

VARIABLES CANÓNICAS PARA EL MOVIMIENTO DE UNA CARGA EN UN CAMPO DE MONOPOLO

Eduardo Piña*, Tar Ortiz y Arturo Muñoz

Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares, Agricultura No. 21, 11800
México, D.F.

(recibido el 27 de febrero de 1987; aceptado el 19 de junio de 1987)

Resumen. En este trabajo se obtienen variables canónicas para el movimiento de una carga en un campo de monopolo. En lugar de obtener el campo monopolar de un potencial vectorial, según el procedimiento acostumbrado para obtener las ecuaciones de movimiento, se sustituye por el formalismo hamiltoniano en variables no canónicas, a partir del cual se descubren variables canónicas conjugadas, las que se consideran de utilidad en la teoría de la deriva del movimiento de cargas en campos electromagnéticos.

Abstract. Canonical coordinates for studying the motion of a charged particle in a magnetic monopole field are found. Instead of derive the field in terms of a vector potential as is usual in describing the motion of charged particles in a magnetic field, we start with a hamiltonian formalism in terms of non-canonical coordinates in phase space. Then canonical coordinates are found with close relation to the classical solution. These coordinates are expected to be useful for the guiding center motion within the drift approximation.

PACS: 41.70.+t; 46.10.+z; 52.20.Dq

1. Introducción

El movimiento de una carga en el campo de un monopolo magnético se conoce desde hace algún tiempo [1].

* Departamento de Física de la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, Apdo. postal 55-534, 09340 México, D.F.

Aunque se puede objetar la falta de evidencia experimental en la existencia del monopolo, persiste éste como un modelo cuya existencia tampoco puede negarse [2].

Independientemente de la existencia o no de monopolos, este sistema dinámico es importante por ser uno de los pocos ejemplos integrables de la dinámica de cargas en campos magnéticos. El otro sistema integrable muy conocido es el movimiento en hélice de una carga en un campo magnético constante. El movimiento de la carga en el campo de monopolo posee el comportamiento dinámico que no se observa en el campo constante y que se conoce como espejo magnético. Cuando una carga se acerca mucho a una región donde concurren las líneas del campo magnético, sufre una reflexión como si fuera repelida por el centro donde concurren las líneas del campo. Este fenómeno utilizado en el diseño de las botellas magnéticas se encuentra en el movimiento que queremos estudiar aquí.

La ecuación de movimiento de una carga en el campo de un monopolo situado en el origen de coordenadas es

$$m\ddot{\mathbf{r}} = eK\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}/r^3, \tag{1.1}$$

donde \mathbf{r} es la posición de la carga, r la distancia de la carga al monopolo, m la masa, e la carga, K la intensidad del monopolo y el punto sobre una letra indica derivada respecto al tiempo.

La solución de la ecuación (1.1) está sobre un cono circular cuyo vértice está en el monopolo y cuyo eje de simetría apunta en la dirección del vector constante de movimiento

$$\mathbf{q} = \mathbf{r}/r - m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}/eK. \tag{1.2}$$

Este vector es proporcional al momento angular total (mecánico más electromagnético) según encontró J.J. Thomson en 1904 [3].

La carga sigue una geodésica con velocidad constante sobre la superficie del cono:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/r = 1, \tag{1.3}$$

donde el punto \cdot denota al producto escalar entre vectores. Esta ecuación sigue de inmediato de la igualdad (1.2).

Al desenvolver el cono, la trayectoria geodésica se convierte en una recta situada a una distancia mínima r_0 del monopolo. Se forma un triángulo rectángulo entre esta recta, la recta perpendicular que pasa por el monopolo y el radio vector r .

Se encuentra, por el teorema de Pitágoras, que

$$r^2 = r_0^2 + v^2(t - t_0)^2, \quad (1.4)$$

donde t_0 es el tiempo correspondiente al valor mínimo r_0 de r y v es la magnitud constante de la velocidad.

