica con sólo la determinación del periodo de oscilación. Cuando se requiere conocer el movimiento en forma continua sin embargo, surgen complicaciones tanto en equipo como en precisión en las mediciones. Bonera *et al.* [4], han logrado registrar movimientos continuos de un péndulo forzado, amortiguado y de dos péndulos acoplados, con un potenciómetro de agua. Tal vez un experimento más adecuado es el descrito por Feige *et al.* [5] en donde se analizan las oscilaciones amortiguadas de un OA en un riel de aire. Aunque interesantes, estos experimentos se realizan para casos particulares y evitan estudiar el OA en forma completa.

En este trabajo se presenta un método de detección adecuado, con un dispositivo de fácil construcción y manejo. Con él, se realizan tres experimentos para obtener en forma continua las oscilaciones libres, amortiguadas y forzadas. Los resultados obtenidos permiten evaluar la eficiencia del método y la utilidad del dispositivo para detectar otros movimientos oscilantes. El experimento resulta útil para estudiantes de física e ingeniería, ya que les permite entender y observar con claridad las principales características del movimiento armónico estudiado en un curso teórico. Nuestra experiencia en los cursos donde se ha aplicado (Física General y Acústica I), ha reve-

lado una fuerte motivación por parte del estudiante, logrando que analice el problema con mayor profundidad y diferentes objetivos, dependiendo de su nivel académico. Además, la precisión de los resultados que se obtienen le permite verificar el modelo sin grandes esfuerzos.

2. Teoría

Un movimiento de tipo armónico es descrito en general por la ecuación:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F(t), \quad (1)$$

expresión que considera una fuerza disipativa proporcional a la velocidad ($2\alpha dx/dt$) y una fuerza externa $F(t)$. Si $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$, la solución de la Ec. (1) está dada por,

$$x(t) = A_0 \exp(-\alpha t) \cos(\omega_f t - \phi) + \frac{F_0}{\omega |Z_m|} \cos(\omega t - \theta) \quad (2)$$

en donde $\alpha = R_m/2m$, R_m la resistencia mecánica del medio, m la masa del cuerpo suspendido, ω_f la frecuencia de forzamiento causada por $F(t)$, $(Z_m)^2 = (R_m)^2 + (\omega - \omega_0)^2$ la impedancia mecánica del sistema, ω_0 la frecuencia natural de oscilación y ϕ y θ ángulos de fase del desplazamiento y la velocidad respecto a la fuerza externa [6, 7].

Conociendo ν_0 y α se pueden determinar los parámetros característicos del movimiento (referido como PC), como el factor de calidad Q , el decremento δ y el módulo de decaimiento τ [6, 7]. Matemáticamente estos se expresan como

$$Q = \frac{\pi \nu_0}{\alpha}, \quad \delta = \frac{\alpha}{\nu_0}, \quad \text{y} \quad \tau = \frac{1}{\alpha}.$$

3. Descripción del sistema

En la Fig. 1 se muestra esquemáticamente el aparato usado para registrar las oscilaciones de un OA en sus tres formas; libre, amortiguado y forzado. El dispositivo consta esencialmente de una fuente luminosa S , un conjunto de colimadores L_1 , L_2 y L_3 ; una rejilla moduladora R en forma de 'V' y un detector optoelectrónico E , colocados en el interior de un tubo cilíndrico. La detección de las oscilaciones se realiza con R al intersectar un haz de luz. La luz emerge de S y es colimada por L_1 y L_2 antes de llegar a R . Dado que R se coloca de tal forma que se mueve de acuerdo con las oscilaciones del OA (véase la Fig. 1), el haz de luz incidirá en diferentes puntos de R . La forma de R permite, por lo tanto, un mayor o menor paso de luz dependiendo del punto donde el haz incida. Al salir de R el haz es nuevamente colimado por L_3 para proyectar una determinada área iluminada sobre E . Los desplazamientos de R junto con L_3 producen sobre E un área iluminada variable. Estas variaciones son registradas a la salida del circuito mostrado en la Fig. 2, como variaciones de voltaje. Colocando un graficador X-T o un osciloscopio, las oscilaciones podrán ser registradas en forma continua.

