 Revista Mexicana de Física 33 No. 4(1988) 670-682

Estados cuánticos estacionarios a lo largo de una curva

E. Ley-Koo

Universidad China de Ciencia y Tecnología, Hefei, Anhui, República Popular China

(recibido el 2 de diciembre de 1986; aceptado el 28 de mayo de 1987)

Resumen. Se demuestra que la ecuación de Schrödinger para una partícula constreñida a moverse a lo largo de una curva tiene una solución exacta. Los eigenvalores de la energía varían como el cuadrado de los números enteros y son inversamente proporcionales al cuadrado de la longitud de la curva, y las eigenfunciones son funciones (co)senoidales de la distancia recorrida a lo largo de la curva. En el caso de que la curva sea cerrada, los estados excitados son doblemente degenerados. Se presentan ejemplos de soluciones explícitas para las curvas cónicas

Abstract. It is shown that the Schrödinger equation for a particle constrained to move along any curve has an exact solution. The energy eigenvalues change like the squares of the integer numbers and are inversely proportional to the square of the curve's length, and the eigenfunctions are (co)sine functions of the distance traveled along the curve. In the case of closed curves the excited states are doubly degenerate. Examples of explicit solutions for the conic curves are presented.

PACS: 03.65.Ge

1. Introducción

Los movimientos de rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo y alrededor de un punto fijo son temas que normalmente se incluyen en cursos de mecánica clásica [1] y de mecánica cuántica [2]. Los sistemas correspondientes, el rotador en un plano y el rotador en tres dimensiones, tienen asociadas partículas constreñidas a moverse en círculos y esferas, respectivamente. Ambos problemas son casos especiales del problema de una partícula constreñida a moverse sobre una superficie esférica de N dimensiones inmersa en un espacio euclideano de $N+1$ dimensiones [3], con $N = 1$ y 2, respectivamente. Es interesante analizar variantes de este problema en las cuales la partícula está constreñida a moverse sobre superficies diferentes de la esfera. La solución del problema cuántico para superficies esferoidales, con $N = 2$, ha sido investigada recientemente [4].

En el presente artículo se estudia el problema cuántico de una partícula constreñida a moverse a lo largo de cualquier curva, considerada como un espacio unidimensional. En la sección 2 se construye la ecuación de Schrödinger en un espacio curvo inmerso en un espacio euclideano de mayor dimensionalidad. En el caso particular de una línea curva, la ecuación de Schrödinger resulta ser integrable usando el elemento de arco como variable independiente. Se distingue entre los casos de curvas cerradas y abiertas, a través de las condiciones de frontera respectivas y de las soluciones de los problemas de eigenvalores correspondientes. En la sección 3 se presentan las soluciones cuantitativas para las curvas cónicas, usando las coordenadas curvilíneas ortogonales asociadas. En la sección 4 se realiza una discusión sobre algunos puntos de interés didáctico del problema analizado.

2. La ecuación de Schrödinger y su solución

Una partícula constreñida a moverse a lo largo de una curva, bajo la acción de fuerzas que no realizan trabajo, tiene solamente energía cinética. La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para tal sistema se reduce a la ecuación de Helmholtz,

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\mathbf{r}) = 0, \tag{1}$$

en términos del operador laplaciano ∇^2 y el cuadrado del número de onda:

$$k^2 = 2_{\mu}E/\hbar^2, \tag{2}$$

siendo μ y E la masa y la energía de la partícula, respectivamente y $\hbar$ la constante de Planck [2].