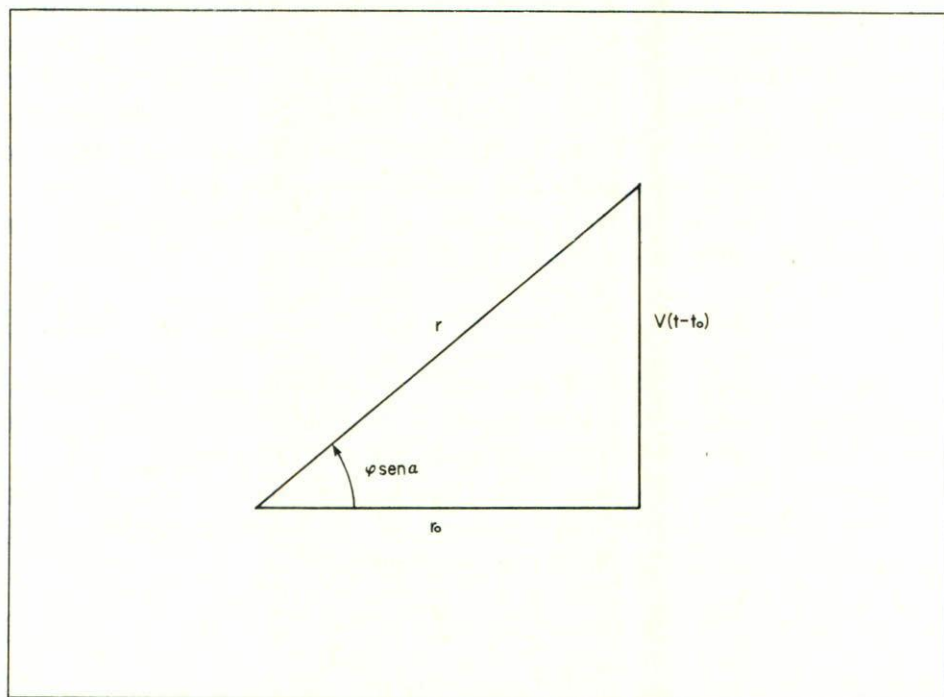


FIGURA 1. Desenvolvimiento del cono circular.

El ángulo entre el segmento r_0 y el radio vector r es un múltiplo del ángulo azimutal φ en el cono por lo cual obtenemos de la Fig. 1 que

$$\tan(\varphi \text{ sen } \alpha) = v(t - t_0)/r_0, \quad (1.5)$$

donde α es el ángulo de apertura constante del cono. De acuerdo con la ecuación (1.3) la magnitud de \mathbf{q} es la $\sec \alpha$.

La solución tan simple a este problema sugiere tomarlo como base para la solución de problemas más complicados en una teoría de perturbaciones. La existencia del fenómeno de espejo magnético lo hace preferible al problema de movimiento helicoidal en un campo constante. Sin embargo, en una teoría de perturbaciones es conveniente expresar las ecuaciones diferenciales de movimiento en forma hamiltoniana. En este trabajo se obtienen variables canónicas para la descripción del movimiento de una carga en el campo del monopolos magnético.

2. Formulación hamiltoniana en variables no canónicas

La formulación hamiltoniana del movimiento de una carga en un campo electromagnético dado resulta por el hecho conocido que la fuerza electromagnética de Lorentz se deriva del potencial generalizado [4]

$$U = e\Phi(\mathbf{r}, t) - e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \tag{2.1}$$

donde Φ y \mathbf{A} son los potenciales escalar y vectorial del campo electromagnético. El hamiltoniano se escribe entonces como [4]

$$H = (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2/2m + e\Phi. \tag{2.2}$$

En el caso del monopolos se presenta la dificultad de que el potencial vectorial [5] es función de una dirección constante \mathbf{n} sin un sentido físico *a priori*, y \mathbf{A} no es invariante de norma:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= K\mathbf{r}/r^3 = \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{A} &= K\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}}/(\tau - \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}})r. \end{aligned} \tag{2.3}$$

La primera de las ecuaciones (2.3) es un rotacional, excepto a lo largo de la cuerda de Dirac, determinada por la dirección arbitraria $\hat{\mathbf{n}}$ [3]. En dicha dirección no está definido el potencial vectorial \mathbf{A} .

Algunos tratamientos de este problema [6] seleccionan a la cuerda $\hat{\mathbf{n}}$ en la dirección antiparalela del eje OZ en coordenadas esféricas, lo cual disfraza la arbitrariedad de dicha selección. Afortunadamente se demuestra que la transformación entre dos selecciones diferentes de la dirección $\hat{\mathbf{n}}$ corresponde a una transformación de norma [3].