Es importante hacer notar que en equilibrio, el voltaje a la salida deberá ser cero. Esta condición se logra ajustando los potenciómetros de $1\text{ K}\Omega$ y $10\text{ K}\Omega$ del circuito, siempre y cuando el haz de luz incida a la mitad de R .

En el caso de las oscilaciones forzadas, además del sistema arriba descrito, es adecuado usar un sistema de excitación electromecánico. Una bobina conectada a un generador de funciones permitirá excitar al sistema en la forma deseada. La bobina usada (10 mH) se construyó devanando sobre un tubo de lucita de 1.6 cm de diámetro y 7.8 cm de longitud, 25 m de alambre #32 AWG. La idea de usar un tubo es que en su interior se pueda depositar un líquido que permita producir un amortiguamiento observable en el comportamiento del oscilador.

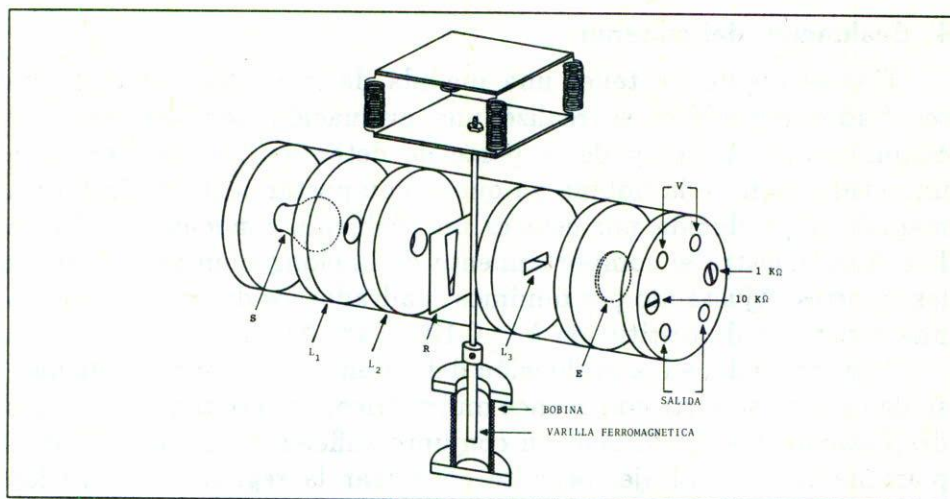


FIGURA 1. Arreglo esquemático usado para detectar las oscilaciones del conjunto masa-resorte. La varilla y bobina pueden ser reemplazadas por una masa y un recipiente lleno con un líquido para producir movimientos libres y amortiguados.

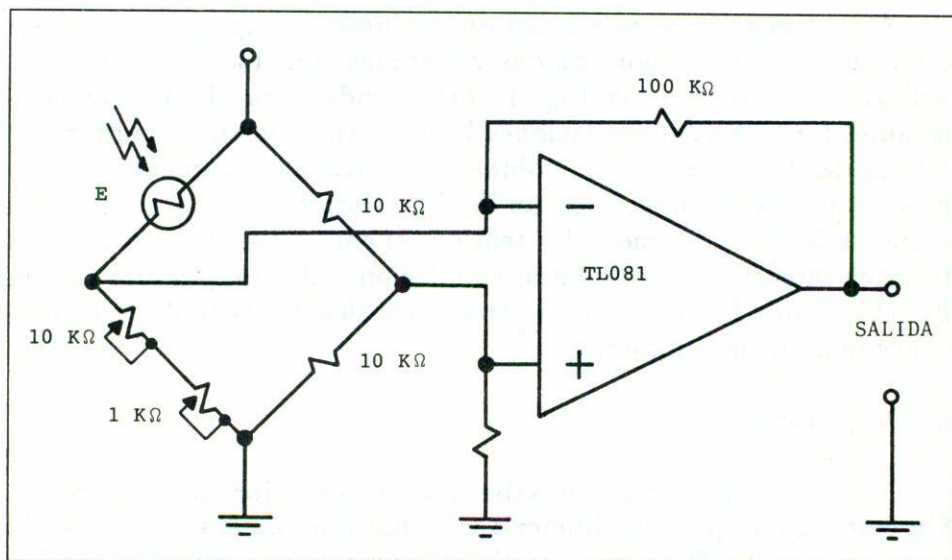


FIGURA 2. Circuito de detección. La fotocelda *E* detecta las variaciones mecánicas del oscilador como variaciones de luz.