Para construir el operador laplaciano de nuestro problema consideramos primero la forma general de ese operador en un espacio curvo de N_s dimensiones inmerso en un espacio euclideano de N_e dimensiones, donde $1 \leq N_s \leq N_e$. En el caso de una línea curva $N_s = 1$. Utilizando coordenadas curvilíneas ortogonales q_i, con $i = 1, 2, \ldots, N_s, \ldots, N_e$ en el espacio euclideano, el desplazamiento diferencial de un punto a otro queda expresado como

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{N_e} h_i(q_1, q_2, \ldots, q_{N_e}) \hat{\mathbf{e}}_i(q_1, q_2, \ldots, q_{N_s}, \ldots, q_{N_e})\, dq_i \tag{3}$$

en términos de los factores de escala h_i, vectores unitarios $\hat{\mathbf{e}}_i$ y cambios diferenciales dq_i asociados a cada coordenada [5]. La restricción a un subespacio de N_s dimensiones se implementa fijando $N_e - N_s$ de las coordenadas, sean $q_j = q_j^0$ para $j = N_s + 1, \ldots, N_e$. El operador laplaciano en el subespacio de N_s dimensiones es

$$\nabla^2 = \left(\prod_{k=1}^{N_s} h_k\right)^{-1} \sum_{i=1}^{N_s} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\left(\prod_{j=1}^{N_s} h_j\right) \frac{\partial}{h_i^2 \partial q_i}\right], \tag{4}$$

donde se entiende que en los factores de escala las coordenadas ortogonales al subespacio están fijas. Cuando el subespacio es una línea curva, $N_s = 1$ y

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_1(q_1, q_2^0, \ldots, q_{N_e}^0)} \frac{d}{dq_1} \frac{1}{h_1(q_1, q_2^0, \ldots, q_{N_e}^0)} \frac{d}{dq_1}. \tag{5}$$

En este caso, la Ec. (3) permite reconocer de inmediato que

$$ds = h_1(q_1, q_2^0, \ldots, q_{N_e}^0)\, dq_1 \tag{6}$$

es simplemente el elemento de un arco de la curva. Correspondientemente, usando las Ecs. (1), (5) y (6), la ecuación de Schrödinger se reduce a la ecuación de Helmholtz en una dimensión:

$$\left(\frac{d^2}{ds^2} + k^2\right)\psi(s) = 0 \tag{7}$$

Esta ecuación se sabe que es integrable y tiene soluciones de la forma

$$\psi(s) = A\cos ks + B\,\mathrm{sen}\,ks, \tag{8}$$

donde las constantes A y B y el número de onda k quedan por ser determinadas de acuerdo con las condiciones de frontera.

En el caso de una curva cerrada de lontigud L, los valores de la longitud del arco s y $s + L$ corresponden a un mismo punto. La condición de unicidad de la función de onda,

$$\psi(s + L) = \psi(s), \tag{9}$$

se traduce en la restricción sobre el número de onda,

$$kL = 2\pi n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{10}$$

la cual es equivalente a que la longitud de la curva contenga un múltiplo entero de longitudes de onda. Las eigenfunciones correspondientes son entonces:

$$\psi_n^+(s) = \sqrt{\frac{2}{L(1 + \delta_{n,0})}}\cos\frac{2\pi ns}{L} \tag{11a}$$

y

$$\psi_n^-(s) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi ns}{L}, \tag{11b}$$

ambas asociadas con el eigenvalor de la energía,

$$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} = \frac{2\hbar^2\pi^2 n^2}{\mu L^2}, \tag{12}$$

obtenido de las Ecs. (2) y (10). Los estados con un mismo valor de n son doblemente degenerados, excepto el estado base. Para valores pares (nones) de n las eigenfunciones tienen periodo $L/2(L)$. Bajo la transformación $s \to L - s$, las eigenfunciones de la Ec. (11a) mantienen su valor y signo, mientras que las eigenfunciones de la

Ec. (11*b*) cambian de signo. Las eigenfunciones satisfacen la propiedad de ortonormalidad:

$$\int_0^L \psi_n^p(s)\psi_{n'}^{p'}(s)\,ds = \delta_{p,p'}\delta_{n,n'}. \tag{13}$$

En el caso de una curva abierta de longitud L, para que el problema de eigenvalores esté definido se requiere imponer las condiciones de frontera en los extremos del arco en cuestión. A manera de ilustración consideramos la situación en que se asegura que la partícula está dentro del arco pidiendo que la función de onda se anule en los extremos del mismo. Las eigenfunciones correspondientes son

$$\psi_n(S) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi s}{L}, \tag{14}$$

con eigenvalor de la energía

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2\mu L^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{15}$$