Por otra parte, se conoce una formulación hamiltoniana en variables no canónicas [7] del movimiento de una carga en un campo electromagnético. En ausencia de campo eléctrico esta formulación se puede expresar en términos de $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}$, con ayuda del hamiltoniano

$$H = \boldsymbol{\pi}^2/2m \quad (2.4)$$

y de los paréntesis de Poisson entre las variables no canónicas \mathbf{r} y $\boldsymbol{\pi}$:

$$\begin{aligned} [r_i, r_j] &= 0, \\ [r_i, \pi_j] &= \partial_{ij}, \\ [\pi_i, \pi_j] &= e\epsilon_{ijk}B_k, \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde ϵ_{ijk} es el tensor antisimétrico de Levi-Civita.

Las ecuaciones de movimiento resultantes dan sentido físico a la variable auxiliar $\boldsymbol{\pi}$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= [\mathbf{r}, H] = \boldsymbol{\pi}/m, \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} &= [\boldsymbol{\pi}, H] = eK\boldsymbol{\pi} \times \mathbf{r}/mr^3. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Las cuales son equivalentes a la ecuación de movimiento (1.1). La introducción de la variable $\boldsymbol{\pi}$ se justifica por tener un significado físico más claro que la variable canónica \mathbf{p} , la cual no es invariante de norma. En el caso del monopolo, el carácter no físico de la dirección $\hat{\mathbf{n}}$ en \mathbf{A} es una razón más para usar $\boldsymbol{\pi}$ como punto de partida en una teoría hamiltoniana. El potencial vectorial \mathbf{A} , y por lo mismo la dirección $\hat{\mathbf{n}}$, no se usan en este trabajo.

Por otra parte, el teorema de Darboux [7] asegura la existencia de variables canónicas, las que serán obtenidas en lo que sigue.

La selección de las variables canónicas que usaremos aquí está inspirada en las variables utilizadas en la formulación hamiltoniana

del movimiento del centro guía en el movimiento de una carga en un campo electromagnético que varía poco, donde se aplica el método del promedio y se obtienen soluciones aproximadas a las ecuaciones de movimiento. Esto permite usar invariantes adiabáticos para conocer en forma aproximada la dinámica de cargas en campos electromagnéticos.

Se hace el cambio de variable

$$\pi = u\hat{\mathbf{b}} + w\hat{\mathbf{c}}, \tag{2.7}$$

donde $\hat{\mathbf{b}}$ es un vector unitario en la dirección del campo y $\hat{\mathbf{c}}$ otro vector unitario perpendicular al anterior, u es la cantidad de movimiento longitudinal y w la cantidad de movimiento transversal al vector $\hat{\mathbf{b}}$, el cual determina otros dos vectores ortonormales a él; por ejemplo,

$$\hat{\mathbf{f}}_1 = \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{i}}(\hat{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{b}})/(1 + \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \tag{2.8}$$

y

$$\hat{\mathbf{f}}_2 = \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{j}}(\hat{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{b}})/(1 + \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{k}}),$$

donde $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ es la base ortonormal constante de nuestro sistema de coordenadas.

El vector $\hat{\mathbf{c}}$ gira alrededor de $\hat{\mathbf{b}}$ un ángulo θ con respecto a $\hat{\mathbf{f}}_1$:

$$\hat{\mathbf{c}} = \hat{\mathbf{f}}_1 \cos \theta - \hat{\mathbf{f}}_2 \sin \theta. \tag{2.9}$$

La coordenada no canónica π se sustituye por las variables u, w y θ . La variable π se expresa en función de estas coordenadas y de \mathbf{r} con ayuda de las ecuaciones (2.7)–(2.9).