4. Evaluación del sistema

Con el objeto de tener una medida de la confiabilidad de los resultados obtenidos, se realizó una evaluación por separado del conjunto de resortes y de la parte de detección. No es necesaria una evaluación de la bobina ya que el comportamiento de la fuerza magnética producida por ésta es un problema conocido [9]. En la Fig. 3 se muestra el comportamiento de la elongación vs. fuerza de los resortes. Ajustando por mínimos cuadrados los datos, se encontró una constante de restitución $k = 0.192 \pm 4\%$ Nt/cm.

Por otro lado, en la evaluación del sistema detector fue indispensable usar un soporte con avance milimétrico, para obtener pequeños desplazamientos de R . Así, un conjunto suficiente de datos de desplazamiento vs. voltaje, permite encontrar la región de operación lineal del detector (Fig. 4).

5. Experimento

A continuación se presentan un conjunto de experimentos sobre oscilaciones libres, amortiguadas y forzadas con el aparato descrito. Aunque el arreglo de la Fig. 1 corresponde para el caso de oscilaciones forzadas, las oscilaciones libres y amortiguadas podrán ser estudiadas reemplazando la bobina y la barra ferromagnética por un peso o un peso sumergido en un líquido. Para cada caso, se muestra el movimiento experimental y teórico así como sus PC. Las gráficas teóricas mostradas representan simulaciones de computadora de la Ec. (2), donde los parámetros experimentales de las tablas han sido convenientemente impuestos.

a) Oscilador libre.

En condiciones reales se sabe que un oscilador libre no existe. Sin embargo, es posible obtener aproximaciones de él si el tiempo de registro es corto. Bajo esta condición y usando una masa de 185.7 g y una amplitud inicial de 0.4 cm, el movimiento del oscilador es registrado por un graficador X-T con sensibilidad de 50 mV/cm y

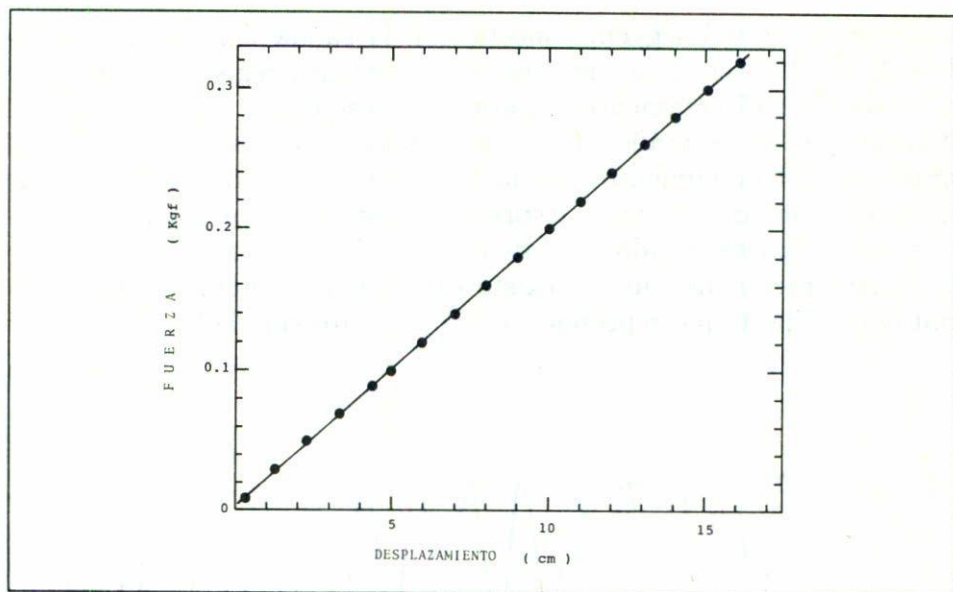


FIGURA 3. Región de operación lineal del arreglo de resortes usado.