En este caso no hay degeneración. Bajo la transformación $s \to L - s$, las eigenfunciones no cambian o cambian de signo, según que n sea non o par. Las eigenfunciones son también ortonormales:

$$\int_0^L \psi_n(s)\psi_{n'}(s)\,ds = \delta_{n,n'}. \tag{16}$$

Las dos versiones del problema que se han considerado, con una curva cerrada y una línea abierta, representan la generalización de los problemas correspondientes del círculo y de un segmento rectilíneo, respectivamente [2]. Las soluciones bien conocidas de estos dos casos se obtienen al hacer las identificaciones

$$L = 2\pi r_0 \quad \text{y} \quad s/r_0 = \varphi \tag{6c}$$

para la longitud y la coordenada angular asociadas al círculo, y

$$s = x \tag{6r}$$

como la coordenada cartesiana a lo largo de la recta.

3. Estados cuánticos estacionarios a lo largo de cónicas

En esta sección se presentan las soluciones explícitas de los problemas correspondientes en los casos de las curvas cónicas. Es conveniente estudiar tales casos usando las coordenadas curvilíneas ortogonales asociadas a esas curvas. El vector de posición de los puntos en un plano, $N_e = 2$, se puede escribir en las formas alternativas:

$$\mathbf{r} = \hat{\imath} f \cosh u \cos v + \hat{\jmath} f \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v, \tag{17e}$$

$$= \hat{\imath}\xi\eta + \hat{\jmath}(\eta^2 - \xi^2)/2, \tag{17p}$$

en términos de las coordenadas elípticas (u, v) y parabólicas (ξ, η), respectivamente. Las coordenadas elíptica $0 \leq u < \infty$ e hiperbólica $0 \leq v \leq 2\pi$ corresponden a familias de elipses e hipérbolas confocales mutuamente ortogonales, con centro en el origen de coordenadas y focos sobre el eje de abscisas, siendo $1/\cosh u$ y $1/\cosh v$ las respectivas excentricidades. Las coordenadas parabólicas $-\infty < \xi < \infty$ y $-\infty < \eta < \infty$ corresponden a familias de parábolas mutuamente ortogonales, con foco en el origen de coordenadas y vértices sobre el eje de ordenadas a distancias $\xi^2/2$ y $\eta^2/2$ hacia abajo y arriba, respectivamente.

Un desplazamiento diferencial en el plano queda descrito en las respectivas coordenadas como

$$d\mathbf{r} = f h_e(u, v)(\hat{\mathbf{u}}\, du + \hat{\mathbf{v}}\, dv), \tag{18e}$$

$$= h_p(\xi, \eta)(\hat{\boldsymbol{\xi}}\, d\xi + \hat{\boldsymbol{\eta}}\, d\eta), \tag{18p}$$

en término de los factores de escala

$$f h_e(uv) = f\sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v} = f\sqrt{\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v}\,, \tag{19e}$$

$$h_p(\xi, \eta) = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \tag{19p}$$

y los vectores unitarios

$$\hat{\mathbf{u}} = (\hat{\imath} \operatorname{senh} u \cos v + \hat{\jmath} \cosh u \operatorname{sen} v)/h_e(u, v), \tag{20e}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = (-\hat{\imath} \cosh u \operatorname{sen} v + (\hat{\jmath} \operatorname{senh} u \cos v)/h_e(u, v), \tag{20h}$$

normales a la elipse y a la hipérbola en (u,v), y

$$\hat{\boldsymbol{\xi}} = (\hat{\imath}\eta - \hat{\jmath}\xi)/h_p(\xi,\eta), \quad \hat{\boldsymbol{\eta}} = (\hat{\imath}\xi + \hat{\jmath}\eta)/h_p(\xi,\eta) \tag{20p}$$

normales a las parábolas en (ξ,η).

De acuerdo con las Ecs. (5) y (6), los factores de escala de la Ec. (19) son las cantidades clave para escribir en forma explícita el operador laplaciano y el elemento de arco para cada cónica. A continuación se hace la distinción entre el caso de la elipse como curva cerrada y los casos de arcos hiperbólico y parabólico como curvas abiertas.