El hamiltoniano en las nuevas variables es ahora

$$H = (u^2 + w^2)/2m, \tag{2.10}$$

y los paréntesis de Poisson se vuelven iguales a [7]:

$$[r_i, r_j] = 0, \tag{2.11}$$

$$[\mathbf{r}, u] = \hat{\mathbf{b}}, \quad (2.12)$$

$$[\mathbf{r}, w] = \hat{\mathbf{c}}, \quad (2.13)$$

$$[\mathbf{r}, \theta] = -\hat{\mathbf{a}}/w, \quad (2.14)$$

$$[w, u] = -w/r, \quad (2.15)$$

$$[u, \theta] = 0 \quad (2.16)$$

y

$$[w, \theta] = -ek/wr^2 - \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{k}}/r(1 + \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{k}}), \quad (2.17)$$

donde $\hat{\mathbf{a}}$ es el vector unitario ortonormal a los vectores $\hat{\mathbf{b}}$ y $\hat{\mathbf{c}}$:

$$\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{c}} = \hat{\mathbf{f}}_1 \sin \theta + \hat{\mathbf{f}}_2 \cos \theta. \quad (2.18)$$

Estos resultados concuerdan con los de Littlejohn [7] para este caso particular si se supone además la forma especial (2.8) para la base dependiente en \mathbf{r} , ortogonal al campo, la cual permite las formas explícitas, particulares (2.16) y (2.17) de los paréntesis de Poisson.

3. Variables canónicas de la carga

El tratamiento recomendado en casos donde la dinámica es no integrable consiste en buscar el momento magnético, conjugado canónico de la variable θ , y aplicar entonces el método del promedio de Bogoliobov por suponer que θ es una variable rápida. En primera aproximación el momento magnético, canónico conjugado de θ , está dado por el invariante adiabático [8]

$$M = w^2/2eB, \quad (3.1)$$

donde B es la magnitud del campo. En este caso se tiene

$$M = w^2 r^2 / 2eK \quad (3.2)$$

y es una constante de movimiento:

$$[M, H] = 0. \quad (3.3)$$

Veamos ahora la representación en variables no canónicas del eje de simetría del cono. Sustituyendo (1.2) en función de dichas variables se obtiene

$$\mathbf{q} = \hat{\mathbf{b}} - wr\hat{\mathbf{a}}/eK, \quad (3.4)$$

que satisface a la ecuación

$$[\mathbf{q}, H] = 0. \quad (3.5)$$

La magnitud de \mathbf{q} no proporciona una nueva constante de movimiento por ser una función del momento magnético

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{1 + w^2 r^2 / e^2 K^2} = \sqrt{1 + 2M/eK} = \sec \alpha. \quad (3.6)$$

Con la última igualdad recordamos que esta magnitud es igual a la secante del ángulo α . La constancia de M obliga a la carga a moverse sobre un cono de ángulo α constante entre los vectores $\hat{\mathbf{b}}$ y \mathbf{q} .

Las variables u, w, θ , se transforman en u, M, θ ; y del carácter radial del campo magnético elegimos en lugar de las variables \mathbf{r} las variables $r, \hat{\mathbf{b}}$. Los paréntesis de Poisson y el hamiltoniano se convierten en las expresiones

$$[r, u] = 1 \quad (3.7)$$

$$[r, M] = [r, \theta] = [u, M] = [u, \theta] = 0 \quad (3.8)$$

y

$$[r, \hat{\mathbf{b}}] = [u, \hat{\mathbf{b}}] = 0, \quad (3.9)$$

las cuales muestran que r y u forman una pareja de variables canónicas de acuerdo con el lema de Darboux [7], y se tiene además

$$\begin{aligned} [\theta, M] &= 1 + \frac{wr^2}{eK} \hat{\mathbf{c}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \hat{\mathbf{c}} \right) \cdot \hat{\mathbf{a}} \\ &= 1 - \frac{wr}{eK} \frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{a}}}{1 + \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{k}}}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

por lo cual θ y M no son variables canónicas conjugadas sino en primera aproximación. Los otros paréntesis de Poisson valen

$$[\theta, \hat{\mathbf{b}}] = \hat{\mathbf{a}}/wr \quad (3.11)$$

y

$$[M, \hat{\mathbf{b}}] = -wr\hat{c}/eK. \quad (3.12)$$

El hamiltoniano toma la forma

$$H = \frac{1}{2m} \left(u^2 + \frac{2MeK}{r^2} \right). \quad (3.13)$$

La solución conocida a este problema nos sugirió el cambio a las nuevas variables: $\hat{\mathbf{q}}$ eje de simetría del cono y φ ángulo de giro alrededor de $\hat{\mathbf{q}}$. Según (3.4)

$$\hat{\mathbf{q}} = \frac{\hat{\mathbf{b}} - \frac{wr}{eK}\hat{\mathbf{a}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{wr}{eK}\right)^2}}. \quad (3.14)$$