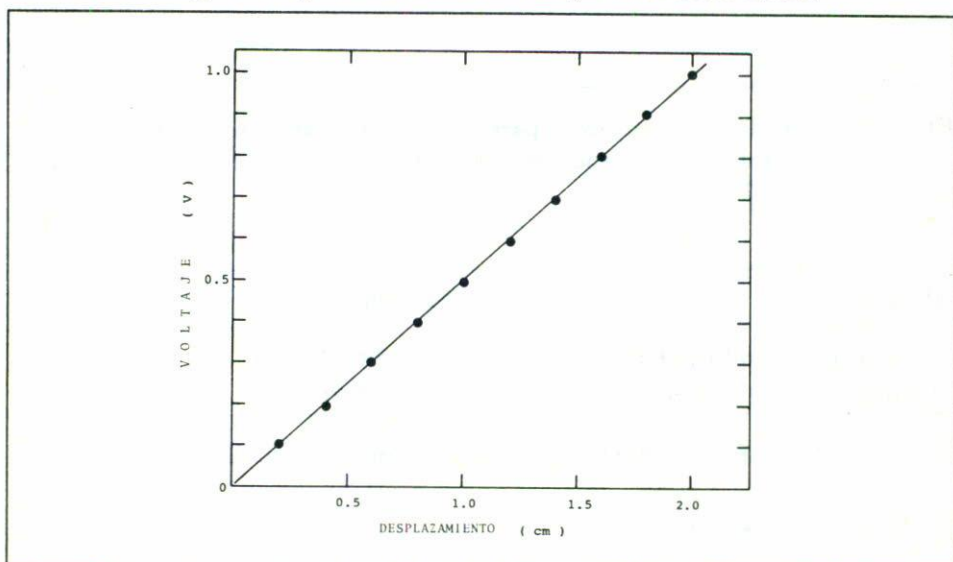


FIGURA 4. Curva de evaluación de la rejilla usada para transformar las oscilaciones mecánicas en variaciones de luz.

un barrido de 0.5 seg/cm conectado a la salida del circuito de la Fig. 2. En la Fig. 5 se muestra el movimiento registrado del cual se determina directamente el periodo de oscilación (véase tabla I). Nótese que en la gráfica no es apreciable una disminución en la amplitud del movimiento, por lo tanto, se puede considerar que la disipación debida al aire es despreciable para tiempos pequeños. Por otro lado, substituyendo los datos de la tabla I en la Ec. (2) y bajo la consideración de que no existe disipación ni fuerza externa, se obtuvo la Fig. 6 que representa el movimiento simulado.

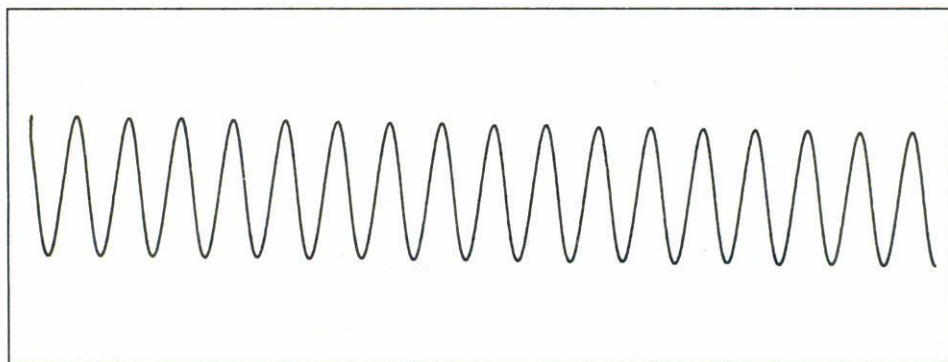


FIGURA 5. Gráfica experimental para un oscilador armónico libre. El movimiento fue iniciado con una amplitud de 0.4 cm y una masa de 185.7 g.