A. Estados cuánticos estacionarios alrededor de una elipse

La construcción de mantener a la partícula sobre una elipse $u = u_0$ conduce a escribir la integral de la Ec. (6) con ayuda de la Ec. (19e) en la forma explícita

$$\begin{aligned} s_E(v) &= f\int_0^v \sqrt{\cosh^2 u_0 - \cos^2 v}\, dv \\ &= f\cosh u_0 \int_{(\pi/2)-v}^{\pi/2} \sqrt{1-\operatorname{sech}^2 u_0 \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta \\ &= f\cosh u_0\Big[E(\operatorname{sech}^2 u_0) - E\big(\frac{\pi}{2} - v\backslash \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sech} u_0)\big)\Big]. \end{aligned} \tag{6e}$$

En el último renglón se usan las definiciones de la integral elíptica de la segunda clase:

$$E(\varphi\backslash\alpha) = \int_0^\varphi \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta \tag{21}$$

y de su versión completa [5]

$$E(\operatorname{sen}^2\alpha) = E\Big(\varphi = \frac{\pi}{2}\backslash\alpha\Big). \tag{22}$$

Como se sabe, estas integrales tienen su origen precisamente en el cálculo de longitudes de arcos elípticos. Conviene notar la diferencia en la parametrización de las elipses en la Ec. (17e) y las usadas en la definición de la Ec. (21) ($x = a \operatorname{sen}\theta$, $y = b\cos\theta$), que se traduce en diferentes puntos de partida y en diferentes sentidos en el recorrido de las elipses, de modo que $v + \theta = \pi/2$. Correspondientemente, el perímetro de la elipse tiene la longitud

$$L = s_E(2\pi) = 4f\cosh u_0 E(\operatorname{sech}^2 u_0), \tag{6e'}$$

siendo esta cantidad la que determina el número de onda y la energía de acuerdo con las Ecs. (10) y (12).

Usando las Ecs. (6e) y (6e'), las eigenfunciones de la Ecs. (11) se pueden escribir en términos de la coordenada hiperbólica, la cual define las posiciones a lo largo de la elipse, en las formas

$$\psi_n^+(v) = \frac{1}{\sqrt{2\cosh u_0 E(\operatorname{sech}^2 u_0)(1+\delta_{n,0})}} \times \cos\frac{\pi n s_E(v)}{2f\cosh u_0 E(\operatorname{sech}^2 u_0)} \tag{11ae}$$

y

$$\psi_n^-(v) = \frac{1}{\sqrt{2\cosh u_0 E(\operatorname{sech}^2 u_0)}} \times \operatorname{sen}\frac{\pi n s_E(v)}{2f\cosh u_0 E(\operatorname{sech}^2 u_0)}. \tag{11be}$$

El argumento de estas funciones junto con la relación

$$s_E(v+\pi) = s_E(v) + 2f\cosh u_0 E(\operatorname{sech}^2 u_0),$$

donde el último término corresponde a media elipse, permiten reconocer que las eigenfunciones tienen periodo $\pi(2\pi)$ en v para valores pares (nones) de n. Similarmente, de las relaciones

$$s_E(-v) = -s_E(v)$$

y

$$s_E(\pi - v) = 2f \cosh u_0 E(\operatorname{sech}^2 u) - s_E(v)$$

se sigue que bajo reflexión en el eje X se tiene

$$\psi_n^+(-v) = \psi_n^+(v) \quad \text{y} \quad \psi_n^-(-v) = -\psi_n^-(v)$$

y que bajo reflexión en el eje Y se tiene

$$\psi_n^+(\pi - v) = (-)^n \psi_n^+(v) \quad \text{y} \quad \psi_n^-(\pi - v) = -(-)^n \psi_n^-(v)$$

Los estados degenerados tienen paridades opuestas. La propiedad de ortonormalidad de las eigenfunciones Ecs. (11e) toman la forma

$$\int_0^{2\pi} \psi_n^p(v)\psi_{n'}^{p'}(v) h_e^p(u_0, v)\, dv = \delta_{p,p'}\delta_{n,n'}. \tag{13e}$$