El vector $\hat{\mathbf{c}}$ es perpendicular a este vector $\hat{\mathbf{q}}$. Sea $\hat{\mathbf{d}}$ el vector que con $\hat{\mathbf{c}}$ y $\hat{\mathbf{q}}$ forma una terna ortonormal:

$$\hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{c}} = \frac{\hat{\mathbf{a}} + \frac{wr}{eK}\hat{\mathbf{b}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{wr}{eK}\right)^2}}. \quad (3.15)$$

El ángulo φ representa el giro alrededor del vector $\hat{\mathbf{q}}$. En forma análoga a la base (2.8) se introduce ahora la base ortonormal de vectores unitarios en el plano perpendicular a $\hat{\mathbf{q}}$:

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{i}} - \frac{\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{i}}}{1 + \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{k}}} (\hat{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{k}}) \quad (3.16)$$

y

$$\hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{j}} - \frac{\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{j}}}{1 + \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{k}}} (\hat{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{k}}).$$

En este caso los vectores $\hat{\mathbf{d}}$ y $\hat{\mathbf{c}}$ se expresan en esta base en términos del ángulo φ :

$$\hat{\mathbf{c}} = \hat{\mathbf{e}}_1 \cos \varphi - \hat{\mathbf{e}}_2 \sin \varphi$$

(3.17)

y

$$\hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{e}}_1 \sin \varphi + \hat{\mathbf{e}}_2 \cos \varphi.$$

Aceptamos como nuevas variables al conjunto $r, u, M, \varphi, \hat{\mathbf{q}}$. Los paréntesis de Poisson en estas variables son

$$\begin{aligned} [r, u] &= 1, \\ [r, M] &= [r, \varphi] = [u, M] = [u, \varphi] = 0, \\ [r, \hat{\mathbf{q}}] &= [u, \hat{\mathbf{q}}] = 0, \\ [M, \hat{\mathbf{q}}] &= 0, \\ [\varphi, \hat{\mathbf{q}}] &= \frac{1}{1 + \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}}} \frac{1}{eK} \sqrt{1 + \left(\frac{wr}{eK}\right)^2} \hat{\mathbf{k}} \cdot (1 - \hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{q}}), \\ \left[\varphi, \frac{eK}{\sqrt{1 + \left(\frac{wr}{eK}\right)^2}} \right] &= 1. \end{aligned}$$

(3.18)

que están más cercanas a un conjunto canónico que las variables anteriores.

La última igualdad se ha escrito para ilustrar claramente que la función de M igual a $eK/\sqrt{1 + (wr/eK)^2}$ puede ser canónica conjugada al ángulo φ . A su vez es función del ángulo α (proporcional al $\cos \alpha$). Recuérdese que estos ángulos son coordenadas esféricas con simetría alrededor del vector \mathbf{q} en la solución elemental del movimiento que se vio en la primera sección. Vemos un hecho de interés pedagógico: cómo funciones de dos ángulos pueden ser variables canónicas conjugadas.

Vamos a introducir, de manera análoga, los ángulos asociados a las coordenadas esféricas del vector $\hat{\mathbf{q}}$. Sea μ el ángulo que forma la

proyección de $\hat{\mathbf{q}}$ en el plano XOY con la dirección del eje OX :

$$\cos \mu = \frac{\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{i}}}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2}}, \quad (3.19)$$

donde $\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{k}}$ determina el otro ángulo de las coordenadas esféricas. Se tienen los paréntesis de Poisson con estas nuevas variables:

$$[\mu, \varphi] = [\mu, M] = 0 \quad (3.20)$$

y

$$[\mu, \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{k}}] = -\frac{\sqrt{1 + (wr/eK)^2}}{eK}, \quad (3.21)$$

los cuales nos conducen a las variables canónicas

$$\begin{aligned} q_1 &= r, \\ p_1 &= u, \\ q_2 &= \varphi, \\ p_2 &= \frac{eK}{\sqrt{1 + (wr/eK)^2}}, \\ q_3 &= \mu, \end{aligned} \quad (3.22)$$