Parámetro	Experimental	Calculado
Frecuencia natural ν_0 (1/seg)	1.6 ± 0.03	1.62
Amplitud Inicial x_0 (cm)	0.4 ± 0.01	

TABLA I. Resultados obtenidos para un oscilador armónico libre.

b) Oscilador amortiguado.

El término relevante en este tipo de oscilaciones es el disipativo; por lo tanto, para hacerlo notorio se sumergió completamente una

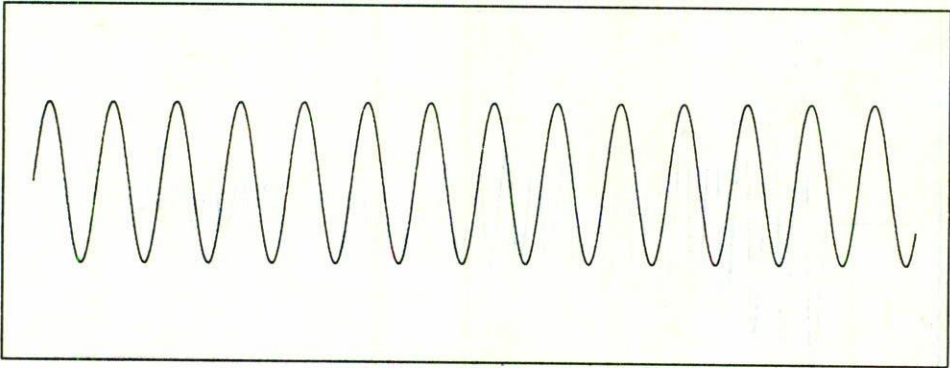


FIGURA 6. Movimiento simulado para un oscilador libre.

masa en forma de bicono de 252.6 g en un líquido (agua en este caso). Ajustando el graficador para una sensibilidad de 50 mV/cm y un barrido de 1 seg/cm e iniciando el movimiento con una amplitud de 0.9 cm, las oscilaciones registradas son mostradas en la Fig. 7. De esta gráfica se obtienen los PC del movimiento mostrados en la tabla II. Es importante que en el máximo desplazamiento ninguna de las partes del bicono salga del líquido, asegurando así que el efecto disipativo sea sólo consecuencia de éste. Ahora, tomando en la Ec. (2) $F(t) = 0$ y sustituyendo R_m , x_0 y ω_f de la tabla II y los valores de m y k , el movimiento simulado es mostrado en la Fig. 8.

c) Oscilador forzado.

El movimiento completo del OA se realizó usando como masa una barra de material ferromagnético de 106.4 g inmersa en un líquido (agua) contenido por la bobina (Fig. 1). Un generador de funciones permitió, por lo tanto, aplicar al sistema una fuerza externa de la forma $F(t) = F_0 \text{sen } \omega t$, con $\omega = 13.2 \text{ rad/seg}$. El comportamiento resultante para la misma sensibilidad y barrido que en A, se presenta en la Fig. 9. La tabla III muestra los PC del movimiento, los cuales son sustituidos en la Ec. (2) para obtener el movimiento simulado (Fig. 10).