B. Estados cuánticos estacionarios en un arco hiperbólico

En el caso de la hipérbola, las Ecs. (17e) y (19e) definen el espacio unidimensional $v = v_0$ y $2\pi - v_0$, y el factor de escala $fh_e(u, v_0)$ correspondientes. Por simplicidad se escoge un arco simétrico cuyos extremos quedan definidos al especificar el valor de su coordenada elíptica $u = u_0$. Las eigenfunciones correspondientes son

$$\psi_n(u) = \frac{1}{\sqrt{s_H(u_0)}} \operatorname{sen}\left[\frac{n\pi}{2}\left(1 - \frac{s_H(u)}{s_H(u_0)}\right)\right], \tag{14h}$$

donde

$$\begin{aligned} s_H(u) = f\int_0^u \sqrt{\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v_0}\, du = f \Bigg[& \frac{\operatorname{senh} u \cosh u}{\sqrt{\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v_0}} \\ & - E\left(\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{senh} u}{\operatorname{sen} v_0}\right) \Big\backslash \frac{\pi}{2} - v_0\right) \\ & + \operatorname{sen}^2 v_0 F\left(\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{senh} u}{\operatorname{sen} v_0}\right) \Big\backslash \frac{\pi}{2} - v_0\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{6h}$$

es la longitud del arco hiperbólico medido desde el vértice. En el último término, la función

$$F(\varphi\backslash\alpha) = \int_0^{\varphi} d\theta/\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen}^2\theta} \tag{23}$$

es la integral elíptica de la primera clase [5]. Por lo tanto,

$$L = 2s_H(u_0) \tag{6h'}$$

es la longitud del arco hiperbólico completo que determina los eigenvalores de la energía de acuerdo con la Ec. (15). Los estados de la Ec. (14h) son simétricos o antisimétricos bajo reflexión en el eje X,

$$\psi_n(u, 2\pi - v_0) = -(-)^n \psi_n(u, v_0),$$

según que n sea non o par, respectivamente. Además satisfacen la propiedad de ortonormalidad:

$$\int_{(u_0, 2\pi - v_0)}^{(u_0, v_0)} \psi_n(u)\psi_{n'}(u) h_e(u, v_0)\, du = \delta_{n,n'}. \tag{16h}$$

C. Estados cuánticos estacionarios en un arco parabólico

Si la partícula se constriñe al arco parabólico simétrico definido por $\eta = \eta_0$ con extremos $\xi = -\xi_0$ y $\xi = \xi_0$, los estados cuánticos estacionarios correspondientes están descritos por las eigenfunciones

$$\psi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{s_P(\xi_0)}} \operatorname{sen}\left[\frac{n\pi}{2}\left(1 - \frac{s_P(\xi)}{s_P(\xi_0)}\right)\right], \tag{14p}$$

donde

$$s_P(\xi) = \int_0^{\xi} \sqrt{\xi^2 + \eta_0^2}\, d\xi = \frac{1}{2}\left[\xi\sqrt{\xi^2 + \eta_0^2} + \eta_0^2 \ln \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + \eta_0^2}}{\eta_0}\right] \tag{6p}$$

es la longitud del arco parabólico medido desde el vértice. Entonces la longitud del arco completo es

$$L = 2s_P(\xi_0), \tag{6p'}$$

y al ser substituido en la Ec. (15) da los eigenvalores de la energía. Los estados de la Ec. (14p) son simétricos o antisimétricos bajo reflexión en el eje Y, correspondiente a $\xi \to -\xi$, según que n sea non o par, respectivamente. También son ortonormales de acuerdo con la relación

$$\int_{-\xi_0}^{\xi_0} \psi_n(\xi)\psi_{n'}(\xi)h_p(\xi,\eta_0)\, d\xi = \delta_{n,n'}. \tag{16p}$$

4. Discusión

El estudio de los problemas de los estados cuánticos estacionarios a lo largo de un segmento rectilíneo y alrededor de un círculo es bien conocido en los cursos de mecánica cuántica [2]. En el presente trabajo se ha estudiado la generalización de esos problemas al caso de cualquier curva, demostrándose que el problema correspondiente tiene una solución exacta. Dada la generalidad del problema y la simplicidad de su solución, se propone su incorporación en los cursos correspondientes.