y

$$p_3 = \frac{eK}{\sqrt{1 + (wr/eK)^2}}(1 - \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{k}}),$$

con paréntesis de Poisson habituales entre variables canónicas. El hamiltoniano en estas variables es

$$H = \frac{1}{2m} \left[p_1^2 + \frac{e^2 K^2}{q_1^2} \left(\frac{e^2 K^2}{p_2^2} - 1 \right) \right], \quad (3.23)$$

y se ha logrado el objetivo de expresar este problema con un formalismo hamiltoniano en términos de variables canónicas. En un

trabajo aparte se discutirá la posibilidad de utilizar estas variables como punto de partida en una teoría de perturbaciones.

4. Conclusiones

En este trabajo se obtuvieron variables canónicas para el movimiento de una carga en un campo de monopolo a partir de las variables no canónicas de uso común en el estudio de la dinámica de cargas en un campo electromagnético externo [7]. Todas las cantidades finales resultan entonces invariantes de norma.

La existencia de la constante de movimiento q permitiría *a posteriori* la selección de la cuerda \hat{n} en la misma dirección. Sin embargo, hacer tal cosa implicaría un círculo vicioso o, en el mejor de los casos, un cambio de norma de una dirección inicial arbitraria a una final determinada por la constante de movimiento.

Nuestro tratamiento no ha hecho uso del potencial (2.3). Con esto se ha evitado la no-invariancia de norma del mismo y de la variable canónica p , pero además salvamos la invalidez de la dinámica en cualquier punto de la dirección no física \hat{n} , la cual no se usa en este trabajo.

El hamiltoniano (3.23) en las variables canónicas finales no es función de las coordenadas canónicas q_2, q_3, p_3 . Se infiere de inmediato la conservación en el tiempo de sus variables conjugadas p_2, q_3, p_3 , las cuales son esencialmente las coordenadas esféricas del momento angular total q . Si perturbamos al sistema no se afectan ni el sistema coordenado, ni el hamiltoniano no perturbado. Esto deja de ser cierto cuando el sistema de coordenadas está expresado en función de una constante de movimiento del sistema no perturbado.

Observamos un paralelismo de este tratamiento con el del cuerpo libre asimétrico en variables de Andoyer-Deprit [9], donde el vector de momento angular se conserva por una propiedad similar del hamiltoniano, y donde la teoría de perturbaciones se ha aplicado directamente en el mismo sistema de referencia.

Agradecimientos

Queremos agradecer a José Luis Jiménez por el interés demostrado en nuestro trabajo, por las discusiones de varios temas y por las referencias proporcionadas. Nuestro agradecimiento también al revisor de este artículo, quien sugirió valiosas adiciones y comentarios para enriquecer la última versión del mismo.

Referencias

1. H. Poincaré, *Compt. Rend. Ac. Sc. Paris* **123** (1896) 530; C. Agostinelli & A. Pignedoli, *Meccanica razionale* Vol. I, Cap. V 2 n 7. Zanichelli, Bologna (1961).
2. B. Cabrera, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1378; A.D. Caplin, C.N. Guy, M. Hardiman, J.G. Park y J.C. Schouten, *Nature* **317** (1985) 234; A.D. Caplin, M. Hardiman, M. Koratzinos and J.C. Schouten, *Nature* **321** (1986) 402; V.F. Mikhailov, *J. of Phys. A (G.B.)* **L18** (1985) 903.
3. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, J. Wiley & Sons. 2nd. Edition, New York, (1975).
4. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley. 2nd. Edition, Reading, Massachussets, (1980).
5. D. Zwanzinger, *Phys. Rev.* **176** (1968) 1480.
6. Harish-Chandra, *Phys. Rev.* **74** (1948) 883.
7. J. Littlejohn, *J. Math. Phys.* **20** (1979) 2445; *Phys. Fluids* **24** (1981) 1730; B. Weyssow and R. Balescu, *J. Plasma Physics* **35** (1986) 449.
8. V.I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer Verlag. New York, (1978).
9. J. Galgani, A. Giorgilli et J.-M. Strelcyn, *Il Nuovo Cimento* **61B** (1981) 1.