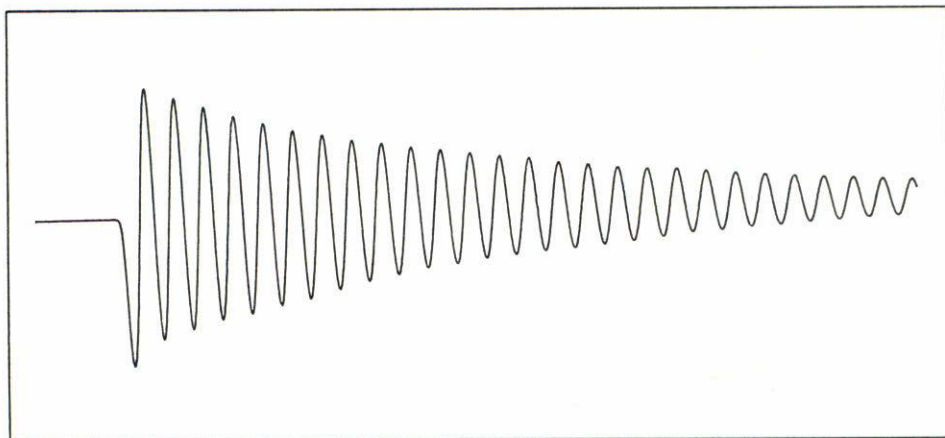


FIGURA 7. Gráfica experimental para un oscilador amortiguado. El movimiento fue iniciado con una amplitud de 0.9 cm y agua usada como medio de fricción.

Parámetro	Experimental	Calculado
Frecuencia natural ν_0 (1/seg)	1.34 ± 0.05	1.39
Frecuencia de oscilación ν_f (1/seg)	1.36 ± 0.05	1.40
Módulo de decaimiento τ (seg)	10.30 ± 0.05	10.20
Amplitud inicial x_0 (cm)	0.90 ± 0.01	
Constante de decaimiento α (1/seg)	0.10 ± 0.002	
Resistencia mecánica R_m (g/seg)		49.8
Factor de calidad Q		44.2
Decremento δ	0.077 ± 0.05	0.071

TABLA II. Parámetros característicos para el caso de un oscilador armónico amortiguado. Los resultados omitidos indican que los parámetros no se pueden calcular o medir experimentalmente.

Por otro lado, el sistema fue excitado con diferentes frecuencias alrededor de la frecuencia natural, registrando las amplitudes de la parte estacionaria. Tales valores se muestran en la Fig. 11 y describen

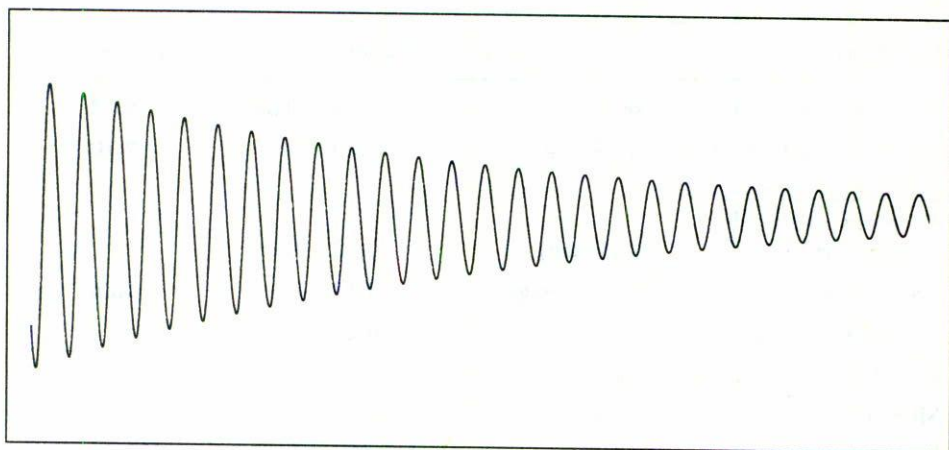


FIGURA 8. Gráfica simulada para un oscilador armónico amortiguado.