Para el estudiante principiante el punto de partida puede ser la ecuación de Schrödinger en la forma de la ecuación de Helmholtz unidimensional, Ec. (17). Si previamente se han estudiado los casos del segmento rectilíneo y del círculo, se reconoce la validez general de los argumentos que conducen a la cuantización del número de onda y de la energía para cualquier curva, sea abierta o cerrada. La aplicación a las curvas cónicas se puede llevar a cabo también usando las ecuaciones de las mismas en coordenadas cartesianas. En el cálculo de las longitudes de arcos elípticos e hiperbólicos, el estudiante se familiarizará con las integrales elípticas y sus propiedades.

Para estudiantes más avanzados el tratamiento completo de la sección 2 es apropiado. En el caso del segmento rectilíneo el espacio de interés es unidimensional desde el principio, y el problema está descrito por la Ec. (7) con la variable de la Ec. ($6r$). En el caso del círculo, el problema normalmente se plantea partiendo de la ecuación de Schrödinger en dos dimensiones; la ecuación es separable en coordenadas circulares de modo que al imponer la condición de que la partícula se mantenga a una distancia radial fija, se obtiene la ecuación unidimensional equivalente a la Ec. (7) usando las relaciones de la Ec. ($6c$). En el caso de cualquier otra curva, la ecuación de Schrödinger en espacios de mayor dimensionalidad no es separable en general, por lo cual desde el principio hay que construir el operador laplaciano en el espacio unidimensional de la curva. Conviene destacar que es la unidimensionalidad del espacio asociado a una curva la que hace posible el planteamiento general del problema y de su solución.

En el caso del círculo se sabe que las eigenfunciones $\cos m\varphi$ y $\operatorname{sen} m\varphi$ asociadas a un mismo eigenvalor de la energía difieren en sus paridades. Además, las combinaciones lineales de esos estados degenerados son también eigenestados con la misma energía. En particular, $\exp(im\varphi) = \cos m\varphi + i \operatorname{sen} m\varphi$ con $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ son eigenfunciones de la energía y del momento angular, y representan ondas viajantes en el sentido de las manecillas del reloj si $m < 0$ y en el sentido opuesto si $m > 0$. En el caso de cualquier curva cerrada las combinaciones $\psi_n^+ \pm \psi_n^-$, de las Ecs. (11), son ondas viajantes en sentidos opuestos. Usando esta descripción, la degeneración de los estados se puede entender en términos de los dos sentidos en que el sistema puede recorrer la curva cerrada teniendo la misma energía.

Conocidas las soluciones para las cónicas, sección 3, es instructivo analizar algunas situaciones límite. Por ejemplo, de la elipse se recupera el caso circular cuando la excentricidad y la distancia focal tienden a anularse; también es interesante estudiar el límite de excentricidad, uno en que la elipse tiende al circuito de dos segmentos rectilíneo entre los focos. El caso del segmento rectilíneo abierto se puede obtener como un caso particular del arco hiperbólico que tiende a coincidir con el eje menor de la elipse cuando $v_0 = \pi/2$.

Se concluye esta discusión señalando que en una curva cerrada o abierta de longitud fija, los estados cuánticos estacionarios, descritos por las Ecs. (11) o (14) con las energías de las Ecs. (12) o (15) mantienen sus características aunque la curva cambie de forma.

Referencias

1. R.F. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. 1, Caps. 8 y 20, Addison-Wesley, Reading (1963).
2. L. Pauling and E.B. Wilson, *Introduction to Quantum Mechanics.* McGraw-Hill, New York (1935) pp. 177 y 271.
3. P. Leal Ferreira, *Rev. Bras. Fís.* **183**, special Vol. (1984).
4. E. Ley-Koo and A. Castillo, *Rev. Bras. Fís.* **16** (1986).
5. G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Second Edition, Caps. 2 y 5, Academic Press, New York (1970).