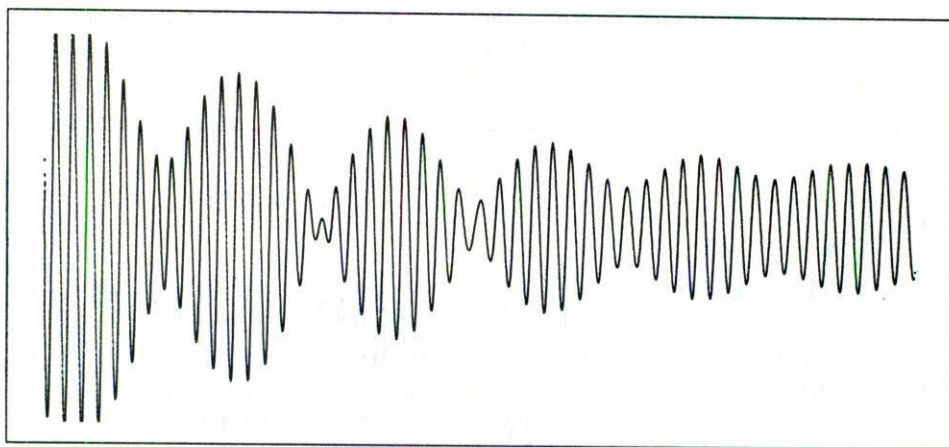


FIGURA 9. Curva experimental para un oscilador armónico forzado.

la curva de resonancia del sistema. En esta figura puede observarse que la resonancia presenta un comportamiento muy agudo, a tal grado que el ancho de la curva es comparable con el intervalo de incertidumbre en el valor de la frecuencia [10].

Parámetro	Experimental	Calculado
Frecuencia natural ν_0 (1/seg)	2.10 ± 0.05	2.13
Frecuencia de oscilación ν_f (1/seg)	2.30 ± 0.05	2.10
Frecuencia de oscilación de la envolvente del estado transiente ν_t (1/seg)	0.12 ± 0.05	
Frecuencia de forzamiento ν_f (1/seg)	2.10 ± 0.03	2.35
Amplitud Inicial x_0 (cm)	0.20 ± 0.01	
Resistencia mecánica R_m (g/seg)		11.8
Módulo de decaimiento τ (seg)	18.50 ± 0.05	18.12
Factor de calidad Q	140.80 ± 19.20	121.24
Constante de decaimiento α (1/seg)	0.055 ± 0.006	

TABLA III. Parámetros característicos para un oscilador forzado y amortiguado. Los resultados omitidos indican que los parámetros no se pueden calcular o medir experimentalmente.

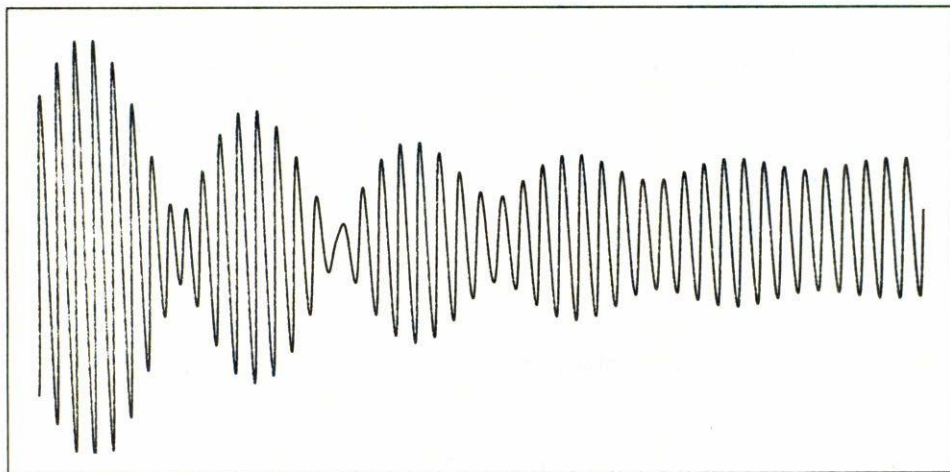


FIGURA 10. Gráfica simulada para el oscilador armónico forzado.

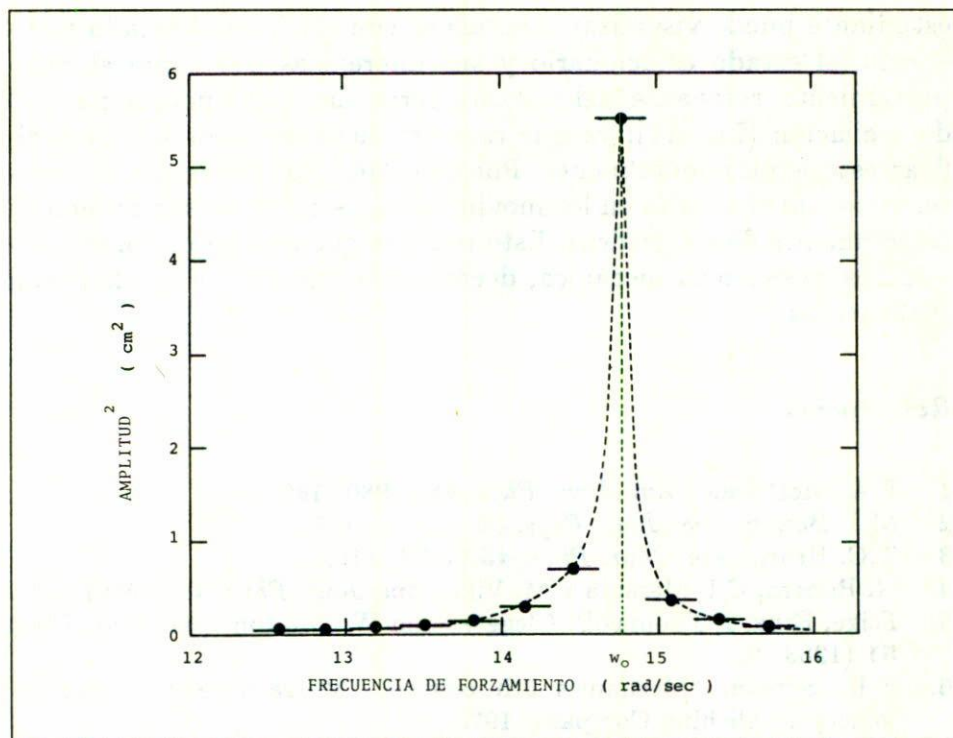


FIGURA 11. Curva característica de resonancia para el oscilador armónico forzado.

6. Discusión

Los resultados experimentales obtenidos muestran en primer lugar que el método y el aparato resultan confiables para el estudio de oscilaciones armónicas. Posibles corrimientos entre las gráficas experimentales y las simuladas pueden ser observados al superponerlas, dado que no fue posible ajustar el barrido del graficador con el barrido del graficador de la computadora. Cualitativamente, sin embargo, puede observarse que las gráficas experimentales presentan el mismo comportamiento que predice la teoría.

Un segundo resultado relevante es el obtenido para el caso de oscilaciones forzadas (Fig. 9). La importancia del resultado es que el

estudiante puede visualizar y entender con claridad el estado transitorio, el estado estacionario y sus diferencias, así como el comportamiento resonante del sistema cerca de la frecuencia natural de oscilación (Fig. 11); ya que rara vez tiene oportunidad de verificar esto experimentalmente. Por otro lado, los parámetros característicos involucrados en los movimientos oscilatorios son obtenidos directamente de las gráficas. Esto permite que conceptos como batimientos, resistencia mecánica, decremento y factor de calidad sean reafirmados.

Referencias

1. F.A. McDonald, *Am. Jour. Phys.* **48** (1980) 189.
2. M.J. Bowen, *Am. Jour. Phys.* **50** (1982) 1145.
3. T.C. Heard, *Am. Jour. Phys.* **45** (1977) 1102.
4. G. Bonera, C.I. Massara y M. Villa, *Am. Jour. Phys.* **44** (1976) 1121.
5. Feige, Erhard, Thomas B. Clegg y John W. Poulton, *Am. Jour. Phys.* **51** (1983) 954.
6. K.R. Symon, "Mechanics 3th edition", Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1973.
7. P.M. Morse, "Vibration and Sound", New York, McGraw-Hill, 1948.
8. Radio Shack Technical Data, Applications sheet of CdS photo Cell.
9. E.M. Purcell, "Electricity and Magnetism", Berkeley Physics Course Vol. 2, Berkeley, McGraw-Hill, 1965.
10. R.P. Feynman, Robert B. Leighton y Matthew Sands, "Lectures on Physics" Vol. I, California, Addison-Wesley, 1975.